

530.145

A-95

А. И. Ахиезер  
С. В. Пелетминский

**ГЕОРИЯ**

†  
**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ  
ВЗАИМО-  
ДЕЙСТВИЙ**

А. И. АХИЕЗЕР · С. В. ПЕЛЕТМИНСКИЙ

А-95

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ХАРЬКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

А.И. Ахиезер  
С.В. Пелетминский

# ТЕОРИЯ

708652  
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ  
ВЗАИМО-  
ДЕЙСТВИЙ

КИЕВ  
НАУКОВА ДУМКА  
1993

В монографии изложено современное состояние теории фундаментальных взаимодействий и связанной с ними теории элементарных частиц. Рассмотрена классическая теория бозонных полей и на основе формализма грасмановых переменных дана классическая теория фермионных полей. Изложены операторный метод квантования как обычных, так и калибровочных полей, основы квантовой хромодинамики и единой теории электрослабых взаимодействий. В рамках последней рассмотрена проблема квантовых аномалий. Приведены физические основы теории перенормировок как обычных, так и калибровочных полей. Описаны методы промежуточной регуляризации, включая градиентно инвариантный метод размерной регуляризации. Дана калибровочная трактовка гравитационных полей и их взаимодействия с тензорными и спинорными полями. Изложены классическая теория как абелевых, так и неабелевых суперполей, теория квантования и перенормировок суперполей.

Для специалистов в области физики высоких энергий и элементарных частиц, преподавателей вузов, студентов.

У монографії викладено сучасний стан теорії фундаментальних взаємодій та пов'язаної з ними теорії елементарних частинок. Розглянуто класичну теорію бозонних полів та на основі формалізму грасманових змінних подано класичну теорію ферміонних полів. Викладено операторний метод квантування як звичайних, так і калібрувальних полів, основи квантової хромодинаміки та єдиної теорії електрослабких взаємодій. У межах останньої розглянуто проблему квантових аномалій. Приведено фізичні основи теорії перенормувань як звичайних, так і калібрувальних полів. Описано методи проміжної регуляризації, включаючи градиентно інваріантний метод розмірної регуляризації. Подано калібрувальну трактовку гравітаційних полів та їх взаємодій з тензорними й спинорними полями. Викладено класичну теорію як абелевих, так неабелевих суперполів, теорії квантування та перенормувань суперполів.

Для фахівців у галузі фізики високих енергій та елементарних частинок, викладачів вузів, студентів.

Ответственный редактор В. А. Миранский

Утверждено к печати ученым советом Харьковского физико-технического института АН Украины

Усі права належать видавництву «Наукова думка». Будь-яке використання цього видання або його елементів (фрагментів), тобто копіювання, тиражування, розповсюдження тощо, можливо тільки при наявності попередньої письмової угоди з видавцем.

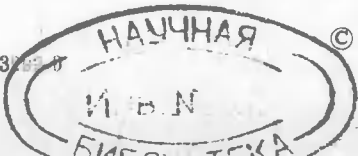
Адреса видавництва «Наукова думка»: Україна, 252601, Київ 4, вул. Терещенківська 3.

All rights reserved. No part of this issue may be reproduced by any mechanical, photographic or electronic process or in the form of a photographic recording, nor may it be stored in a retrieval system, transmitted or otherwise copied for public or private use without written permission of the Naukova Dumka Publishers.

Address of the Publishers: Ukraine 252601, Kiev 4, Tereshchenkivska St., 3.

A 1604070900-023 257-92  
221-93

ISBN 5-12-003199-0



© А. И. Ахизер,  
С. В. Пелетминский, 1993

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ И ИХ КВАНТОВАНИЕ

### § 1.1. Лагранжев формализм

**1.1.1. Вариационный принцип.** В настоящее время известен целый ряд волновых полей, связанных с различными элементарными частицами. Простейшим примером является электромагнитное поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла. Другие поля существенно отличаются по своим свойствам от электромагнитного поля, эволюция их происходит по собственным им законам. Однако несмотря на различия в свойствах полей, законы их движения могут быть сформулированы на общей основе, исходя из единого вариационного принципа, аналогичного вариационному принципу классической механики [1].

Сначала мы отвлечемся от квантовых свойств полей, т. е. будем рассматривать их как классические величины, и сформулируем для них вариационный принцип. Выяснив общие следствия, вытекающие из вариационного принципа, изучим наиболее важные классические поля (скалярное, векторное, электромагнитное, дираковское, калибровочные), а также суперполя.

Волновое поле описывается совокупностью функций  $\varphi_i(x) \equiv \varphi(x)$ , где  $x^\mu \equiv (t, x^k)$  — пространственные координаты и время, а  $i$  — индекс, нумерующий компоненты поля. Примем, что поле, как некоторая динамическая система, характеризуется определенной локальной плотностью функции Лагранжа или лагранжианом  $\mathcal{L}$ , зависящим от координат и времени только через посредство компонент поля  $\varphi_i(x)$  и их производных по координатам и времени  $\frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \varphi_i(x)$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Такое предположение о зависимости  $\mathcal{L}$  от  $x$  связано с тем, что мы рассматриваем поле  $\varphi_i(x)$  в однородном пространстве — времени и не учитываем внешних по отношению к  $\varphi_i(x)$  полей. Мы считаем, что  $\mathcal{L}$  не зависит от высших производных  $\varphi_i(x)$ , поскольку низшие производные можно

относительно к числу компонент поля, после чего  $\mathcal{L}$  будет зависеть только от функций поля и их первых производных.

Интеграл от лагранжиана  $\mathcal{L}$  по 4-объему  $\Omega$ , ограниченному пространственно-подобными гиперповерхностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , называется действием,

$$W = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial_{\mu}\varphi), \quad d^4x = d^3x dt. \quad (1.1.1)$$

Действие  $W$  является функционалом  $\varphi_i$  и поверхностей  $\sigma_1, \sigma_2$ ,  $W \equiv W(\varphi; \sigma_1, \sigma_2)$ .

Определим вариацию действия  $W$ , связанную с варьированием как компонент поля, так и границы области интегрирования. Найдем сперва вариацию  $W$ , связанную с варьированием только  $\varphi_i$ :

$$\delta_{\varphi} W = \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i} \delta \partial_{\mu} \varphi_i \right).$$

Замечая, что  $\delta \partial_{\mu} \varphi_i = \partial_{\mu} \delta \varphi_i$ , следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i} \delta \partial_{\mu} \varphi_i = \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i} \delta \varphi_i \right) - \delta \varphi_i \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i},$$

(и используя теорему Гаусса

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} G^{\mu} = \int_{\sigma_2} d\sigma_{\mu} G^{\mu}(x) - \int_{\sigma_1} d\sigma_{\mu} G^{\mu}(x) \quad (1.1.2)$$

$d\sigma_{\mu}$  — элемент гиперповерхности, ограничивающей объем  $\Omega$ ;  $G^{\mu}$  — произвольные функции  $x$ ), получаем

$$\delta_{\varphi} W = \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i} \right\} \delta \varphi_i(x) + \int_{\sigma_2} d\sigma_{\mu} \delta \varphi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i} - \int_{\sigma_1} d\sigma_{\mu} \delta \varphi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i}.$$

Если 4-объем  $\Omega$  ограничен плоскими гиперповерхностями, ортогональными оси времени, то, согласно (1.1.2),  $d\sigma_{\mu} = \delta_{\mu}^0 d^3x$  ( $\delta_{\mu}^{\nu}$  — символ Кронекера). В общем случае произвольной гиперповерхности  $d\sigma_{\mu} = n_{\mu} d\sigma$ , где  $d\sigma$  — геометрический элемент площади гиперповерхности  $\sigma$  и  $n_{\mu}$  — единичный времениподобный вектор, нормальный к поверхности  $\sigma$  в точке  $x$  и лежащий в верхней части светового конуса с вершиной в точке  $x$ .

Найдем теперь вариацию действия  $W$ , связанную с вариацией гиперповерхностей  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . В результате вариации поверхности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  переходят в близкие поверхности  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$  и вариации  $\delta_{\sigma} W$  действия  $W$  будет равна, очевидно, интегралу

от  $\mathcal{L}$  по 4-объемам, заключенным между  $\sigma'_1, \sigma_1$  и  $\sigma'_2, \sigma_2$ . Элементы этих объемов равны  $d\sigma_{\mu} \delta x^{\mu}(x)$ , где  $\delta x^{\mu}(x)$  — вариация координат границы объема  $\Omega$ . Поэтому

$$\delta_{\sigma} W = \int_{\sigma_2} d\sigma_{\mu} \delta x^{\mu} \cdot \mathcal{L} - \int_{\sigma_1} d\sigma_{\mu} \delta x^{\mu} \mathcal{L}.$$

Таким образом, общая вариация действия запишется в виде

$$\delta W = \int d^4x \delta \varphi_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i} \right) + G(\sigma_2) - G(\sigma_1), \quad (1.1.3)$$

где

$$G(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i} \delta \varphi_i + \mathcal{L} \delta x^{\mu} \right). \quad (1.1.4)$$

Сформулируем теперь принцип стационарного действия: для реального движения динамической системы действие должно быть экстремальным, т. е.  $\delta W = 0$ , при условии, что границы области  $\Omega$  не варьруются ( $\delta x^{\mu} = 0$ ) и вариации функций поля на границах  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  равны нулю,  $\delta \varphi_i|_{\sigma_1, \sigma_2} = 0$ . Отсюда, согласно (1.1.3), следуют уравнения Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi_i} = 0, \quad (1.1.5)$$

представляющие собой уравнения движения поля.

Конкретный вид эти уравнения приобретают, естественно, после того, как установлена структура лагранжиана  $\mathcal{L}$ . В дальнейшем мы вернемся к этой проблеме, но предварительно исследуем общие свойства инвариантности лагранжиана и действия, связанные с существованием различных преобразований симметрии полей.

**1.1.2. Группа пространственно-временных преобразований.** Начнем с преобразований, связанных с симметрией пространства — времени

$$x'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad (1.1.6)$$

оставляющих инвариантной квадратичную форму (интервал):  $g_{\mu\nu} \delta x^{\mu} \delta x^{\nu} = g_{\mu\nu} \delta x'^{\mu} \delta x'^{\nu}$ , где  $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор Минковского и  $\delta x^{\mu}, \delta x'^{\mu}$  — разности координат двух событий в инерциальных системах  $K$  и  $K'$  ( $g_{00} = -g_{kk} = 1, g_{\mu\nu} = 0$  при  $\mu \neq \nu$ ). В формуле (1.1.6)  $x^{\mu}$  и  $x'^{\mu}$  — пространственно-временные координаты одного и того же события в двух инерциальных системах  $K$  и  $K'$ .

С помощью метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  и обратного ему тензора  $g^{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}$  у любой величины можно поднимать и опускать индексы. Например,

$$a_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} a^{\lambda}_{\nu}, \quad a^{\mu\nu} = a^{\mu}_{\lambda} g^{\lambda\nu}, \quad x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}.$$

Неоднородные преобразования (1.1.6) образуют группу, называемую группой Пуанкаре. Однородные преобразования ( $d^\mu = 0$ ) образуют подгруппу группы Пуанкаре, которая называется полной группой Лоренца. Из условия инвариантности интервала следует, что величины  $a_\nu^\mu$  удовлетворяют соотношениям

$$a_{\rho\mu} a^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu, \quad a_{\mu\rho} a^{\nu\rho} = \delta_\mu^\nu. \quad (1.1.7)$$

Преобразование (1.1.6) соответствует переходу от  $K$  к  $K'$ . Производя далее переход от  $K'$  к  $K''$ ,  $x'^\rho = a'^\rho_\mu x'^\mu + d'^\rho$  и используя (1.1.6), имеем  $x''^\rho = a''^\rho_\mu a^\mu_\nu x^\nu + a''^\rho_\mu d^\mu + d'^\rho$ . С другой стороны, можно непосредственно совершить переход от  $K$  к  $K''$ ,  $x''^\rho = a''^\rho_\nu x^\nu + d'^\rho$ . Поэтому

$$a''^\rho_\nu = a'^\rho_\mu a^\mu_\nu, \quad d'^\rho = a'^\rho_\mu d^\mu + d'^\rho. \quad (1.1.8)$$

Легко видеть, что если коэффициенты  $a^\mu_\nu$  и  $a'^\rho_\mu$  удовлетворяют соотношениям (1.1.7), то им будут удовлетворять и коэффициенты  $a''^\rho_\nu$ . Это и означает групповой характер преобразований Пуанкаре и Лоренца. Соотношения (1.1.8) представляют собой закон умножения элементов группы.

Преобразования Пуанкаре объединяют два преобразования: преобразования 4-смещения, определяемые параметрами  $d^\mu$ , и преобразования 4-вращения, определяемые параметрами  $a^\mu_\nu$ .

Из (1.1.7) следует, что

$$\det a = \pm 1. \quad (1.1.9)$$

Кроме того, поскольку согласно (1.1.7)  $(a^0_0)^2 = 1 + a^i_k a^k_i$ , то

$$|a^0_0| \geq 1. \quad (1.1.10)$$

Преобразования, для которых  $a^0_0 \geq 1$ , также образуют группу, называемую ортохронной группой Лоренца.

Бесконечно малые преобразования группы Пуанкаре распадаются на преобразования бесконечно малых трансляций:

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu,$$

где  $\epsilon^\mu$  — 4-вектор бесконечно малого смещения и преобразования бесконечно малых 4-вращений;

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu_\nu x^\nu,$$

где  $\epsilon_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} \epsilon^\lambda_\nu$  — бесконечно малая антисимметричная матрица,  $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ .

Из полной группы Лоренца можно выделить подгруппу, называемую собственной группой Лоренца, любое преобразование которой может быть получено из тождественного преоб-

разования путем непрерывного изменения элементов матрицы  $a_{\mu\nu}$ , т. е. путем последовательного применения бесконечно малых преобразований Лоренца. Поскольку  $\det a$  принимает, согласно (1.1.9), только два дискретных значения, то для любого преобразования собственной группы Лоренца

$$\det a = 1, \quad a^0_0 \geq 1. \quad (1.1.11)$$

Возвратимся теперь к функциям поля. При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой они испытывают некоторое изменение. Если  $\varphi_i(x)$  — функции поля в системе  $K$ , то функции  $\varphi'_i(x')$  того же поля в другой системе  $K'$  связаны с  $\varphi_i(x)$  соотношением  $\varphi'_i(x) = S^j_i(a) \varphi_j(x)$  или сокращенно

$$\varphi'(x') = S(a) \varphi(x), \quad (1.1.12)$$

где  $S(a)$  — некоторая матрица, определяемая коэффициентами  $a^\mu_\nu$  преобразования Лоренца, связывающего координаты одной и той же мировой точки в системах отсчета  $K$  и  $K'$ ,  $x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu + d'^\mu$ . Подчеркнем, что  $\varphi_i(x)$  и  $\varphi'_i(x')$  представляют собой компоненты одного и того же поля, но в разных системах отсчета. Мы предполагаем при этом, что связь между  $\varphi$  и  $\varphi'$  является линейной и однородной.

Преобразования (1.1.12) должны образовывать группу. Действительно, при переходе от системы  $K'$  к системе  $K''$  ( $x'' = a''x' + d''$ ), согласно (1.1.12), функции поля преобразуются по закону:

$$\varphi''(x'') = S(a'') \varphi'(x'). \quad (1.1.12')$$

С другой стороны, переход от  $K$  к  $K''$  можно рассматривать как преобразование Пуанкаре  $x'' = a''x + d''$  с коэффициентами  $a''^\mu_\nu = a'^\mu_\lambda a^\lambda_\nu$ . Поэтому

$$\varphi''(x'') = S(a'') \varphi(x). \quad (1.1.12'')$$

Из сравнения формул (1.1.12), (1.1.12'), (1.1.12'') следует, что

$$S(a'') = S(a') S(a), \quad a'' = a'a. \quad (1.1.13)$$

Группа преобразований (1.1.12), определяемых матрицей  $S(a)$ , называется представлением группы Лоренца. Таким образом, волновое поле преобразуется при переходе от одной системы отсчета к другой по некоторому представлению группы Лоренца. Различным представлениям соответствуют различные физические поля. Поэтому возникает возможность классифицировать поля по соответствующим им представлениям группы Лоренца.

Для бесконечно малых преобразований собственной группы Лоренца матрицу  $S(a)$  можно разложить в ряд по степеням

$\epsilon_{\mu\nu}$  и ограничиться линейными членами

$$S(a) = 1 - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}, \quad (1.1.14)$$

где  $\Sigma_{\mu\nu} = -\Sigma_{\nu\mu}$  — некоторые не зависящие от  $\epsilon_{\mu\nu}$  матрицы, называемые инфинитезимальными операторами. Они определяют представление собственной группы Лоренца.

Лагранжиан  $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$  зависит от  $x$ , как мы уже говорили, только через посредство функций поля  $\varphi_i(x)$  и их первых производных. Поскольку все инерциальные системы эквивалентны, то естественно потребовать, чтобы функция Лагранжа была инвариантной относительно преобразований группы Пуанкаре

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) = \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'_\mu \varphi'(x')), \quad (1.1.15)$$

где  $\varphi'(x') = S(a)\varphi(x)$  и  $x' = ax + d$ .

Из инвариантности функции Лагранжа следует инвариантность интеграла действия:

$$W(\varphi(x); \sigma_1, \sigma_2) = W(\varphi'(x'); \sigma'_1, \sigma'_2), \quad (1.1.16)$$

где  $\varphi'(x) = S(a)\varphi(a^{-1}x - a^{-1}d)$  и гиперповерхности  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_2$  получаются из  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в результате преобразований Пуанкаре. Действительно, интегрируя соотношение (1.1.15) по 4-объему, заключенному между  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , получаем, согласно (1.1.1),

$$W(\varphi(x); \sigma_1, \sigma_2) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'_\mu \varphi'(x')).$$

Переходя в последнем интеграле от переменных интегрирования  $x$  к переменным  $x' = ax + d$  и замечая, что  $|\det a| = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} W(\varphi(x); \sigma_1, \sigma_2) &= \int_{\sigma'_1}^{\sigma'_2} d^4x' \mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'_\mu \varphi'(x')) = \\ &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}(\varphi'(x), \partial_\mu \varphi'(x)), \end{aligned}$$

откуда и следует инвариантность действия.

Из инвариантности действия вытекает, что вариация (1.1.3) обращается в нуль, если

$$\delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \varphi(x) - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} \{ \Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \} \varphi(x), \quad \delta x^\mu(x) = \epsilon^\mu{}_\nu x^\nu + \epsilon^\mu, \quad (1.1.17)$$

При этом не предполагается, что функции поля удовлетворяют уравнениям Лагранжа.

Так как лагранжиан полей представляет собой релятивистский скаляр, то уравнения поля для  $\varphi(x)$  и  $\varphi'(x')$  будут иметь одинаковый вид, т. е. уравнения поля будут инвариантны относительно преобразований Пуанкаре.

**1.1.3. Группы внутренних симметрий.** Лагранжиан и действие могут быть инвариантными и по отношению к некоторым преобразованиям функций поля, не связанным с преобразованием пространства — времени. В этом случае говорят о внутренних симметриях поля. Мы ограничимся здесь рассмотрением только линейных преобразований

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = U\varphi(x), \quad (1.1.18)$$

где матрица  $U$  действует на индекс компоненты поля. Инвариантность лагранжиана относительно преобразований внутренней симметрии означает, что

$$\mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) = \mathcal{L}(\varphi'(x), \partial_\mu \varphi'(x)).$$

Отсюда следует инвариантность действия

$$W(\varphi(x); \sigma_1, \sigma_2) = W(\varphi'(x); \sigma_1, \sigma_2). \quad (1.1.19)$$

Матрица  $U$  может зависеть от ряда непрерывных параметров  $\lambda^a$ ,  $U \equiv U(\lambda)$ . Поскольку лагранжиан инвариантен по отношению к преобразованиям (1.1.18) с матрицами  $U(\lambda_1)$  и  $U(\lambda_2)$ , то он будет инвариантен также и по отношению к преобразованию с матрицей  $U(\lambda_2)U(\lambda_1)$ . Поэтому естественно считать, что найдутся такие значения параметров  $\lambda_3^a$ , для которых

$$U(\lambda_2)U(\lambda_1) = U(\lambda_3), \quad (1.1.20)$$

причем значения параметров  $\lambda_3^a$  определяются значениями параметров  $\lambda_1^a$  и  $\lambda_2^a$ ,

$$\lambda_3 = \lambda(\lambda_2, \lambda_1). \quad (1.1.21)$$

Это значит, что преобразования (1.1.18) образуют некоторую непрерывную группу внутренней симметрии, которую мы будем обозначать через  $\mathcal{G}$ . При этом предполагается, что тождественному преобразованию  $U = I$  соответствуют нулевые значения параметров  $\lambda$  ( $\lambda = 0$ ), а обратному преобразованию  $U^{-1}(\lambda)$  соответствуют некоторые значения параметров  $\lambda$ , которые мы обозначим через  $\lambda^{-1}$ ;

$$U(0) = I, \quad U^{-1}(\lambda) = U(\lambda^{-1}). \quad (1.1.22)$$

Из (1.1.21), (1.1.22) следует, что

$$\lambda(\lambda, \lambda^{-1}) = 0, \quad \lambda(\lambda, 0) = \lambda(0, \lambda) = \lambda. \quad (1.1.23)$$

Кроме того, ассоциативность закона умножения требует, чтобы

$$\lambda(\lambda_1, \lambda(\lambda_2, \lambda_3)) = \lambda(\lambda(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_3). \quad (1.1.24)$$

Формула (1.1.21) определяет закон умножения параметров группы. Группы, элементы которых зависят от некоторых непрерывных параметров, носят общее название групп Ли.

Рассмотрим теперь преобразования группы  $\mathcal{G}$ , бесконечно близкие к тождественному преобразованию, соответствующие бесконечно малым значениям  $\delta\lambda^a \equiv \varepsilon^a$  параметров  $\lambda^a$ . Тогда

$$U(\delta\lambda) = 1 - i \sum_{a=1}^N \varepsilon^a T_a, \quad (1.1.25)$$

где  $N$  — число параметров группы. Входящие сюда матрицы  $T_a$  называются генераторами группы  $\mathcal{G}$  (очевидно, матрицы  $T_a$  должны быть линейно независимыми). Так как, согласно (1.1.20), (1.1.21),

$$U(\lambda_2)U(\lambda_1)U^{-1}(\lambda_2) = U(\lambda(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))),$$

то при  $\lambda_1^a = \varepsilon^a$  параметры  $\lambda(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))$ , согласно (1.1.23), будут близки к нулю. Поэтому

$$U(\lambda_2)T_bU^{-1}(\lambda_2) = \sum_c u_b^c(\lambda_2)T_c,$$

где величины

$$u_b^c(\lambda_2) = \left. \frac{\partial \lambda^c(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))}{\partial \lambda_1^b} \right|_{\lambda_1=0} \quad (1.1.26)$$

определяются только законом умножения параметров  $\lambda$  в группе  $\mathcal{G}$ . Отсюда, используя (1.1.25), легко заключить, что

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \quad (1.1.27)$$

где

$$f_{ab}^c = \left. \frac{\partial u_b^c(\lambda_2)}{\partial \lambda_2^a} \right|_{\lambda_2=0} \quad (1.1.28)$$

и  $[T_a, T_b] \equiv T_a T_b - T_b T_a$  — коммутатор матриц  $T_a$  и  $T_b$ . Величины  $f_{ab}^c$  называются структурными постоянными группы  $\mathcal{G}$ . Как видно из вывода, они определяются только групповым законом умножения.

Из (1.1.27) следует, что структурные постоянные  $f_{ab}^c$  антисимметричны по индексам  $a$  и  $b$ :

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c. \quad (1.1.29)$$

Кроме того, они удовлетворяют соотношению

$$f_{ab}^c f_{cd}^e + f_{bc}^a f_{ca}^e + f_{ca}^b f_{cb}^e = 0, \quad (1.1.30)$$

Действительно, для произвольных матриц  $A, B, C$  имеет место соотношение

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

(оно называется тождеством Якоби). Полагая в этом соотношении  $A = T_a, B = T_b, C = T_c$  и используя (1.1.25), получаем

$$\{f_{ab}^c f_{cd}^e + f_{bc}^a f_{ca}^e + f_{ca}^b f_{cb}^e\} T_e = 0,$$

откуда в силу линейной независимости матриц  $T_a$  и следует соотношение (1.1.30).

Для бесконечно малых преобразований внутренней симметрии вариация  $\delta\varphi$ , входящая в (1.1.3), определяется, согласно (1.1.25), формулой

$$\delta\varphi(x) = -ie^a T_a \varphi(x). \quad (1.1.31)$$

В качестве примера рассмотрим группу Лоренца. Матрицы  $S(a)$ , определяющие преобразования функций поля при преобразованиях Лоренца, образуют, как мы видели, непрерывную группу Ли с законом умножения (1.1.8). Поэтому, используя формулы (1.1.27), мы можем установить перестановочные соотношения для генераторов  $\Sigma_{\mu\nu}$  этой группы. Общие перестановочные соотношения для генераторов  $T_a$  определяются формулой (1.1.27). В нашем случае роль операторов  $T_a$  играют матрицы  $\Sigma_{\mu\nu}$  (индексу  $a$  соответствуют индексы  $\mu\nu, \mu < \nu$ ). Поэтому задача заключается в вычислении структурных коэффициентов  $f_{ab}^c = f_{\varepsilon\lambda, \rho\sigma}^{\mu\nu}$  для группы Лоренца. Эти коэффициенты определяются, согласно (1.1.26), (1.1.28), формулой

$$f_{ab}^c = \left. \frac{\partial^2 \lambda^c(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))}{\partial \lambda_1^b \partial \lambda_2^a} \right|_{\lambda_1=\lambda_2=0}, \quad (1.1.32)$$

где величины  $\lambda$ , нумерующие элементы группы непрерывных преобразований (1.1.6), в рассматриваемом случае совпадают с величинами  $a^{\mu\nu}, \lambda^a = a^{\mu\nu}$ . Функция  $\lambda(\lambda_1, \lambda_2)$ , определяющая групповой закон умножения, в данном случае имеет вид  $a^{\mu\nu}(a_1, a_2) = (a_1 a_2)^{\mu\nu} \equiv a_1^{\mu\lambda} g_{\lambda\rho} a_2^{\rho\nu}$ . Поэтому

$$a(a_2, a(a_1, a_2^{-1})) = a_2 a_1 a_2^{-1},$$

для нахождения структурных констант достаточно знать функцию  $a(a_2, a(a_1, a_2^{-1}))$  для преобразований  $a_1$  и  $a_2$ , близких к единичному,

$$a_1^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \varepsilon_1^{\mu\nu}, \quad a_2^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \varepsilon_2^{\mu\nu},$$

В этом случае

$$a^{\mu\nu}(a_2, a(a_1, a^{-1})) = g^{\mu\nu} + e_1^{\mu\nu} + e_2^{\mu\nu} e_1^{\rho\nu} g_{\lambda\rho} - \\ - e_1^{\mu\nu} e_2^{\rho\nu} g_{\lambda\rho} + o(e_1^2, e_2^2).$$

Для выполнения в соответствии с формулой (1.1.32) дифференцирования  $a^{\mu\nu}$  по  $e^1$  и  $e^2$  удобно предварительно представить последнюю формулу в виде

$$a^{\mu\nu}(a_2, a(a_1, a_2^{-1})) = g^{\mu\nu} - e_1^{\mu\nu} - \\ - \frac{1}{4} e_2^{\rho\sigma} e_1^{\xi\lambda} \{ \delta_\sigma^\nu (\delta_\xi^\mu g_{\lambda\rho} - \delta_\lambda^\mu g_{\xi\rho}) - \delta_\rho^\nu (\delta_\xi^\mu g_{\lambda\sigma} - \delta_\lambda^\mu g_{\xi\sigma}) - \\ - \delta_\rho^\mu (g_{\xi\sigma} \delta_\lambda^\nu - g_{\lambda\sigma} \delta_\xi^\nu) + \delta_\sigma^\mu (g_{\xi\rho} \delta_\lambda^\nu - g_{\lambda\rho} \delta_\xi^\nu) \},$$

где выражение в фигурных скобках антисимметризовано по индексам  $\rho\sigma$ ,  $\xi\lambda$ . Отсюда следует, что

$$f_{\xi\lambda, \rho\sigma}^{\mu\nu} = \delta_\sigma^\nu (\delta_\xi^\mu g_{\lambda\rho} - \delta_\lambda^\mu g_{\xi\rho}) - \delta_\rho^\nu (\delta_\xi^\mu g_{\lambda\sigma} - \delta_\lambda^\mu g_{\xi\sigma}) - \\ - \delta_\rho^\mu (\delta_\lambda^\nu g_{\xi\sigma} - \delta_\xi^\nu g_{\lambda\sigma}) + \delta_\sigma^\mu (\delta_\lambda^\nu g_{\xi\rho} - \delta_\xi^\nu g_{\lambda\rho}).$$

Подставляя это выражение в формулу (см. (1.1.27))

$$i[\Sigma_{\xi\lambda}, \Sigma_{\rho\sigma}] = -\frac{1}{2} f_{\xi\lambda, \rho\sigma}^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu},$$

получаем окончательно

$$i[\Sigma_{\xi\lambda}, \Sigma_{\rho\sigma}] = -\Sigma_{\xi\sigma} g_{\lambda\rho} + \Sigma_{\lambda\sigma} g_{\xi\rho} - \Sigma_{\lambda\rho} g_{\xi\sigma} + \Sigma_{\xi\rho} g_{\lambda\sigma}. \quad (1.1.33)$$

Эти соотношения можно использовать для построения неприводимых представлений собственной группы Лоренца. Именно неприводимые матрицы, удовлетворяющие этим соотношениям, и будут являться инфинитезимальными операторами соответствующих неприводимых представлений.

Матрицы  $\Sigma_{\mu\nu}$  определяют матрицы спина  $\Sigma^i$  частиц, связанных с рассматриваемым полем

$$\Sigma^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \Sigma_{kl}, \quad (1.1.34)$$

где  $\varepsilon^{ikl}$  — полностью антисимметричный единичный тензор ( $\varepsilon^{123} = 1$ ). Действительно, согласно (1.1.33), матрицы  $\Sigma^i$  удовлетворяют перестановочным соотношениям для момента импульса:

$$[\Sigma^i, \Sigma^k] = -i\varepsilon^{ikl} \Sigma_l, \quad \Sigma_l = -\Sigma^l. \quad (1.1.35)$$

**1.1.4. Симметрии и законы сохранения.** С каждой группой преобразований симметрии связан определенный закон сохранения (теорема Э. Неттер). Действительно, формулы (1.1.16), (1.1.19) показывают, что для бесконечно малых преобразова-

ний симметрии (1.1.17), (1.1.31) вариация действия равна нулю, т. е., согласно (1.1.3),

$$\int_{\Omega} d^4x \delta\varphi_i(x) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \right) + G(\sigma_2) - G(\sigma_1) = 0,$$

где  $\delta\varphi_i(x)$  — вариация поля, соответствующая бесконечно малому преобразованию симметрии. Пусть теперь эта вариация происходит около функций поля, удовлетворяющих уравнениям движения (1.1.5). Тогда из последней формулы следует, что

$$G(\sigma_2) = G(\sigma_1), \quad (1.1.36)$$

где  $G(\sigma)$ , согласно (1.1.4), имеет вид

$$G(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_i} \delta\varphi_i + \mathcal{L} \delta x^\mu \right).$$

Подчеркнем, что соотношение (1.1.36) имеет место, если  $\delta\varphi$  — вариация поля, связанная с рассматриваемой группой симметрии, а  $\varphi(x)$  удовлетворяют уравнениям Лагранжа. В этом случае величина  $G(\sigma)$  не зависит от  $\sigma$ . Поэтому, если в качестве  $\sigma$  выбрать гиперплоскость, ортогональную к оси времени и пересекающую ось времени в момент времени  $t$ , то  $G(\sigma) \equiv G(t)$  не будет зависеть от времени, т. е. будет интегралом движения.

Рассмотрим сперва законы сохранения, связанные с инвариантностью лагранжиана относительно 4-смещений и 4-поворотов. Для бесконечно малых преобразований группы Пуанкаре,  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu + \varepsilon^\mu_{\nu\lambda} x^\nu$ , вариация поля определяется формулой (1.1.17). Величина  $C(\sigma)$ , соответствующая этим пространственно-временным преобразованиям, имеет, согласно (1.1.4), вид

$$G(\sigma) = -\varepsilon_\mu P^\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \quad (1.1.37)$$

где

$$P^\mu = \int d\sigma_\nu T^{\mu\nu}, \quad M^{\mu\nu} = \int d\sigma_\rho M^{\mu\nu;\rho} \quad (1.1.38)$$

и

$$T^{\mu\nu} = -\mathcal{L} g^{\mu\nu} + \partial^\mu \varphi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \varphi_i}, \quad (1.1.39)$$

$$M^{\mu\nu;\rho} = x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\sigma \varphi_i} (\Sigma^{\mu\nu})_{ij} \varphi_j.$$

Так как  $\mathcal{L}$  — инвариант группы Пуанкаре, то величины  $T^{\mu\nu}$  образуют тензор второго ранга, а величины  $M^{\mu\nu;\rho}$  — тензор третьего ранга.



В силу инвариантности действия  $W$  относительно преобразований (1.1.6) величина  $G(\sigma)$  не зависит от вида поверхности  $\sigma$ . Поэтому величины

$$P^\mu = \int d^3x T^{\mu 0}, \quad M^{\mu\nu} = \int d^3x M^{\mu\nu;0}$$

не зависят от времени (интегрирование производится по всему объему поля).

Поскольку  $T^{\mu\nu}$  тензор второго ранга, а  $d\sigma_\nu$  — вектор и интеграл по  $d\sigma$  не зависит от поверхности  $\sigma$ , то  $P^\mu$  представляет собой 4-вектор. Он называется 4-вектором энергии-импульса поля. Величина  $T^{\mu\nu}$  называется каноническим тензором энергии-импульса. Аналогичным образом величины  $M^{\mu\nu}$  образуют антисимметричный тензор второго ранга, называемый тензором моментов количества движения поля. Величины  $M^{\mu\nu;\rho}$  называются каноническим тензором плотностей моментов количества движения.

Величина  $\int_\sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\nu$  не зависит от вида поверхности  $\sigma$ , поэтому  $\int_\Sigma T^{\mu\nu} d\sigma_\nu = 0$ , где  $\Sigma$  — замкнутая гиперповерхность, образованная двумя близкими гиперповерхностями, отличающимися друг от друга только в окрестности некоторой точки  $x$ . Используя теорему Гаусса (1.1.2), получаем отсюда  $\int_{\delta\Omega} d^4x \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ , где  $\delta\Omega$  — 4-объем внутри замкнутой гиперповерхности  $\Sigma$ , содержащей точку  $x$ . Таким образом, 4-дивергенция  $T^{\mu\nu}$  равна нулю:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.1.40)$$

Легко убедиться аналогичным образом, что

$$\partial_\rho M^{\mu\nu;\rho} = 0. \quad (1.1.41)$$

Эти соотношения выражают в дифференциальной форме законы сохранения энергии-импульса и моментов количества движения поля.

Обратим внимание на то, что если к  $T^{\mu\nu}$  прибавить величину вида  $\partial_\lambda \chi^{\mu\nu\lambda}$ , где  $\chi^{\mu\nu\lambda}$  — произвольный тензор третьего ранга, антисимметричный относительно индексов  $\nu$  и  $\lambda$ , то 4-дивергенция тензора

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \chi^{\mu\nu\lambda}, \quad (1.1.42)$$

так же как и тензора  $T^{\mu\nu}$ , будет равна нулю,  $\partial_\nu T'^{\mu\nu} = 0$ . Кроме того, 4-векторы энергии-импульса, вычисленные с помощью

$T^{\mu\nu}$  и  $T'^{\mu\nu}$ , будут совпадать, поскольку

$$\int d^3x \partial_\lambda \chi^{\mu 0\lambda} = \int d^3x \partial_\lambda \chi^{\mu 0\lambda} = 0.$$

Ясно, что величины  $M^{\mu\nu;\rho}$ ,

$$M'^{\mu\nu;\rho} = M^{\mu\nu;\rho} + \partial_\lambda (x^\mu \chi^{\nu\rho\lambda} - x^\nu \chi^{\mu\rho\lambda})$$

также будут удовлетворять закону сохранения (1.1.41) и приводить к тем же значениям 4-момента количества движения  $M^{\mu\nu}$ , что и величины  $M^{\mu\nu;\rho}$ ,  $M'^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}$ .

Согласно (1.1.42),  $M^{\mu\nu;\rho}$  можно представить в виде

$$M^{\mu\nu;\rho} = x^\mu T'^{\nu\rho} - x^\nu T'^{\mu\rho} + \chi^{\nu\rho\mu} - \chi^{\mu\rho\nu} + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \varphi} \Sigma^{\mu\nu} \varphi.$$

Выберем теперь тензор  $\chi^{\nu\rho\mu}$  так, чтобы сумма последних трех слагаемых обращалась в нуль,

$$\chi^{\nu\rho\mu} - \chi^{\mu\rho\nu} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \varphi} \Sigma^{\mu\nu} \varphi. \quad (1.1.43)$$

В этом случае

$$M^{\mu\nu;\rho} = x^\mu T'^{\nu\rho} - x^\nu T'^{\mu\rho}. \quad (1.1.44)$$

Из (1.1.43) и условия антисимметрии  $\chi^{\nu\rho\mu}$  по индексам  $\rho$  и  $\mu$  следует, что

$$\chi^{\nu\rho\mu} = \frac{i}{2} \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\rho \varphi} \Sigma^{\mu\nu} \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \Sigma^{\rho\nu} \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \varphi} \Sigma^{\rho\mu} \varphi \right). \quad (1.1.45)$$

Так как величины  $M^{\mu\nu;\rho}$  и  $T'^{\mu\rho}$  удовлетворяют законам сохранения (1.1.40), (1.1.41), то из (1.1.44) следует, что величины  $T'^{\mu\nu}$  образуют симметричный тензор. Он носит название симметричного тензора энергии-импульса и обозначается через  $\Theta^{\mu\nu}$ . Таким образом,  $\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \chi^{\mu\nu\lambda}$ .

Сохраняющиеся величины  $P^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и  $P^0 \equiv \mathcal{E}$  представляют собой импульс и энергию поля. Соответственно этому величины  $\Theta^{k0}$  и  $\Theta^{00}$  представляют собой плотности импульса и энергии.

Сохраняющиеся величины

$$M^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} M_{kl} \quad (1.1.46)$$

образуют псевдовектор трехмерного момента количества движения поля.

Величины  $M^{0k} = -M^{k0}$  в терминах симметричного тензора энергии-импульса имеют вид

$$M^{0k} = t \int d^3x \Theta^{k0} - \int d^3x x^k \Theta^{00} = tP^k - \int d^3x x^k \Theta^{00}.$$

Поскольку величины  $M^{0k}$ ,  $P^k$  и  $P^0 = \mathcal{E}$  не зависят от времени, то закон сохранения  $M^{0k}$  означает, что центр инерции поля, координаты которого определяются формулой

$$X^k = \mathcal{E}^{-1} \int d^3x x^k \Theta^{00},$$

движется с постоянной скоростью  $V^k = P^k / \mathcal{E}$ .

Рассмотрим теперь законы сохранения, связанные с инвариантностью лагранжиана относительно преобразований внутренней симметрии. В этом случае, согласно (1.1.31), вариации координат и поля равны:

$$\delta x^\mu = 0, \quad \delta \varphi = -ie^a T_a \varphi.$$

Величина  $G(\sigma)$ , соответствующая преобразованиям внутренней симметрии, определяется формулой

$$G(\sigma) = \varepsilon^a \int_\sigma d\sigma_\mu \mathcal{F}_a^\mu, \quad \mathcal{F}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} T_a \varphi. \quad (1.1.47)$$

Так как  $\mathcal{L}$  — инвариант группы Пуанкаре, то величины  $\mathcal{F}_a^\mu(x)$  образуют 4-вектор (по индексу  $\mu$ ).

Величина  $G(\sigma)$ , как мы видели, не зависит от вида поверхности  $\sigma$ , поэтому величины

$$Q_a = \int_\sigma d\sigma_\mu \mathcal{F}_a^\mu = \int d^3x \mathcal{F}_a^0 \quad (1.1.48)$$

не зависят от времени и представляют собой инварианты группы Пуанкаре. Они называются обобщенными зарядами, связанными с группой внутренней симметрии. Число зарядов совпадает с числом параметров группы.

Величины  $\mathcal{F}_a^\mu$  удовлетворяют законам сохранения в дифференциальной форме:

$$\partial_\mu \mathcal{F}_a^\mu = 0 \quad (1.1.49)$$

и называются обобщенными 4-токами, связанными с внутренней симметрией.

## § 1.2. Гамильтонов формализм для систем с конечным числом степеней свободы

**1.2.1. Грассмановы переменные.** Мы считали, что поля  $\varphi(x)$  представляют собой коммутирующие величины, т. е. обычные функции пространственно-временной переменной  $x$ . Такие поля называются бозонными полями и им сопоставляются частицы, называемые бозонами. Но кроме бозонных полей,

существуют также фермионные поля, которым в классической теории поля соответствуют не коммутирующие, а антикоммутирующие функции. Фермионным полям сопоставляются частицы, называемые фермионами.

Для изучения квантовых свойств частиц необходимо развить гамильтонов формализм для бозонных и фермионных полей. Этой задаче мы предположим построение гамильтоновой механики систем с конечным числом степеней свободы, предположив, что наряду с бозонными (коммутирующими) переменными имеются фермионные (антикоммутирующие) переменные [2].

Начнем с алгебры конечного числа антикоммутирующих величин  $\xi_1, \dots, \xi_n$ ,

$$\{\xi_i, \xi_j\} \equiv \xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Величины  $\xi_i$  называются грассмановыми переменными. Грассмановы переменные и их произведения образуют линейное пространство размерности  $d = 2^n$  (в этом пространстве и могут быть конкретно реализованы грассмановые переменные). Действительно, в произведениях грассмановых переменных не должны встречаться одинаковые сомножители, поскольку такие произведения равны нулю. Кроме того, при построении базиса линейного пространства не следует учитывать произведения, отличающиеся порядком сомножителей. Поэтому число парных произведений  $\xi_i \xi_j$  будет равно  $c_n^2$ , число тройных произведений  $\xi_i \xi_j \xi_k$  будет равно  $c_n^3$  и т. д. Учитывая сами грассмановы переменные  $\xi_i$  и единичный элемент  $I$ , найдем размерность  $d$  пространства грассмановых переменных:

$$d = \sum_{k=0}^n c_n^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Произвольную функцию грассмановых переменных  $f(\xi)$  можно, очевидно, представить в виде

$$f(\xi) = f_0 + \sum_{l=1}^n \frac{1}{l!} \sum_{k_1, \dots, k_l=1}^n f_l(k_1, \dots, k_l) \xi_{k_1} \dots \xi_{k_l}, \quad (1.2.1)$$

где  $c$  — числовые функции  $f_l(k_1, \dots, k_l)$  дискретных аргументов  $k_1, \dots, k_l$  ( $k_i = 1, \dots, n$ ) антисимметричны по своим аргументам (число численных значений функций  $f_l(k_1, \dots, k_l)$ ,  $k_i = 1, \dots, n$  ( $l = 0, 1, \dots, n$ ) и равно  $2^n$ ). Функции  $f(\xi) \equiv f^+(\xi)$ , для которых  $f_1 = f_3 = \dots = 0$ , называются четными (они коммутируют со всеми грассмановыми переменными), а функции  $f(\xi) \equiv f^-(\xi)$ , для которых  $f_0 = f_2 = f_4 = \dots = 0$ , — нечетными.

НАУЧНАЯ

ИНВ. Н. ....

В пространстве функций грассмановых переменных можно ввести операции дифференцирования. Операция левого дифференцирования определяется формулой

$$\delta f(\xi) \equiv f(\xi + \delta\xi) - f(\xi) = \sum_{i=1}^n \delta\xi_i \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_i},$$

а операция правого дифференцирования — формулой

$$\delta f(\xi) \equiv f(\xi + \delta\xi) - f(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_i} \delta\xi_i,$$

где  $\{\delta\xi_i, \xi_j\} = 0$  (левую производную мы часто будем обозначать через  $\partial f/\partial \xi \equiv \partial f/\partial \xi$ ). Например,

$$\frac{\partial_l}{\partial \xi_i} \xi_j \xi_k = \delta_{ij} \xi_k - \delta_{ik} \xi_j, \quad \frac{\partial_r}{\partial \xi_i} \xi_j \xi_k = \delta_{ik} \xi_j - \delta_{ij} \xi_k.$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial_l}{\partial \xi_i} f^-(\xi) = \frac{\partial_r}{\partial \xi_i} f^-(\xi), \quad \frac{\partial_l}{\partial \xi_i} f^+(\xi) = -\frac{\partial_r}{\partial \xi_i} f^+(\xi)$$

В пространстве функций грассмановых переменных можно ввести операцию сопряжения (\*), определив ее формулами

$$(f(\xi) + g(\xi))^* = f^*(\xi) + g^*(\xi), \quad (\alpha \xi_1 \dots \xi_l)^* = \alpha^* \xi_l \dots \xi_1.$$

Кроме того, с помощью формулы

$$(f(\xi), g(\xi)) \equiv \sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} \sum_{k_1 \dots k_l=1}^n f^*(k_1, \dots, k_l) g_l(k_1, \dots, k_l) \quad (1.2.2)$$

можно ввести скалярное произведение в пространстве функций грассмановых переменных. Здесь

$$f(\xi) = \sum_{l=1}^n \frac{1}{l!} \sum_{k_1 \dots k_l=1}^n f_l(k_1, \dots, k_l) \xi_{k_1} \dots \xi_{k_l},$$

$$g(\xi) = \sum_{l=1}^n \frac{1}{l!} \sum_{k_1 \dots k_l=1}^n g_l(k_1, \dots, k_l) \xi_{k_1} \dots \xi_{k_l}.$$

Формула (1.2.2) показывает, что величина  $(f, g)$  действительно представляет собой скалярное произведение, причем

$$(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}.$$

Мы не будем вводить понятия интегрирования функций грассмановых переменных (см. гл. 8 и [2]).

Алгебра величин  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $\{\xi_i, \xi_j\} = 0$ ) называется грассмановой алгеброй с конечным числом  $n$ , образующих  $\xi_i$ .

**1.2.2. Гамильтоновы уравнения и скобки Пуассона.** Рассмотрим динамическую систему, характеризуемую  $n$  бозонными (коммутирующими) переменными  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $m$  фермиевскими (антикоммутирующими) переменными  $\xi_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Эти переменные являются функциями времени. Мы хотим, чтобы величины  $x_i(t)$ ,  $\xi_i(t)$  удовлетворяли уравнениям движения первого порядка. В этом случае лагранжиан должен быть линеен по производным

$$L = -\frac{i}{2} \dot{x} B_a x - \frac{i}{2} \dot{\xi} B_s \xi - \mathcal{H}(x, \xi), \quad (1.2.3)$$

где  $B_a, B_s$  — некоторые матрицы и  $\mathcal{H}(x, \xi)$  — некоторая функция переменных  $x, \xi$ . Мы предполагаем, что лагранжиан  $L$  должен быть четной функцией грассмановых переменных. Поэтому и величина  $\mathcal{H}(x, \xi)$ , называемая гамильтонианом системы, должна быть четной функцией  $\xi$ . Так как  $L = L^*$ , то  $B_a^* = -B_a$ ,  $B_s^* = B_s$ . По-видимому, матрицу  $B_s$  можно считать симметричной, а матрицу  $B_a$  — антисимметричной, поскольку антисимметричная часть матрицы  $B_s$  и симметричная часть матрицы  $B_a$  привели бы к слагаемым в  $L$ , представляющим полную производную по времени.

Интеграл действия, соответствующий лагранжиану (1.2.3), определяется формулой

$$W = W_h - \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}(x, \xi), \quad (1.2.4)$$

где

$$W_h = \int_{t_1}^{t_2} dt L_K, \quad L_K = -\frac{i}{2} \dot{x} B_a x - \frac{i}{2} \dot{\xi} B_s \xi.$$

Величины  $L_K, W_K$  называются соответственно кинематическими частями функции Лагранжа  $L$  и действия  $W$  (кинематические части определяют зависимость  $L$  и  $W$  от временных производных  $x, \xi$ ). Для вариации  $W$  имеем

$$\delta W = g_1(t_2) - g_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} dt F_0(t),$$

где

$$g_1(t) = -\frac{i}{2} (\delta x B_a x + \delta \xi B_s \xi), \quad (1.2.5)$$

$$F_0(t) = \delta x \left( i B_a \dot{x} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) + \delta \xi \left( i B_s \dot{\xi} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} \right).$$

Используя принципы стационарного действия, получаем

$$i B_a \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \quad i B_s \dot{\xi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}. \quad (1.2.6)$$

Отметим, что для реального движения системы

$$\delta W = g_1(t_2) - g_1(t_1), \quad g_1(t) = -\frac{i}{2} (\delta x B_a x + \delta \xi B_s \xi). \quad (1.2.7)$$

Считая, что существуют обратные матрицы  $B_a^{-1}$ ,  $B_s^{-1}$  ( $B_a^{-1}$  существует только в случае, если число бозонных переменных четное), имеем

$$\dot{x} = -i B_a^{-1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \quad \dot{\xi} = -i B_s^{-1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}. \quad (1.2.6')$$

Эти уравнения называются уравнениями Гамильтона. Если  $f(x, \xi)$  — произвольная функция динамических переменных  $x, \xi$ , то ее производная по времени равна

$$\dot{f}(x, \xi) = \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi}$$

или, согласно (1.2.6'),

$$\dot{f}(x, \xi) = -i \frac{\partial f}{\partial x} B_a^{-1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} B_s^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

В аналитической динамике принято производную по времени  $\dot{f}$  представлять в виде [3]

$$\dot{f} = \{f; \mathcal{H}\}, \quad (1.2.8)$$

где  $\{f; \mathcal{H}\}$  — скобка Пуассона величин  $f$  и  $\mathcal{H}$ . Мы видим, что скобка Пуассона произвольных величин  $f(x, \xi), g(x, \xi)$  должна определяться формулой

$$\{f; g\} = i \frac{\partial_r g}{\partial \xi} B_s^{-1} \frac{\partial_l f}{\partial \xi} + i \frac{\partial g}{\partial x} B_a^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (1.2.9)$$

Так как  $\mathcal{H}(x, \xi)$  — четный элемент грассмановой алгебры, то  $\frac{\partial_r \mathcal{H}}{\partial \xi} = -\frac{\partial_l \mathcal{H}}{\partial \xi}$  и, следовательно,

$$\{f; \mathcal{H}\} = -i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} B_s^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi} - i \frac{\partial f}{\partial x} B_a^{-1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}.$$

Из (1.2.9) следует, что

$$\{f \cdot \eta; \eta' g\} = \eta' \{f; g\} \eta,$$

где  $\eta, \eta'$  — грассмановы величины, не являющиеся динамическими переменными, но антикоммутирующие между собой и с динамическими переменными  $\xi_i$ .

Из формулы (1.2.9) следует, что скобки Пуассона динамических переменных  $x, \xi$  равны

$$\{x_i; x_j\} = -i (B_a^{-1})_{ij}, \quad \{\xi_i; \xi_j\} = i (B_s^{-1})_{ij}, \quad \{x_i; \xi_j\} = 0. \quad (1.2.10)$$

**1.2.3. Канонические преобразования.** Используя определение скобок Пуассона, легко проверить, что для четных элементов грассмановой алгебры  $f(x; \xi), g(x; \xi), q(x; \xi)$  справедливо тождество Якоби

$$\{g; \{f; q\}\} + \{f; \{q; g\}\} + \{g; \{q; f\}\} = 0 \quad (1.2.11)$$

(полагая  $f = \eta f^-, q = \eta q^-, \dots$ , где  $\{\eta, \xi_i\} \equiv \eta \xi_i + \xi_i \eta = 0$ , можно найти аналогичные тождества и для величин  $g^+, f^-, q^+$  и т. д.).

Введем оператор

$$\Lambda(g) = \frac{\partial g}{\partial x} B_a^{-1} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial \xi} B_s^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (1.2.12)$$

где  $g \equiv g^+$  — четный элемент грассмановой алгебры. Тогда (см. (1.2.9))

$$i \Lambda(g) f = \{f; g\} = -\{g; f\} \quad (1.2.13)$$

(оператор  $\Lambda(g)$  можно назвать операторной скобкой Пуассона).

Рассмотрим далее преобразование

$$x \rightarrow x' = e^{i \Lambda(g)} x, \quad \xi \rightarrow \xi' = e^{i \Lambda(g)} \xi. \quad (1.2.14)$$

Легко видеть, что для произвольной функции  $f(x; \xi)$  переменных  $x, \xi$  справедливо соотношение

$$f(x', \xi') = e^{i \Lambda(g)} f(x, \xi). \quad (1.2.15)$$

Множественно используя тождество Якоби (1.2.11) и соотношение (1.2.13), имеем

$$e^{i \Lambda(g)} \{f; q\} = \{e^{i \Lambda(g)} f; e^{i \Lambda(g)} q\}$$

(эта формула, очевидно, справедлива и в том случае, когда  $f, q$  — производные элементы грассмановой алгебры, так как  $g = g^+$ ). Последнее соотношение, согласно (1.2.15), можно переписать в виде

$$\{f(x', \xi'); q(x', \xi')\}_{x', \xi'} = \{f(x, \xi); q(x, \xi)\}_{x, \xi} \quad (1.2.16)$$

(слева скобка Пуассона вычисляется по переменным  $x', \xi'$ , а справа — по первоначальным переменным  $x, \xi$ ). В частности,

$$\{x'_i; x'_j\} = -i (B_a^{-1})_{ij}, \quad \{\xi'_i; \xi'_j\} = i (B_s^{-1})_{ij}, \quad \{x'_i; \xi'_j\} = 0. \quad (1.2.10')$$

Таким образом, скобки Пуассона оказываются инвариантными относительно преобразований (1.2.14). Преобразования (1.2.14), генерируемые функцией  $g(x; \xi) (\equiv g(x; -\xi))$ , называются каноническими.

Найдем уравнения движения для переменных  $x', \xi'$ . Согласно (1.2.8), имеем

$$x' = \{x'; \mathcal{H}(x, \xi)\}_{x, \xi} = \{e^{i \Lambda(g)} x; e^{i \Lambda(g)} e^{-i \Lambda(g)} \mathcal{H}(x, \xi)\}_{x, \xi},$$

$$\xi' = \{\xi'; \mathcal{H}(x, \xi)\}_{x, \xi} = \{e^{i \Lambda(g)} \xi; e^{i \Lambda(g)} e^{-i \Lambda(g)} \mathcal{H}(x, \xi)\}_{x, \xi}$$

или, учитывая (1.2.16),

$$\dot{x}' = \{x'; \mathcal{H}'(x', \xi')\}_{x', \xi'}, \quad \dot{\xi}' = \{\xi'; \mathcal{H}'(x', \xi')\}_{x', \xi'},$$

где

$$\mathcal{H}'(x, \xi) = e^{-i\Lambda(g)} \mathcal{H}(x, \xi) \quad (1.2.17)$$

(для простоты рассматриваются канонические преобразования, для которых функция  $g(x, \xi)$  не зависит явно от  $t$ ). Таким образом, переменные  $x', \xi'$  удовлетворяют гамильтоновым уравнениям движения с гамильтонианом  $\mathcal{H}'(x', \xi')$ . Заметим, что, согласно (1.2.15),

$$\mathcal{H}'(x', \xi') = \mathcal{H}(x, \xi). \quad (1.2.17')$$

Подчеркнем, что  $\mathcal{H}'(x', \xi') \neq \mathcal{H}(x', \xi')$ . Если  $\mathcal{H}'(x', \xi') = \mathcal{H}(x', \xi')$ , то  $\mathcal{H}(x', \xi') = \mathcal{H}(x, \xi)$  и, следовательно, преобразования (1.2.14) являются преобразованиями симметрии гамильтониана.

Очевидно, что формальное решение уравнений (1.2.6) может быть записано в виде

$$x(t) = e^{it\Lambda(\mathcal{H})} x, \quad \xi(t) = e^{it\Lambda(\mathcal{H})} \xi, \quad (1.2.18)$$

где  $x, \xi$  — начальные значения  $x(t), \xi(t)$ .

В случае бесконечно малых канонических преобразований функция  $g(x, \xi)$  является бесконечно малой и преобразования (1.2.14) принимают вид

$$x \rightarrow x' = x + \delta x(x, \xi), \quad \xi \rightarrow \xi' = \xi + \delta \xi(x, \xi),$$

где

$$\delta x = \{x; g\} = -iB_a^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \delta \xi = \{\xi; g\} = -iB_s^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi}. \quad (1.2.19)$$

Величина  $g$  носит название генератора бесконечно малых канонических преобразований. Если эти преобразования являются преобразованиями симметрии, то  $e^{i\Lambda(g)} \mathcal{H}(x, \xi) = \mathcal{H}(x, \xi)$  и при бесконечно малом  $g$ ,  $\{g, \mathcal{H}\} = 0$ . Таким образом, если бесконечно малое каноническое преобразование является преобразованием симметрии гамильтониана  $\mathcal{H}$ , то генератор  $g$  этих преобразований является интегралом движения.

Покажем, что бесконечно малые канонические преобразования тесно связаны со свойством инвариантности части функции Лагранжа, содержащей временные производные

$$L_K = -\frac{i}{2} (\dot{x} B_a x + \dot{\xi} B_s \xi) \quad (1.2.20)$$

(величина  $L_K$  называется кинематической частью  $L$ ). Пусть  $g$  — генератор бесконечно малого канонического преобразо-

вания (1.2.19), не зависящего явно от  $t$ . Покажем, что вариация  $L_K$  при бесконечно малом каноническом преобразовании (1.2.19) представляет собой полную производную по времени, т. е.

$$\delta L_K = -\frac{d}{dt} g_2, \quad (1.2.21)$$

где

$$g_2 = g - \frac{1}{2} \left( x \frac{\partial g}{\partial x} + \xi \frac{\partial g}{\partial \xi} \right).$$

Действительно, используя определение  $L_K$ , имеем

$$\delta L_K = -\frac{i}{2} \left\{ \frac{d}{dt} (\delta x B_a x + \delta \xi B_s \xi) + 2(\dot{x} B_a \delta x + \dot{\xi} B_s \delta \xi) \right\}$$

или, учитывая (1.2.19),

$$\delta L_K = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( x \frac{\partial g}{\partial x} + \xi \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) - \dot{x} \frac{\partial g}{\partial x} - \dot{\xi} \frac{\partial g}{\partial \xi},$$

откуда и следует соотношение (1.2.21). Заметим, что, согласно (1.2.5),

$$\frac{1}{2} \left( x \frac{\partial g}{\partial x} + \xi \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) = -\frac{i}{2} (\delta x B_a x + \delta \xi B_s \xi) = g_1.$$

Справедливо и обратное утверждение. Именно, если  $\delta x, \delta \xi$  — не зависящие от времени бесконечно малые преобразования динамических переменных такие, что

$$\delta L_K = -\frac{dg_2}{dt}$$

( $g_2$  — некоторая функция  $x, \xi$ ), то эти бесконечно малые преобразования являются каноническими, причем их генератор определяется формулой

$$g = g_2 - \frac{i}{2} (\delta x B_a x + \delta \xi B_s \xi). \quad (1.2.22)$$

Действительно, из (1.2.20), (1.2.21) следует, что

$$\begin{aligned} -\dot{x} \frac{\partial g_2}{\partial x} - \dot{\xi} \frac{\partial g_2}{\partial \xi} &= -\frac{i}{2} \left( \frac{\partial \delta x}{\partial x_j} B_a x + (B_a \delta x)_j \right) \dot{x}_j - \\ &- \frac{i}{2} \dot{x}_j \frac{\partial \delta \xi}{\partial \xi_j} B_s \xi - \frac{i}{2} \dot{\xi}_j \left( \frac{\partial \delta \xi}{\partial \xi_j} B_s \xi + (B_s \delta \xi)_j \right) - \\ &- \frac{i}{2} \dot{\xi}_j \frac{\partial \delta x}{\partial \xi_j} B_a x, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{i}{2} (\delta x B_a x + \delta \xi B_s \xi) + i (B_a \delta x)_j, \\ \frac{\partial g_2}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{i}{2} (\delta \xi B_s \xi + \delta x B_a x) + i (B_s \delta \xi)_j \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\delta x &= -iB_a^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( g_2 - \frac{i}{2} (\delta x B_a x + \delta \xi B_s \xi) \right), \\ \delta \xi &= -iB_s^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( g_2 - \frac{i}{2} (\delta x B_a x + \delta \xi B_s \xi) \right),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Поскольку функция Лагранжа определяется с точностью до полной производной от некоторой функции динамических переменных  $x, \xi$ , то соотношение (1.2.21) мы будем называть условием инвариантности кинематической части функции Лагранжа. Таким образом, если мы нашли бесконечно малое преобразование динамических переменных, оставляющее инвариантной кинематическую часть функции Лагранжа, то это преобразование является каноническим, причем его генератор определяется формулой (1.2.22) (обобщение этого формализма на квантовый случай см. в [4, 5]).

### § 1.3. Гамильтонов формализм для бозонных и фермионных полей

**1.3.1. Грассмановские функции.** Перейдем теперь от механики систем с конечным числом степеней свободы к динамике полей. Как мы уже говорили, фермионные поля в классическом случае описываются антикоммутирующими функциями  $\psi_\alpha(x)$  пространственно-временных переменных

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_{\alpha'}(x')\} = 0 \quad (1.3.1)$$

(роль индекса  $i$  в грассмановых переменных играют теперь величины  $\alpha, x$ ). Эти функции называются грассмановыми функциями. Они определяют грассманову алгебру с бесконечным числом образующих.

Произвольный элемент алгебры с бесконечным числом образующих может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\psi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int d^4x_1 \dots d^4x_l \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \psi_{\alpha_1}(x_1) \dots \psi_{\alpha_l}(x_l) \times \\ &\times f_l(\alpha_1, x_1; \dots; \alpha_l, x_l),\end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где  $f_l(\alpha_1, x_1; \dots; \alpha_l, x_l)$  — произвольные антисимметричные функции переменных  $\alpha_i, x_i$ . Этот элемент представляет собой функционал образующих  $\psi_\alpha(x)$  грассмановой алгебры.

Скалярное произведение элементов алгебры  $F(\psi)$  и  $G(\psi)$  можно определить с помощью формулы

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}, G) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int d^4x_1 \dots d^4x_l \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_l} f_l(\alpha_1, x_1; \dots; \alpha_l, x_l) g_l \times \\ &\times (\alpha_1, x_1; \dots; \alpha_l, x_l).\end{aligned}$$

В частности,

$$(\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')) = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x').$$

Операция сопряжения вводится аналогично (1.2.2) (считая, что  $\psi_\alpha^*(x) = \psi_\alpha(x)$ ). Например,

$$(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(x'))^* = \psi_\beta(x') \psi_\alpha(x).$$

Если мы имеем функционал грассмановых функций  $\mathcal{F}(\psi)$ , то операция левого функционального дифференцирования определяется формулой

$$\delta \mathcal{F}(\psi) \equiv \mathcal{F}(\psi + \delta\psi) - \mathcal{F}(\psi) = \int d^4x \sum_{\alpha} \delta\psi_\alpha(x) \frac{\delta_r \mathcal{F}(\psi)}{\delta \psi_\alpha(x)}, \quad (1.3.3)$$

а операция правого функционального дифференцирования — формулой

$$\delta \mathcal{F}(\psi) \equiv \mathcal{F}(\psi + \delta\psi) - \mathcal{F}(\psi) = \int d^4x \sum_{\alpha} \frac{\delta_r \mathcal{F}(\psi)}{\delta \psi_\alpha(x)} \delta \psi_\alpha(x), \quad (1.3.4)$$

где  $\{\delta\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = 0$  (левую функциональную производную мы будем обозначать также символом  $\delta/\delta\psi$ ). Например,

$$\begin{aligned}\frac{\delta \psi_\beta(x')}{\delta \psi_\alpha(x)} &= \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x'), \quad \frac{\delta \psi_\beta(x') \psi_\gamma(x'')}{\delta \psi_\alpha(x)} = \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x') \psi_\gamma(x'') - \\ &- \delta_{\alpha\gamma} \delta(x - x'') \psi_\beta(x').\end{aligned}$$

В этом разделе понятия функционального интегрирования по грассмановым функциям (см. [2, 6]) не вводятся.

**1.3.2. Лагранжиан бозонных и фермионных полей в случае уравнений первого порядка.** В § 1.1 мы не конкретизировали зависимости лагранжиана от производных  $\partial_\mu \psi_i$ . При этом уравнения поля будут уравнениями второго порядка. Однако эти уравнения всегда могут быть сведены к уравнениям первого порядка. Такое сведение соответствует переходу к гамильтонову формализму в теории поля. Для этого можно воспользоваться методом, применяемым в классической механике при переходе от уравнений Лагранжа к уравнениям Гамильтона, т. е. ввести наряду с компонентами поля  $\varphi_i(x)$  соответствующие им обобщенные импульсы  $\pi_i(x) = \delta \mathcal{L} / \delta \dot{\varphi}_i(x)$

Однако такая процедура не является релятивистски инвариантной и мы не будем ее рассматривать.

Релятивистски инвариантный формализм можно получить, если рассматривать наряду с компонентами поля  $\varphi_i(x)$  ковариантные переменные  $\varphi_{i\mu} \equiv \partial_\mu \varphi_i$ . Компоненты  $\varphi_i, \varphi_{i\mu}$ , удовлетворяющие уравнениям первого порядка, мы будем в дальнейшем обозначать через  $\chi_i(x)$ . При этом можно с самого начала предполагать, что лагранжиан имеет такую структуру, которая сразу приводит к уравнениям поля первого порядка, т. е. считать, что  $\mathcal{L}$  содержит величины  $\partial_\mu \chi_i$  линейно,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\chi, \partial\chi) - U(\chi), \quad \mathcal{L}_0(\chi, \partial\chi) = -\frac{i}{2} \partial_\mu \chi B^\mu \chi, \quad (1.3.5)$$

где  $U(\chi)$  — некоторая локальная функция  $\chi(x)$  и  $B^\mu$  матрицы, действующие на индекс поля и не зависящие от  $\chi$ . (При таком определении  $\mathcal{L}_0$  коэффициенты в уравнениях поля при  $\partial_\mu \chi$  будут постоянными). Поле  $\chi$  для определенности будем считать вещественным,  $\chi = \chi^*$  (комплексное поле можно всегда свести к вещественному полю, удвоив число компонент поля). Такой подход аналогичен подходу, развитому в разделе 1.2.2 для систем с конечным числом степеней свободы.

Поля  $\chi(x)$  в общем случае включают в себя бозонные поля  $\varphi_\alpha(x) \equiv \varphi_\alpha^*(x)$  и фермионные поля  $\psi_\alpha(x) \equiv \psi_\alpha^*(x)$  (напомним, что операция  $*$  для фермионных полей определяется формулой  $(\lambda\psi_1 \dots \psi_n)^* = \lambda^* \psi_n \dots \psi_1$ ,  $\chi \equiv (\varphi, \psi)$ ). В соответствии с этим мы представим матрицу  $B^\mu$  в виде

$$B^\mu = \begin{pmatrix} B_a^\mu & 0 \\ 0 & B_s^\mu \end{pmatrix}, \quad (1.3.6)$$

так что [7]

$$\mathcal{L}_0(\chi, \partial\chi) = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \varphi B_a^\mu \varphi + \partial_\mu \psi B_s^\mu \psi). \quad (1.3.7)$$

Матрицу  $B_a^\mu$  можно считать антисимметричной (симметричная часть приводила бы в лагранжиане к слагаемому, имеющему вид 4-дивергенции), а матрицу  $B_s^\mu$  — симметричной (антисимметричная часть приводила бы в лагранжиане к слагаемому, имеющему вид 4-дивергенции). Поскольку  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^*$  и поля являются вещественными, то

$$B_a^{\mu*} = -B_a^\mu, \quad B_s^{\mu*} = B_s^\mu \quad (1.3.8)$$

и, следовательно, матрицы  $B_a^\mu, B_s^\mu$  — эрмитовыми. Найдем теперь общую вариацию действия

$$W(\chi; \sigma_1, \sigma_2) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}(\chi, \partial_\mu \chi), \quad (1.3.9)$$

где лагранжиан  $\mathcal{L}$  определяется формулой (1.3.5). Как и в § 1, вариация действия, связанная с варьированием пространственноподобных поверхностей  $\sigma_1, \sigma_2$ , определяется формулой

$$\delta_\sigma W = \int_{\sigma_2} d\sigma_\lambda \delta x^\lambda \mathcal{L} - \int_{\sigma_1} d\sigma_\lambda \delta x^\lambda \mathcal{L}.$$

Вариацию  $W$ , связанную с варьированием функций поля  $\chi(x)$ , можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta_\chi W &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \{ \mathcal{L}_0(\delta\chi, \partial_\mu \chi) + \mathcal{L}_0(\chi, \partial_\lambda \delta_\mu^\lambda \delta\chi) - \delta U \} = \\ &= \int_{\sigma_2} d\sigma_\lambda \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\mu^\lambda \delta\chi) - \int_{\sigma_1} d\sigma_\lambda \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\mu^\lambda \delta\chi) + \\ &+ \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \{ \mathcal{L}_0(\delta\chi, \partial_\mu \chi) - \mathcal{L}_0(\partial_\lambda \chi, \delta_\mu^\lambda \delta\chi) - \delta U \} \end{aligned}$$

(в этих формулах  $\mu$  — немой индекс). Замечая, что, согласно (1.3.7),  $\mathcal{L}_0(\partial_\lambda \chi, \delta_\mu^\lambda \delta\chi) = -\mathcal{L}_0(\delta\chi, \partial_\mu \chi)$ , для полной вариации действия  $\delta W = \delta_\sigma W + \delta_\chi W$  имеем

$$\delta W = G(\sigma_2) - G(\sigma_1) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{F}(x), \quad (1.3.10)$$

где

$$G(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\lambda \{ \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\mu^\lambda \delta\chi) + \mathcal{L} \delta x^\lambda \}, \quad (1.3.10')$$

$$\mathcal{F}(x) = 2\mathcal{L}_0(\delta\chi, \partial_\mu \chi) - \delta U.$$

Согласно принципу стационарного действия, уравнения поля должны получаться из соотношения

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{F}(x) = 0. \quad (1.3.11)$$

Отсюда, смещая вариации налево, получаем уравнения движения

$$iB^\mu \partial_\mu \chi - \frac{\partial U}{\partial \chi} = 0 \quad (1.3.12)$$

или уравнения

$$iB_a^\mu \partial_\mu \varphi - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.3.13)$$

для бозонных полей и уравнения

$$iB_s^\mu \partial_\mu \psi - \frac{\partial U}{\partial \psi} = 0 \quad (1.3.13')$$

для фермионных полей. Эти уравнения движения были получены исходя из вариационного принципа, в котором мы смещали вариации ферми полей  $\delta\psi$  влево. Но вариации  $\delta\psi$  можно было бы смещать и направо. При этом в общем случае получились бы другие уравнения поля. Для совпадения уравнений поля в обоих случаях необходимо считать функцию  $U(\chi)$  четной функцией компонент фермионных полей

$$U(\varphi, \psi) = U(\varphi, -\psi).$$

Чтобы изучить эволюцию поля, необходимо из уравнений (1.3.12) найти  $\partial_0 \chi$ . Однако матрицы  $B_a^0$ ,  $B_s^0$  могут не иметь обратных, т. е.  $\det B_a^0 = 0$ ,  $\det B_s^0 = 0$ , и в этом случае величины  $\partial_0 \chi$  нельзя выразить через  $\chi$  и  $\partial_k \chi$ . Физический смысл этой ситуации заключается в том, что не все компоненты поля являются динамически независимыми. Для выделения динамически независимых компонент заметим, что матрица  $B_a^0$  антисимметрична, а матрица  $B_s^0$  симметрична. Поэтому с помощью ортогонального преобразования  $V_a$ ,  $V_a \tilde{V}_a = 1$  матрицу  $B_a^0$  можно привести к виду

$$\tilde{V}_a B_a^0 V_a = \bar{B}_a^0, \quad \bar{B}_a^0 = \begin{bmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_p & & \\ 0 & & & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.3.14)$$

где  $a_k$  — двухрядные матрицы

$$a_k = \lambda_k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, p$$

(это связано с тем, что антисимметричная матрица в вещественном евклидовом пространстве имеет только одномерные и двумерные инвариантные подпространства; одномерные подпространства антисимметричной матрицы могут принадлежать только собственному значению нуль). Симметричную матрицу  $B_s^0$  с помощью ортогонального преобразования  $V_s$ ,

$V_s \tilde{V}_s = 1$  можно привести к диагональному виду

$$\tilde{V}_s B_s^0 V_s = \bar{B}_s^0, \quad \bar{B}_s^0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_q & & \\ 0 & & & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3.15)$$

Введем далее вместо полей  $\varphi$ ,  $\psi$  поля  $\bar{\varphi} = \tilde{V}_a \varphi$ ,  $\bar{\psi} = \tilde{V}_s \psi$ . Тогда лагранжиан (1.3.5) в новых переменных примет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\varphi} B_a^\mu \bar{\varphi} + \partial_\mu \bar{\psi} B_s^\mu \bar{\psi}) - U(V_a \bar{\varphi}, V_s \bar{\psi}),$$

$$\bar{B}_{s,a}^\mu = \bar{V}_{s,a} B_{s,a}^\mu V_{s,a}$$

а уравнения поля (1.3.13), (1.3.13') — вид

$$i \bar{B}_a^0 \partial_0 \bar{\varphi} = -i \bar{B}_a^k \partial_k \bar{\varphi} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}},$$

$$i \bar{B}_s^0 \partial_0 \bar{\psi} = -i \bar{B}_s^k \partial_k \bar{\psi} + \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}}.$$

Учитывая далее (1.3.14), (1.3.15), перепишем последние уравнения для бозе-полей в виде

$$i (\bar{B}_a^0)_{\alpha\beta} \partial_0 \bar{\varphi}_\beta = -i (\bar{B}_a^k \partial_k \bar{\varphi})_\alpha + \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 2p; \quad (1.3.16)$$

$$-i (\bar{B}_a^k \partial_k \bar{\varphi})_s + \frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}_s} = 0, \quad s = 2p+1, \dots, \quad (1.3.17)$$

а уравнения для ферми-полей в виде

$$i (\bar{B}_s^0)_{\alpha\beta} \partial_0 \bar{\psi}_\beta = -i (\bar{B}_s^k \partial_k \bar{\psi})_\alpha + \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, q; \quad (1.3.16')$$

$$-i (\bar{B}_s^k \partial_k \bar{\psi})_s + \frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}_s} = 0, \quad s = q+1, \dots, \quad (1.3.17')$$

где индексами  $\alpha$  и  $\beta$  нумеруются ненулевые строки и столбцы матриц  $\bar{B}_a^0$ ,  $\bar{B}_s^0$ , а индексом  $s$  — остальные строки и столбцы.

Так как матрицы  $(\bar{B}_a^0)_{\alpha\beta}$ ,  $(\bar{B}_s^0)_{\alpha\beta}$  имеют обратные, то уравнения (1.3.16), (1.3.16'), определяющие изменения со временем величин  $\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\bar{\psi}_\alpha$ , представляют собой собственно уравнения поля; величины  $\bar{\varphi}_s$ ,  $\bar{\psi}_s$ , являющиеся динамически независимыми



(их можно задавать произвольно в начальный момент времени), называются в этой связи динамически независимыми компонентами поля. Мы видим, что число динамически независимых компонент бозе-поля всегда четное. Уравнения (1.3.17), (1.3.17') представляют собой уравнения связи, с помощью которых компоненты поля  $\bar{\varphi}_s, \psi_s$  могут быть выражены через динамически независимые переменные  $\bar{\varphi}_\alpha, \bar{\psi}_\alpha$  и их пространственные производные.

**1.3.3. Релятивистская инвариантность уравнений поля первого порядка.** В § 1.1 мы уже говорили о релятивистской инвариантности лагранжиана и уравнений поля. Теперь мы рассмотрим релятивистскую инвариантность уравнений поля первого порядка (1.3.12) и выясним требования, накладываемые релятивистской инвариантностью на матрицы  $B^\mu$  и функцию  $U$ .

Лагранжиан  $\mathcal{L}$ , а также величины  $\mathcal{L}_0$  и  $U$  должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца  $x \rightarrow x' = ax$ , при которых функции поля испытывают преобразования (1.1.12)

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x') = S(a)\chi(x), \quad S^*(a) = S(a) \quad (1.3.18)$$

(звездочка служит для обозначения комплексного сопряжения). Инвариантность  $\mathcal{L}_0$  означает, что

$$\partial'_\mu \chi'(x') B^\mu \chi'(x') = \partial_\mu \chi(x) B^\mu \chi(x).$$

Замечая, что  $\partial'_\mu \chi'(x') = \partial_\mu x^\lambda S(a) \partial_\lambda \chi(x)$  и  $\partial_\lambda x'^\mu = a^\mu_\lambda$ , имеем

$$\tilde{S}(a) B^\mu S(a) = a^\mu_\lambda B^\lambda. \quad (1.3.19)$$

В случае бесконечно малого преобразования Лоренца  $a^\mu_\lambda = \delta^\mu_\lambda + \varepsilon^\mu_\lambda$ ,  $S(a) = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}$  (см. (1.1.14)), следовательно,

$$B^\mu \Sigma_{\lambda\rho} + \tilde{\Sigma}_{\lambda\rho} B^\mu = i(\delta^\mu_\lambda B_\rho - \delta^\mu_\rho B_\lambda). \quad (1.3.20)$$

Эта формула показывает, что матрицы  $B^\mu$  не могут быть выбраны произвольно. Действительно, полагая  $\rho = k$ ,  $\mu = \lambda = 0$ , имеем

$$B_k = -i(\tilde{\Sigma}_{0k} B^0 + B^0 \Sigma_{0k}). \quad (1.3.21)$$

Таким образом, пространственные компоненты матриц  $B^\mu$  полностью определяются временной компонентой  $B^0$  (неприводимые представления матриц  $\Sigma_{\mu\nu}$  находятся из (1.1.33)).

Отметим также соотношение

$$B^0 \Sigma_{ik} + \tilde{\Sigma}_{ik} B^0 = 0, \quad (1.3.21')$$

которое вытекает из (1.3.20), если положить  $\mu = 0$ ,  $\lambda = i$ ,  $\rho = k$ .

В случае свободных полей величина  $U$  квадратична относительно функций поля

$$U(\chi) = \frac{1}{2} \chi \mathcal{E} \chi, \quad (1.3.22)$$

где  $\mathcal{E}$  — матрица, действующая на индекс поля. В представлении (1.3.6)

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_s & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_a \end{pmatrix} \quad (1.3.23)$$

и, следовательно,

$$U(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \varphi \mathcal{E}_s \varphi + \frac{1}{2} \psi \mathcal{E}_a \psi, \quad (1.3.22')$$

причем

$$\mathcal{E}_s^* = \mathcal{E}_s = \tilde{\mathcal{E}}_s, \quad \mathcal{E}_a^* = -\mathcal{E}_a = \tilde{\mathcal{E}}_a.$$

Из требования инвариантности  $U(\chi)$  относительно преобразований Лоренца

$$U(\chi(x)) = U(\chi'(x'))$$

следует, что матрица  $\mathcal{E}$  должна удовлетворять соотношению

$$S(a) \mathcal{E} S(a) = \mathcal{E} \quad (1.3.23)$$

или

$$\Sigma_{\mu\nu} \mathcal{E} + \mathcal{E} \Sigma_{\mu\nu} = 0.$$

В представлении (1.3.6) матрицы  $\Sigma_{\mu\nu}$  также имеют блочную структуру

$$\Sigma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\mu\nu}^\varphi & 0 \\ 0 & \Sigma_{\mu\nu}^\psi \end{pmatrix}. \quad (1.3.24)$$

Вернемся теперь к уравнениям связи (1.3.17), (1.3.17'). Для нахождения из этих уравнений динамически зависимых переменных  $\bar{\varphi}_s, \psi_s$  в терминах динамически независимых переменных  $\bar{\varphi}_\alpha, \bar{\psi}_\alpha$  необходимо в принципе решать дифференциальные уравнения по пространственной переменной  $x^i$ . Покажем, что соотношения (1.3.21), вытекающие из релятивистской инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}_0$ , позволяют упростить уравнения связей (1.3.17), (1.3.17'), в результате чего уравнения для определения  $\bar{\varphi}_s, \bar{\psi}_s$  будут алгебраическими, а не дифференциальными. Необходимо отметить, что, согласно (1.3.21),

$$B^i = -ig^{is} (B^0 \Sigma_{0s} + \tilde{\Sigma}_{0s} B^0).$$

Поэтому, используя (1.3.6), имеем

$$(\bar{B}'_a)_{sj} = -ig^{ik} (\bar{\Sigma}_{0k}^{\varphi} \bar{B}'_a)_{sj}, \quad s = 2p + 1, \dots,$$

$$(\bar{B}'_s)_{aj} = -ig^{ik} (\bar{\Sigma}_{0k}^{\psi} \bar{B}'_s)_{aj}, \quad a = q + 1, \dots,$$

где  $\bar{\Sigma}_{\mu\nu}^{\varphi} = \bar{V}_a \Sigma_{\mu\nu}^{\varphi} V_a$ ,  $\bar{\Sigma}_{\mu\nu}^{\psi} = \bar{V}_s \Sigma_{\mu\nu}^{\psi} V_s$ . Подставляя полученные выражения для  $\bar{B}'_{a,s}$  в уравнения связей (1.3.17), (1.3.17'), находим

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{\varphi}_s} = -g^{ik} \partial_i \bar{\varphi}_\alpha (\bar{B}'_a \bar{\Sigma}_{0k}^{\varphi})_{\alpha s}, \quad s = 2p + 1, \dots, \quad (1.3.25)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{\psi}_a} = g^{ik} \partial_i \bar{\psi}_\alpha (\bar{B}'_s \bar{\Sigma}_{0k}^{\psi})_{\alpha a}, \quad a = q + 1, \dots.$$

Эти уравнения являются алгебраическими (а не дифференциальными) относительно  $\bar{\varphi}_s$ ,  $\bar{\psi}_a$ , и с их помощью компоненты поля  $\bar{\varphi}_s$ ,  $\bar{\psi}_a$  могут быть выражены через динамически независимые переменные  $\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\bar{\psi}_\alpha$  и их пространственные производные  $\partial_k \bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\partial_k \bar{\psi}_\alpha$ .

Возможны, однако, такие ситуации, когда не все уравнения связей являются независимыми (это имеет место при наличии калибровочной инвариантности; см. § 4.1). При этом некоторые из компонент поля  $\bar{\varphi}$ , не могут быть выражены через  $\bar{\varphi}_\alpha$ . Этот вопрос рассматривается в главе 4.

**1.3.4. Гамильтоновы уравнения поля и скобки Пуассона.** В этом разделе мы приведем уравнения (1.3.12) к гамильтоновой форме и введем фундаментальное понятие скобок Пуассона.

Интеграл действия запишем в виде

$$W = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}(x) \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(t), \quad L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(x),$$

где  $\mathcal{L}(x)$  определяется формулой (1.3.5). Учитывая линейность  $\mathcal{L}_0(x, \partial_\xi x)$  по второму аргументу, представляем  $\mathcal{L}_0(x, \partial_\xi x)$  в виде

$$\mathcal{L}_0(x, \partial_\xi x) = \mathcal{L}_0(x, \delta_\xi^0 \partial_0 x) + \mathcal{L}_0(x, \delta_\xi^k \partial_k x).$$

Оператор  $\mathcal{L}_0(x, \delta_\xi^0 \partial_0 x)$  мы будем называть кинематической частью лагранжиана  $\mathcal{L}(x, \partial_\xi x)$ . Учитывая (1.3.5), действие  $W$  можно представить в виде

$$W = W_R - \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}, \quad (1.3.26)$$

где

$$W_R = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}_0(x, \delta_\mu^0 \partial_0 x), \quad (1.3.27)$$

$$\mathcal{H} = \int d^3x (-\mathcal{L}_0(x, \delta_\mu^k \partial_k x) + U(x)).$$

Величину  $W_R$  мы будем называть кинематической, а величину  $-\int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}$  — динамической частью действия, функционал  $\mathcal{H}$  — гамильтонианом системы полей. Используя теорему Гаусса (1.1.2), вариацию полного действия (1.3.26) можно записать в виде

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{F}_0(x). \quad (1.3.28)$$

где

$$G_1(t) = \int d^3x \mathcal{L}_0(x, \delta_\xi^0 \delta x), \quad (1.3.29)$$

$$\mathcal{F}_0(x) = \delta \mathcal{L}_0(x, \partial_\xi x) - \partial_\nu \mathcal{L}_0(x, \delta_\xi^\nu \delta x) - \delta U$$

(величина  $\mathcal{L}_0(x, \delta_\xi^\nu \delta x)$  получается из  $\mathcal{L}_0(x, \partial_\xi x)$  путем замены  $\partial_\xi x \rightarrow \delta_\xi^\nu \delta x$ ). Заметим, что по определению  $\mathcal{F}_0(x)$  не зависит от производных вариаций поля  $\partial_\mu \delta x$ .

Согласно (1.3.7), величину  $\mathcal{F}_0(x)$  также можно представить в виде

$$\mathcal{F}_0(x) = \delta \varphi(x) \left( iB_a^0 \partial_0 \varphi - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi(x)} \right) + \delta \psi(x) \left( iB_s^0 \partial_0 \psi - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi(x)} \right).$$

Поэтому, используя принцип стационарного действия, имеем

$$iB_a^0 \partial_0 \varphi = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi(x)}, \quad iB_s^0 \partial_0 \psi = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi(x)}. \quad (1.3.30)$$

Эти уравнения, в соответствии с разделом 1.3.2 эквивалентны собственно уравнениям поля

$$i(\bar{B}'_a)_{\alpha\beta} \partial_0 \bar{\varphi}_\beta = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_\alpha(x)}, \quad i(\bar{B}'_s)_{\alpha\beta} \partial_0 \bar{\psi}_\beta = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_\alpha(x)} \quad (1.3.31)$$

и уравнениям связи

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_a(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_a(x)} = 0 \quad (1.3.32)$$

(сравним с уравнениями (1.3.16), (1.3.17)).

Для реального движения системы

$$\delta W = G_1(t_2) - G_1(t_1), \quad G_1(t) = \int d^3x \mathcal{L}_0(x, \delta_\xi^0 \delta x). \quad (1.3.33)$$

Так как матрицы  $(\bar{B}_a^0)_{\alpha\beta}$  и  $(\bar{B}_s^0)_{\alpha\beta}$  имеют обратные, то уравнения поля можно представить в гамильтоновой форме

$$\partial_0 \bar{\varphi}_\alpha = -i (\bar{B}_a^0)^{-1}_{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\varphi}_\beta(x)}, \quad \partial_0 \bar{\psi}_\alpha = -i (\bar{B}_s^0)^{-1}_{\alpha\beta} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \bar{\psi}_\beta(x)}, \quad (1.3.31')$$

причем при дифференцировании по  $\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\bar{\psi}_\alpha$  следует предварительно выразить с помощью уравнений связи величины  $\varphi_\alpha$ ,  $\psi_\alpha$  через динамически независимые компоненты  $\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\bar{\psi}_\alpha$ . Эти уравнения, очевидно, эквивалентны уравнениям (1.3.31).

Если  $\mathcal{F}$  представляет собой произвольный функционал полей  $\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\bar{\psi}_\alpha$ , рассматриваемых как функции  $x^k$  ( $t$  — параметр), то

$$\partial_0 \mathcal{F} \equiv \dot{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}; \mathcal{H}\}, \quad (1.3.34)$$

где скобка Пуассона динамических переменных  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  определяется формулой

$$\{\mathcal{F}; \mathcal{G}\} = i \int d^3x \left( \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\varphi}(x)} \bar{B}_a^0{}^{-1} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \bar{\varphi}(x)} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\psi}(x)} \bar{B}_s^0{}^{-1} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \bar{\psi}(x)} \right), \quad (1.3.35)$$

Мы видим, что эта формула находится в соответствии с формулой (1.2.9), причем вместо обычных производных в это выражение входят функциональные производные. В частности, скобки Пуассона бозонных и фермионных полей равны

$$\begin{aligned} \{\bar{\varphi}_\alpha(x); \bar{\varphi}_\beta(x')\}_{t=t'} &= -i (\bar{B}_a^0)^{-1}_{\alpha\beta} \delta(x-x'), \\ \{\bar{\varphi}_\alpha(x); \bar{\psi}_\beta(x')\}_{t=t'} &= 0, \\ \{\bar{\psi}_\alpha(x); \bar{\psi}_\beta(x')\}_{t=t'} &= i (\bar{B}_s^0)^{-1}_{\alpha\beta} \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

В разделе 1.2.3 мы рассматривали канонические преобразования для динамических переменных  $x$ ,  $\xi$ . Но можно также ввести канонические преобразования для полей  $\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\bar{\psi}_\alpha$ . Мы рассмотрим здесь только бесконечно малые канонические преобразования полей. Пусть  $G$  — некоторый бесконечно малый функционал динамически независимых компонент поля  $\bar{\varphi}_\alpha(x)$ ,  $\bar{\psi}_\alpha(x)$ , рассматриваемых как функции  $\alpha$ ,  $x$  ( $t$  — параметр). Тогда бесконечно малые преобразования

$$\bar{\varphi}_\alpha \rightarrow \bar{\varphi}'_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha + \delta \bar{\varphi}_\alpha, \quad \bar{\psi}_\alpha \rightarrow \bar{\psi}'_\alpha = \bar{\psi}_\alpha + \delta \bar{\psi}_\alpha \quad (1.3.37)$$

( $\delta \bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\delta \bar{\psi}_\alpha$  — бесконечно малые функционалы  $\bar{\varphi}_\beta$ ,  $\bar{\psi}_\beta$ ) называются каноническими, если

$$\begin{aligned} \delta \bar{\varphi}_\alpha &= \{\bar{\varphi}_\alpha; G\} = -i (\bar{B}_a^0)^{-1}_{\alpha\beta} \frac{\delta G}{\delta \bar{\varphi}_\beta(x)}, \\ \delta \bar{\psi}_\alpha(x) &= \{\bar{\psi}_\alpha; G\} = -i (\bar{B}_s^0)^{-1}_{\alpha\beta} \frac{\delta G}{\delta \bar{\psi}_\beta}, \end{aligned} \quad (1.3.37')$$

где скобка Пуассона определяется формулой (1.3.35). Эти преобразования оставляют инвариантной кинематическую часть функции Лагранжа полей

$$L_K = -\frac{i}{2} \int d^3x (\partial_0 \bar{\varphi} \bar{B}_a^0 \bar{\varphi} + \partial_0 \bar{\psi} \bar{B}_s^0 \bar{\psi}), \quad (1.3.38)$$

т. е.

$$\delta L_K = -\frac{\partial G_2}{\partial t}, \quad (1.3.38')$$

где  $G_2$  — некоторый функционал полей  $\bar{\varphi}_\alpha(x, t)$ ,  $\bar{\psi}_\alpha(x, t)$  (предполагается, что преобразования (1.3.37) не зависят явно от  $t$ ). Справедливо и обратное утверждение: если преобразование (1.3.37) удовлетворяет соотношению (1.3.38'), то это преобразование является каноническим, причем его генератор определяется формулой

$$G = G_1 + G_2, \quad (1.3.39)$$

где

$$G_1 = -\frac{i}{2} \int d^3x (\delta \bar{\varphi}(x) \bar{B}_a^0 \bar{\varphi}(x) + \delta \bar{\psi}(x) \bar{B}_s^0 \bar{\psi}(x)).$$

Рассмотрим пример. Пусть  $\delta \bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\delta \bar{\psi}_\alpha$  — вариации динамически независимых компонент поля, которые являются произвольными функциями  $x$  и не зависят от полей  $\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\bar{\psi}_\alpha$ . Легко видеть, что эти вариации оставляют инвариантной кинематическую часть функции Лагранжа

$$\delta L_K = -\frac{\partial G_2}{\partial t},$$

где

$$G_2 = \frac{i}{2} \int d^3x (\bar{\varphi} \bar{B}_a^0 \delta \bar{\varphi} + \bar{\psi} \bar{B}_s^0 \delta \bar{\psi}).$$

Таким образом, генератор рассматриваемых вариаций, согласно (1.3.39), имеет вид

$$G = i \int d^3x (\bar{\varphi} \bar{B}_a^0 \delta \bar{\varphi} + \bar{\psi} \bar{B}_s^0 \delta \bar{\psi}). \quad (1.3.40)$$

Вариации, оставляющие инвариантной кинематическую часть функции Лагранжа, определяют бесконечно малое канониче-

ское преобразование, генератором которого является величина  $G$

$$\overline{\delta\varphi_\alpha} = \{\overline{\varphi_\alpha}; G\}, \quad \delta\overline{\varphi_\alpha} = \{\overline{\varphi_\alpha}; G\}.$$

Подставив в эти формулы выражение (1.3.40) и заметив, что  $\overline{\delta\varphi}$ ,  $\delta\overline{\varphi}$  — произвольные функции  $x$ , мы приходим к формулам (1.3.36), определяющим скобки Пуассона величин  $\varphi$ ,  $\overline{\varphi}$ . Обратим внимание на то, что генератор произвольных канонических преобразований  $G$  строится из двух слагаемых  $G = G_1 + G_2$ , где величина  $G_1$  определяется вариацией действия для реального движения динамических переменных (см. (1.3.33)), а величина  $G_2$  определяет изменение функции Лагранжа при бесконечно малом каноническом преобразовании, имеющее вид временной производной (см. (1.3.38')). Доказательство сделанных утверждений аналогично доказательству соответствующих утверждений для систем с конечным числом степеней свободы (см. § 1.2).

#### § 1.4. Свойства симметрии полей и законы сохранения

1.4.1. Законы сохранения, связанные с внутренними и пространственно-временными симметриями. В § 1.1 обсуждался вопрос о связи законов сохранения со свойствами симметрии функционала действия. Мы видели, что для бесконечно малых преобразований симметрии вариация действия  $W$  обращается в нуль (см. (1.3.10))

$$G(\sigma_2) - G(\sigma_1) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x \mathcal{L}(x) = 0. \quad (1.4.1)$$

Это соотношение справедливо при любой зависимости функций поля от  $x^\mu$ , лишь бы вариации  $\delta\chi$  и  $\delta x^\lambda$  соответствовали преобразованиям симметрии действия. Пусть теперь вариация действия происходит около функций поля, удовлетворяющих принципу стационарности действия. Тогда в силу (1.3.11) соотношение (1.4.1) принимает вид

$$G(\sigma_2) = G(\sigma_1), \quad (1.4.2)$$

где

$$G(\sigma) = \int_\sigma d\sigma_\lambda (\mathcal{L} \delta x^\lambda + \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\mu^\lambda \delta\chi)).$$

Поэтому, если в качестве  $\sigma$  выбрать гиперплоскость, ортогональную оси времени, то величина  $G(\sigma) \equiv G(t)$  будет интегралом движения.

Рассмотрим сперва законы сохранения, связанные с инвариантностью действия относительно преобразований внутрен-

ней симметрии. Для бесконечно малых преобразований внутренней симметрии

$$\delta x^\lambda = 0, \quad \delta\chi = -ie^a T_a \chi \quad (1.4.3)$$

(см. (1.1.25)). Поэтому

$$G(\sigma) = \varepsilon^a \int_\sigma d\sigma_\mu \mathcal{F}_a^\mu, \quad (1.4.4)$$

где

$$\mathcal{F}_a^\mu = -i\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\lambda^\mu T_a \chi).$$

Величина  $G(\sigma)$  не зависит от вида поверхности  $\sigma$ . Поэтому величины

$$Q_a = \int_\sigma d\sigma_\mu \mathcal{F}_a^\mu = \int d^3x \mathcal{F}_a^0 \quad (1.4.5)$$

не зависят от времени. Они называются обобщенными зарядами, связанными с группой внутренней симметрии. Величины  $\mathcal{F}_a^\mu$  удовлетворяют законам сохранения

$$\partial_\mu \mathcal{F}_a^\mu = 0 \quad (1.4.6)$$

и называются обобщенными токами.

Рассмотрим теперь законы сохранения, связанные с инвариантностью действия относительно 4-смещений и 4-поворотов. Преобразования симметрии в этом случае, согласно (1.1.17), (1.3.18), имеют вид

$$\delta x^\mu = \varepsilon^\mu + \varepsilon^\mu_\nu x^\nu, \quad (1.4.7)$$

$$\delta\chi = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \chi - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \{\Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\} \chi.$$

Подставляя (1.4.7) в (1.3.10'), получаем

$$G(\sigma) = -\varepsilon_\mu P^\mu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \quad (1.4.8)$$

где

$$P^\mu = \int_\sigma d\sigma_\nu T^{\mu\nu}, \quad M^{\mu\nu} = \int_\sigma d\sigma_\rho M^{\mu\nu\rho}$$

и

$$T^{\mu\nu} = -\mathcal{L} g^{\mu\nu} + \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\lambda^\nu \partial^\mu \chi), \quad (1.4.9)$$

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho} - i\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\lambda^\rho \Sigma^{\mu\nu\lambda}).$$

Величины  $P^\mu$  (вектор энергии-импульса) и  $M^{\mu\nu}$  (тензор момента количества движения) не зависят от времени. Тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  и тензор плотностей момента количества движения  $M^{\mu\nu\rho}$  удовлетворяют дифференциальным законам

охранения

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\rho M^{\mu\nu\rho} = 0. \quad (1.4.10)$$

Из (1.4.9), (1.3.27) следует, что гамильтониан полей совпадает с  $\int d^3x T^{00}$ ,

$$\mathcal{H} = \int d^3x T^{00}. \quad (1.4.11)$$

**1.4.2. Генераторы преобразований внутренних и пространственно-временных симметрий.** В этом разделе мы покажем, что рассмотренные нами преобразования симметрии являются каноническими преобразованиями, найдем генераторы этих канонических преобразований и изучим их свойства.

Переходя к рассмотрению преобразований внутренней симметрии, заметим, что вариации

$$\delta\chi(x) = -ie^a(x) T_a \chi(x) \quad (1.4.12)$$

(сравним с формулой (1.4.3)) являются каноническими, если матрицы  $T_a$  удовлетворяют соотношениям

$$B^0 T_a + \tilde{T}_a B^0 = 0, \quad T_a = -T_a^*. \quad (1.4.13)$$

Эти вариации ха характеризуются тем, что для них  $\delta W_K = 0$ ,  $G_2 = 0$  (см. (1.3.38)). Бесконечно малые вещественные параметры  $\epsilon^a(x)$  могут быть произвольными функциями «пространственных» координат.

Генераторами преобразований (1.4.12), согласно (1.3.39), (1.3.29), будут функционалы

$$G(t) = \int d^3x \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 \delta\chi).$$

Поэтому, используя явный вид вариаций  $\delta\chi(x)$ , имеем (см. (1.1.47))

$$G(t) = \int d^3x e^a(x) \mathcal{S}_a^0(x), \quad (1.4.14)$$

$$\mathcal{S}_a^0(x) = -i\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 T_a \chi).$$

Из формулы (1.3.37') для вариаций (1.4.12)

$$\{\chi(x); G(t)\} = -ie^a(x) T_a \chi(x)$$

следует, что скобки Пуассона величин  $\mathcal{S}_a^0(x')$  и  $\chi(x)$  равны:

$$\{\mathcal{S}_a^0(x'); \chi(x)\}_{t=t'} = iT_a \chi(x) \delta(x-x'). \quad (1.4.15)$$

Пусть теперь при  $\epsilon^a = \text{const}$  преобразования (1.4.12) являются преобразованиями внутренней симметрии. В этом случае матрицы  $T_a$  должны удовлетворять более общим, нежели (1.4.13), соотношениям

$$B^\mu T_a + T_a B^\mu = 0. \quad (1.4.16)$$

Согласно (1.4.2), функционалы

$$G = \epsilon^a Q_a, \quad Q_a = \int d^3x \mathcal{S}_a^0(x) \quad (1.4.17)$$

будут интегралами движения. Из формулы (1.4.15) следует, что

$$\{Q_a; \chi(x)\} = iT_a \chi(x). \quad (1.4.18)$$

Рассмотрим теперь преобразования полей, связанные с пространственными локальными поворотами и смещениями координат. Легко видеть, что кинематическая часть функции Лагранжа, согласно (1.3.38), инвариантна по отношению к вариациям, соответствующим локальным пространственным поворотам и смещениям

$$\delta\chi(x) = \chi'(x) - \chi(x), \quad (1.4.19)$$

где  $\chi'(x)$  в случае конечных преобразований определяется формулой

$$\chi'(x') = \left| \frac{\partial x'^k}{\partial x^l} \right|^{-1/2} S(a(x)) \chi(x), \quad (1.4.20)$$

$$x'^k = a^k_l(x) x^l + a^k(x), \quad k, l = 1, 2, 3$$

и матрица  $S(a(x))$  удовлетворяет соотношениям

$$\tilde{S} B^0 S = B^0, \quad \tilde{S}(a(x)) B^k S(a(x)) = a^k_l(x) B^l \quad (1.4.21)$$

(заметим, что кинематическая часть действия инвариантна при выполнении только первого из этих условий). Для вариации (1.4.19)  $\delta W_K = 0$ ,  $G_2 = 0$ , следовательно, вариации (1.4.19) являются каноническими.

В случае бесконечно малых преобразований  $a^k_l(x) = \delta^k_l + \epsilon^k_l(x)$ ,  $a^k(x) = \epsilon^k(x)$ , где бесконечно малые функции  $\epsilon_{kl}(x)$  антисимметричны по индексам  $k, l$ ,  $\epsilon_{kl} = -\epsilon_{lk}$ . Матрица  $S(a)$  при этом определяется формулой (1.1.14)

$$S(a) = 1 - \frac{i}{2} \epsilon^k_l(x) \Sigma_k^l, \quad (1.4.22)$$

а якобиан преобразования  $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$  запишем в следующем виде:

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = 1 + \partial_k (\epsilon^k_l(x) x^l + \epsilon^k(x)) = 1 + \partial_k \epsilon^k(x) + x^l \partial_l \epsilon^k_l(x).$$

Из формул (1.4.20), (1.4.22) следует, что рассматриваемые нами вариации  $\delta\chi(x) = \chi'(x) - \chi(x)$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \delta\chi(x) = & -\frac{1}{2} (\partial_k \epsilon^k + x^l \partial_l \epsilon^k_l) \chi(x) - \\ & - (\epsilon^k + \epsilon^k_l x^l) \partial_k \chi(x) - \frac{i}{2} \epsilon^k_l \Sigma_k^l \chi(x). \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

Поскольку, согласно (1.3.6), (1.3.7),

$$\mathcal{L}_0(\chi_1, \delta_\xi^0 \chi_2) = -\mathcal{L}_0(\chi_2, \delta_\xi^0 \chi_1), \quad (1.4.24)$$

легко видеть, что генератор

$$G(t) = \int d^3x \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 \chi)$$

для вариаций (1.4.23) может быть представлен в виде

$$G(t) = \int d^3x \left\{ -(\epsilon^k + \epsilon^k_{iX^i}) \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 \partial_k \chi) - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \epsilon^k_{iX^i} \mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^0 \Sigma_k^i \chi_i) \right\} \quad (1.4.25)$$

или, учитывая (1.4.9), в виде

$$G(t) = \int d^3x \left( -\epsilon^k(x) T_k^0(x) + \frac{1}{2} \epsilon_{lk}(x) M^{lk;0}(x) \right). \quad (1.4.26)$$

Из формулы (1.3.37') для вариаций (1.4.23) вытекает, что скобки Пуассона функционалов  $T_k^0(x)$  и  $M_l^{k;0}(x)$  с величиной  $\chi(x)$  имеют вид

$$\{T_k^0(x'); \chi(x)\}_{t=t'} = -\delta(x-x') \partial_k \chi(x) - \frac{1}{2} \chi(x) \partial_k \delta(x-x'), \\ \{M_r^{i;0}(x'); \chi(x)\}_{t=t'} = \delta(x-x') i \Sigma_r^i \chi(x) + \\ + \delta(x-x') (x^i \partial_r - x_r \partial^i) \chi(x) + \\ + \frac{1}{2} \chi(x) (x^i \partial_r - x_r \partial^i) \delta(x-x'). \quad (1.4.27)$$

Пусть теперь преобразования (1.4.23) являются преобразованиями пространственных поворотов и смещений с  $\epsilon^k_i = \text{const}$ ,  $\epsilon^k = \text{const}$ . Такие преобразования оставляют инвариантным лагранжиан  $\mathcal{L}$  и, следовательно, полное действие  $\mathcal{W}$ . В этом случае, согласно (1.4.26),

$$G = -\epsilon_k P^k + \frac{1}{2} \epsilon_{lk} M^{lk}, \quad (1.4.28)$$

$$P^k = \int d^3x T^{k0}(x), \quad M^{lk} = \int d^3x M^{lk;0}(x).$$

Операторы  $P^k$ ,  $M^{lk}$  представляют собой сохраняющиеся величины, определяющие импульс и момент количества движения поля.

Из формул (1.4.27), (1.4.28) вытекают соотношения

$$\partial^k \chi(x) = -\{P^k; \chi(x)\}, \\ (x^k \partial^l - x^l \partial^k - i \Sigma^{kl}) \chi(x) = -\{M^{kl}; \chi(x)\}. \quad (1.4.29)$$

Мы рассматривали законы сохранения 4-импульса и 4-момента количества движения, которые были связаны с инвариантностью лагранжиана поля по отношению к пространственным смещениям и поворотам, теперь обобщим полученные результаты на случай общих преобразований группы Пуанкаре (см. (1.1.6)). Можно показать, что вариации

$$\delta \chi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \chi(x) + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} (-\Sigma_\mu^\nu + i(x^\nu \partial_\mu - x_\mu \partial^\nu)) \chi(x), \quad (1.4.30)$$

оставляющие инвариантным действие (1.3.9), являются каноническими

$$\delta \chi(x) = -\{G; \chi(x)\}, \quad (1.4.31)$$

причем генератор этих преобразований определяется формулой

$$G = -\epsilon_\nu P^\nu + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \quad (1.4.32)$$

где

$$P^\nu = \int d^3x T^{\nu 0}(x), \quad M^{\mu\nu} = \int d^3x M^{\mu\nu;0}(x). \quad (1.4.33)$$

Из соотношений (1.4.30), (1.4.31) следует, что

$$\{P_\mu; \chi(x)\} = -\partial_\mu \chi(x), \\ \{M_{\mu\nu}; \chi(x)\} = (i \Sigma_{\mu\nu} + (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu)) \chi(x). \quad (1.4.34)$$

Эти формулы при  $\mu = 1, 2, 3$  и  $\nu = 1, 2, 3$  совпадают с формулами (1.4.29). Первое из этих соотношений при  $\mu = 0$  совпадает с формулой (1.3.34), второе при  $\mu = 0$ ,  $\nu = k$  может быть проверено непосредственно.

**1.4.3. Скобки Пуассона интегралов движения.** В этом пункте мы вычислим скобки Пуассона интегралов движения  $P^\mu$ ,  $M^{\mu\nu}$ ,  $Q_a$ . Используя тот факт, что величины  $P^\mu$ ,  $M^{\mu\nu}$ ,  $Q_a$  являются генераторами преобразований (1.4.30), (1.4.12), удобно проводить вычисления.

Определим прежде всего вариации тензоров энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  и моментов  $M_{\mu\nu;\lambda}$  при вариациях полей (1.4.30), соответствующих преобразованиям Пуанкаре. Тензор  $T_{\mu\nu}(x)$ , согласно (1.4.9), зависит от  $x$  только через посредство  $\partial_\mu \chi$  и  $\chi$  ( $T_{\mu\nu}(x) \equiv T_{\mu\nu}(\chi(x))$ ). Тензор же  $M_{\mu\nu;\lambda}(x)$  зависит от  $x$  также через посредство  $\chi$ ,  $\partial_\mu \chi$ , но, кроме того, он содержит и явную зависимость от  $x$  (см. (1.4.9)),  $M_{\mu\nu;\lambda}(x) \equiv M_{\mu\nu;\lambda}(\chi(x), x)$ .

Так как для преобразований группы Пуанкаре генератор  $G = -\epsilon^\mu P_\mu + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} M_{\mu\nu}$  не зависит от времени (величины  $P_\mu$ ,  $M_{\mu\nu}$  интегралы движения), то наряду с формулой

$$\delta \chi(x) = \{ \chi(x); G \}$$

будут справедливы формулы

$$\partial_\mu \delta \chi(x) = \{\partial_\mu \chi(x); G\}.$$

Поэтому вариации тензоров  $T_{\mu\nu}$  и  $M_{\mu\nu;\lambda}$

$$\delta T_{\mu\nu}(x) \equiv T_{\mu\nu}(\chi'(x)) - T_{\mu\nu}(\chi(x)),$$

$$\delta M_{\mu\nu;\lambda}(x) \equiv M_{\mu\nu;\lambda}(\chi'(x), x) - M_{\mu\nu;\lambda}(\chi(x), x)$$

могут быть найдены по формулам

$$\delta T_{\mu\nu}(x) = \{T_{\mu\nu}(x); G\}, \quad \delta M_{\mu\nu;\lambda}(x) = \{M_{\mu\nu;\lambda}(x); G\}. \quad (1.4.35)$$

С другой стороны, вариации тензоров  $T_{\mu\nu}$  и  $M_{\mu\nu;\lambda}$  могут быть найдены другим способом, т. е. исходя из трансформационных свойств этих величин. Поскольку лагранжиан  $\mathcal{L}$  инвариантен относительно преобразований (1.4.30), то, как мы уже говорили, тензор энергии-импульса преобразуется по закону

$$T_{\mu\nu}(x) \rightarrow T'_{\mu\nu}(x') \equiv T_{\mu\nu}(\chi'(x')) = a_\mu^\lambda a_\nu^\rho T_{\lambda\rho}(x), \quad (1.4.36)$$

где  $x'_\mu = a_\mu^\lambda x_\lambda + a_\mu$ .

Величина  $\mathcal{L}_0(\chi, \delta_\xi^\mu \Sigma_{\nu\mu} \chi)$ , входящая в  $M_{\nu;\lambda}^\mu$ , в силу инвариантности  $\mathcal{L}_0$  относительно преобразований (1.4.30) и в силу соотношения (1.1.33), преобразуется как тензор третьего ранга. Поэтому в силу закона преобразования для  $T_{\mu\nu}$  имеем

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu;\lambda}(x) &\rightarrow M'_{\mu\nu;\lambda}(x') \equiv M_{\mu\nu;\lambda}(\chi'(x'), x') = \\ &= a_\mu^\xi a_\nu^\rho a_\lambda^\sigma M_{\xi\rho;\sigma}(\chi(x), x) + a_\mu T_{\nu\lambda}(\chi'(x')) - a_\nu T_{\mu\rho}(\chi'(x')). \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

Для бесконечно малых преобразований Лоренца — Пуанкаре формула (1.4.36) приводит к следующему выражению для вариации  $\delta T_{\mu\nu}(x)$ :

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu}(x) &= T_{\mu\nu}(\chi'(x')) - T_{\mu\nu}(\chi(x)) - (T_{\mu\nu}(\chi'(x')) - \\ &- T_{\mu\nu}(\chi(x))) = \varepsilon_\mu^\lambda T_{\lambda\nu}(x) + \varepsilon_\nu^\lambda T_{\mu\nu}(x) - (\varepsilon^\rho_\lambda x^\lambda + \varepsilon^\rho) \partial_\rho T_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

Аналогичным образом вариацию  $\delta M_{\mu\nu;\lambda}(x)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta M_{\mu\nu;\lambda}(x) &= \varepsilon_\mu^\rho M_{\rho\nu;\lambda}(x) + \varepsilon_\nu^\rho M_{\mu\rho;\lambda}(x) + \varepsilon_\lambda^\rho M_{\mu\nu;\rho}(x) - \\ &- (\varepsilon^\rho_\sigma x^\sigma + \varepsilon^\rho) \partial_\rho M_{\mu\nu;\lambda}(x) + \varepsilon_\mu T_{\nu\lambda}(x) - \varepsilon_\nu T_{\mu\lambda}(x). \end{aligned} \quad (1.4.39)$$

Поэтому из (1.4.38), (1.4.39), (1.4.35) и определения (1.4.32) генератора  $G$  имеем

$$\{T_{\mu\lambda}(x); P_\rho\} = \partial_\rho T_{\mu\lambda}(x).$$

$$\{M_{\mu\nu;\lambda}(x); P_\rho\} = -g_{\mu\rho} T_{\nu\lambda}(x) + g_{\nu\rho} T_{\mu\lambda}(x) + \partial_\rho M_{\mu\nu;\lambda}(x),$$

$$\begin{aligned} \{T_{\mu\lambda}(x); M_{\rho\nu}\} &= -g_{\mu\nu} T_{\rho\lambda}(x) + g_{\mu\rho} T_{\nu\lambda}(x) - g_{\nu\lambda} T_{\mu\rho}(x) + \\ &+ g_{\rho\lambda} T_{\mu\nu}(x) - (x_\nu \partial_\rho - x_\rho \partial_\nu) T_{\mu\lambda}(x), \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

$$\begin{aligned} \{M_{\mu\nu;\lambda}(x); M_{\rho\xi}\} &= -g_{\mu\xi} M_{\rho\nu;\lambda}(x) + g_{\mu\rho} M_{\xi\nu;\lambda}(x) - \\ &- g_{\nu\xi} M_{\mu\rho;\lambda}(x) + g_{\nu\rho} M_{\mu\xi;\lambda}(x) - g_{\lambda\xi} M_{\mu\nu;\rho}(x) + \\ &+ g_{\lambda\rho} M_{\mu\nu;\xi}(x) - (x_\xi \partial_\rho - x_\rho \partial_\xi) M_{\mu\nu;\lambda}(x). \end{aligned}$$

Полагая в первых двух соотношениях  $\lambda = 0$  и интегрируя их по  $d^3x$ , получаем, используя законы сохранения (1.4.10) и определения (1.4.33) величин  $P_\mu$  и  $M_{\mu\nu}$ ,

$$\{P_\mu; P_\nu\} = 0, \quad \{M_{\mu\nu}; P_\rho\} = -g_{\mu\rho} P_\nu + g_{\nu\rho} P_\mu. \quad (1.4.41)$$

Аналогичным образом интегрирование по  $d^3x$  последней пары соотношений (1.4.40) при  $\lambda = 0$  приводит к уравнению  $\{M_{\mu\nu}; M_{\rho\xi}\} = -g_{\mu\xi} M_{\rho\nu} + g_{\mu\rho} M_{\xi\nu} - g_{\nu\xi} M_{\mu\rho} + g_{\nu\rho} M_{\mu\xi}$  (1.4.42) и соотношению, совпадающему со вторым из уравнений (1.4.41) (при получении этой формулы мы использовали дифференциальный закон сохранения (1.4.40) и выполнили интегрирование по частям). Из этих формул, в частности, следуют скобки Пуассона для момента количества движения

$$\{M^i; M^k\} = \varepsilon^{ikl} M^l, \quad (1.4.43)$$

где  $M^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} M_{kl}$ .

Найдем теперь скобки Пуассона обобщенных зарядов, связанных с внутренними симметриями. Вариации обобщенных токов  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J}_a^\mu(x) &\equiv \mathcal{J}_a^\mu(\chi'(x)) - \mathcal{J}_a^\mu(\chi(x)), \\ \delta \chi(x) &\equiv \chi'(x) - \chi(x) = -i \varepsilon^a T_a \chi(x) \end{aligned}$$

могут быть найдены по формуле

$$\delta \mathcal{J}_a^\mu(x) = \{\mathcal{J}_a^\mu(x); G\}, \quad (1.4.44)$$

где  $G$  — генератор преобразований внутренней симметрии  $G = \varepsilon^a Q_a$ , и  $Q_a$  — обобщенные заряды поля (см. (1.4.17)). С другой стороны в силу инвариантности лагранжиана относительно преобразований внутренней симметрии

$$\delta \mathcal{J}_a^\mu(x) = \varepsilon^b f_{ab}^c \mathcal{J}_c^\mu(x) \quad (1.4.45)$$

(см. раздел 1.1.4).

Из сравнения формул (1.4.44), (1.4.45) имеем

$$\{\mathcal{J}_a^\mu(x); Q_b\} = f_{ab}^c \mathcal{J}_c^\mu(x). \quad (1.4.46)$$

Откуда, полагая  $\mu = 0$  и интегрируя по  $d^3x$ , используя определение (1.4.17) обобщенных зарядов  $Q_a$ , найдем

$$\{Q_a; Q_b\} = f_{ab}^c Q_c. \quad (1.4.47)$$

Необходимо отметить, что так как преобразования внутренней симметрии независимы от преобразований Пуанкаре, то

$$\{Q_\alpha; P_\mu\} = \{Q_\alpha; M_{\mu\nu}\} = 0.$$

## § 1.5. Квантование полей

**1.5.1. Квантовомеханическое описание состояний.** Согласно квантовой механике, каждой физической величине (наблюдаемой) сопоставляется некоторый оператор в гильбертовом пространстве, представляющем собой совокупность векторов  $\Phi$  (векторы состояния), для которых определено скалярное произведение  $(\Phi_1, \Phi_2)$ , обладающее следующими свойствами [8, 9]:

$$(\Phi_1, \Phi_2)^* = (\Phi_2, \Phi_1), \quad (\Phi, a\Phi_1 + b\Phi_2) = a(\Phi, \Phi_1) + b(\Phi, \Phi_2), \quad (\Phi, \Phi) > 0$$

( $a$  и  $b$  — произвольные комплексные числа).

Любой оператор  $R$  в гильбертовом пространстве переводит каждый вектор  $\Phi$  этого пространства в некоторый другой вектор  $\Phi'$  этого же пространства

$$\Phi \xrightarrow{R} \Phi' \equiv R\Phi.$$

Оператор  $R^+$  называется эрмитовски сопряженным по отношению к оператору  $R$ , если для любых двух векторов  $\Phi_1, \Phi_2$  имеет место равенство

$$(\Phi_2, R\Phi_1) = (R^+\Phi_2, \Phi_1).$$

Оператор  $R$  называется эрмитовым или самосопряженным, если  $R^+ = R$ .

Собственные значения любого самосопряженного оператора вещественны, а его собственные векторы образуют полную ортонормированную систему векторов, поэтому могут быть использованы в качестве базиса гильбертова пространства. По этой причине физическим величинам всегда сопоставляются эрмитовы операторы.

Для векторов состояний, скалярных произведений и матричных элементов операторов мы будем часто использовать также следующие дираковские обозначения:

$$\Phi \equiv |\Phi\rangle, \quad (\Phi_1, \Phi_2) \equiv \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle, \quad (\Phi_1, R\Phi_2) \equiv \langle \Phi_1 | R | \Phi_2 \rangle.$$

Векторы состояний изменяются со временем по вполне определенному закону. Именно, если  $\mathcal{H}$  — гамильтониан системы, то вектор состояния  $\Phi(t)$  изменяется со временем согласно уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \mathcal{H}\Phi(t) \quad (1.5.1)$$

(здесь и в дальнейшем считается, что квантовая постоянная  $\hbar$  равна единице). Решение этого уравнения можно формально записать в виде

$$\Phi(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \Phi(0).$$

В квантовой механике мы можем подвергать операторы  $R$  некоторому унитарному преобразованию  $U$

$$R \rightarrow R' = URU^+, \quad (1.5.2)$$

подвергая одновременно этому же унитарному преобразованию и вектор состояний

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U\Phi.$$

При этом будут оставаться неизменными матричные элементы  $R$ :

$$(\Phi'_1, R'\Phi'_2) = (\Phi_1, R\Phi_2).$$

В качестве примеров таких преобразований рассмотрим переход от шредингеровского представления к гейзенберговскому и дираковскому представлениям.

В шредингеровском представлении операторы не зависят от времени, а векторы состояний изменяются со временем, согласно уравнению (1.5.1).

В гейзенберговском представлении эволюция системы описывается изменением со временем операторов, векторы же состояния от времени не зависят. Операторы  $R(t)$  и векторы состояния  $\Psi$  в этом представлении связаны с соответствующими величинами в шредингеровском представлении унитарным преобразованием (1.5.2) с  $U = \exp i\mathcal{H}t$

$$R(t) = e^{i\mathcal{H}t} R e^{-i\mathcal{H}t}, \quad \Psi = e^{i\mathcal{H}t} \Phi(t) \quad (1.5.3)$$

(вектор  $\Psi$ , согласно (1.5.1), не зависит от времени  $t$ ; предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  оба представления совпадают). Оператор  $R(t)$  изменяется со временем по закону

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t} = i[\mathcal{H}, R(t)], \quad (1.5.4)$$

где  $[a, b] = ab - ba$  — коммутатор операторов  $a$  и  $b$ .

В дираковском представлении (или представлении взаимодействия) изменяются со временем векторы состояния и операторы, причем это изменение связывается с разбиением гамильтониана  $\mathcal{H}$  на два слагаемых  $\mathcal{H}_0$  и  $V$ ,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V,$$

где обычно под  $\mathcal{H}_0$  подразумевают гамильтониан невзаимодействующих частиц, а под  $V$  — гамильтониан их взаимодей-



ствия. Операторы  $R(t)$  и векторы состояния  $\Phi(t)$  в этом представлении связаны с соответствующими величинами в шредингеровском представлении унитарным преобразованием (1.5.2) с  $U = \exp i\mathcal{H}_0 t$ :

$$R(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} R e^{-i\mathcal{H}_0 t}, \quad \Phi(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \Phi(0) \quad (1.5.5)$$

(предполагается, что оба представления совпадают при  $t = 0$ ).

Легко видеть, что вектор состояния в представлении взаимодействия изменяется со временем по закону

$$\Phi(t) = S(t, 0) \Phi(0), \quad S(t, 0) = e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{-i\mathcal{H} t}. \quad (1.5.6)$$

Оператор  $S(t, 0)$ , называемый оператором преобразования, удовлетворяет уравнению\*

$$i \frac{\partial S(t, 0)}{\partial t} = V(t) S(t, 0), \quad S(0, 0) = 1, \quad (1.5.7)$$

где

$$V(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} V e^{-i\mathcal{H}_0 t}.$$

Ясно, что оператор  $\tilde{R}(t)$  в представлении взаимодействия изменяется со временем по закону

$$\frac{\partial \tilde{R}(t)}{\partial t} = i[\mathcal{H}_0, \tilde{R}(t)], \quad \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0. \quad (1.5.7')$$

В этой главе мы будем пользоваться гейзенберговским представлением квантовой механики.

Рассмотрим снова унитарные преобразования  $U$ , зависящие от некоторых параметров  $\lambda^a$ ,  $U = U(\lambda^a)$ . Для бесконечно малых значений параметров  $\lambda^a$ ,  $\lambda^a = \delta\lambda^a \equiv \varepsilon^a$  оператор  $U$  можно представить в виде

$$U(\lambda) = 1 - iG, \quad (1.5.8)$$

где  $G$  — эрмитов оператор,

$$G = \sum_a \varepsilon^a G_a, \quad G_a = i \left. \frac{\partial U}{\partial \lambda^a} \right|_{\lambda=0}.$$

(предполагается, что  $U(0) = 1$ ). Вариация произвольного оператора  $R$ , согласно (1.5.2), определяется формулой

$$\delta R \equiv R' - R = -i[G, R]. \quad (1.5.9)$$

Если предположить, что преобразования  $U(\lambda)$  образуют некоторую непрерывную группу  $\mathcal{G}$ , т. е.

$$U(\lambda_2) U(\lambda_1) = U(\lambda_3),$$

где  $\lambda_3$  — некоторая функция параметров  $\lambda_2, \lambda_1$ ,

$$\lambda_3 = \lambda(\lambda_2, \lambda_1),$$

\* В квантовой теории поля представление взаимодействия в релятивистски инвариантном виде было введено Томонага [10] и Швингером [11].

то операторы  $G_a$  будут удовлетворять перестановочным соотношениям

$$[G_a, G_b] = i \sum_c f_{ab}^c G_c \equiv i f_{ab}^c G_c, \quad (1.5.10)$$

где  $f_{ab}^c$  — некоторые постоянные, называемые структурными постоянными группы  $\mathcal{G}$  (доказательство см. в разделе 1.1.3). Операторы  $G_a$  называются генераторами группы преобразований  $\mathcal{G}$ , а оператор  $G = \sum_a \varepsilon^a G_a$  — генератором вариаций  $\delta R$ .

**1.5.2. Каноническое квантование полей.** Основная идея квантовой теории поля заключается в том, что классические поля  $\varphi_\alpha(x)$ ,  $\psi_\alpha(x)$  заменяются операторами, действующими в пространстве векторов состояний динамической системы. Эти операторы должны удовлетворять определенным перестановочным соотношениям. Чтобы сформулировать эти соотношения, начнем с рассмотрения динамики переменных  $x, \xi$ , описываемой лагранжианом (1.2.3). Непосредственный физический смысл имеют величины, четные по фермионным (грассмановым) переменным, т. е. четные элементы грассмановой алгебры. Пусть  $f^+(x, \xi)$  и  $g^+(x, \xi)$  два четных элемента грассмановой алгебры. Тогда в квантовой теории им сопоставляются операторы [8]

$$f^+(x, \xi) \rightarrow f^+(\hat{x}, \hat{\xi}) \equiv \hat{f}^+, \quad g^+(x, \xi) \rightarrow g^+(\hat{x}, \hat{\xi}) \equiv \hat{g}^+, \quad (1.5.11)$$

где  $\hat{x}, \hat{\xi}$  — операторы, соответствующие величинам  $x, \xi$ . Тогда скобка Пуассона  $\{f^+, g^+\}$  сопоставляется коммутатор операторов  $\hat{f}^+, \hat{g}^+$

$$\{f^+, g^+\} \rightarrow -i[\hat{f}^+, \hat{g}^+]. \quad (1.5.12)$$

Поскольку  $\{x_i, x_j\} = -i(B_a^{-1})_{ij}$ , то учитывая, что  $x_i$  четный элемент грассмановой алгебры, имеем

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = (B_a^{-1})_{ij}. \quad (1.5.13)$$

Для нахождения перестановочных соотношений между  $x, \xi$  и  $\hat{x}, \hat{\xi}$  покажем, что в квантовой теории скобка Пуассона  $\{f^+, g^-\}$  должна быть заменена на  $-i[\hat{f}^+, \hat{g}^-]$ , а скобка Пуассона  $\{f^-, g^-\}$  — на  $i[\hat{f}^-, \hat{g}^-]$ :

$$\{f^+, g^-\} \rightarrow -i[\hat{f}^+, \hat{g}^-], \quad \{f^-, g^-\} \rightarrow i[\hat{f}^-, \hat{g}^-], \quad (1.5.14)$$

где  $\{\hat{f}^-, \hat{g}^-\} \equiv \hat{f}^-\hat{g}^- + \hat{g}^-\hat{f}^-$  — антикоммутатор операторов  $\hat{f}^-, \hat{g}^-$  ( $\hat{f}^-, \hat{g}^-$  — нечетные элементы грассмановой алгебры). Для этого введем четные величины  $\eta'g^-, f^-\eta$  где  $\eta, \eta'$  — нечетные грассмановы величины, антикоммутирующие с величинами  $\xi_i$  и друг с другом. Эти величины не являются динамическими переменными, а представляют собой аналог обычных чисел. Тогда, согласно (1.5.12),

$$\{f^+; \eta'g^-\} \rightarrow -i\{f^+, \eta'g^-\},$$

$$\{f^-\eta; \eta'g^-\} \rightarrow -i\{f^-\eta, \eta'g^-\}.$$

Так как (см. (1.2.9))

$$\{f^+; \eta'g^-\} = \eta'\{f^+; g^-\}, \{f^-\eta; \eta'g^-\} = \eta'\eta\{f^-; g^-\}$$

и

$$-i\{f^+, \eta'g^-\} = -i\eta\{f^+, g^-\}, -i\{f^-\eta, \eta'g^-\} = \\ = i\eta'\eta\{f^-, g^-\},$$

то должно иметь место соответствие (1.5.14).

Из формул (1.5.14), (1.5.13) и (1.2.10) следует, что

$$\{\hat{x}_i, \hat{\xi}_i\} = 0, \{\hat{x}_i, \hat{x}_j\} = (B_a^{-1})_{ij}, \{\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j\} = (B_s^{-1})_{ij}. \quad (1.5.15)$$

Поскольку гамильтониан  $\mathcal{H}$  является четным элементом грассмановой алгебры, то из (1.2.8), (1.5.12) следует, что уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\dot{\hat{f}} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{f}]. \quad (1.5.16)$$

Генератору канонического преобразования  $G(x, \xi)$  соответствует некоторый оператор  $\hat{G}$

$$G(x, \xi) \rightarrow G(\hat{x}, \hat{\xi}) \equiv \hat{G}. \quad (1.5.17)$$

Так как оператор канонических преобразований предполагается четной функцией фермиевских переменных, то в квантовой теории каноническому преобразованию (1.2.19) соответствует преобразование операторов

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}' = \hat{x} + \delta\hat{x}, \delta\hat{x} = i[\hat{G}, \hat{x}]; \\ \hat{\xi} \rightarrow \hat{\xi}' = \hat{\xi} + \delta\hat{\xi}, \delta\hat{\xi} = i[\hat{G}, \hat{\xi}]. \quad (1.5.18)$$

Генератор  $\hat{G}$  является эрмитовым оператором (в классической теории  $\hat{G} = G^*$ ). Поэтому бесконечно малым каноническим

преобразованиям в классической теории соответствуют бесконечно малые унитарные преобразования в квантовой теории.

Сравнивая лагранжианы (1.2.3), (1.3.5), видим, что дискретному индексу  $i$ , нумерующему переменные  $x_i, \xi_i$ , в теории поля соответствует дискретный индекс  $\alpha$  и непрерывный индекс  $x$ , по которому происходит интегрирование, а не суммирование. Поэтому, согласно (1.2.3), (1.3.7), перестановочные соотношения для полей имеют вид

$$[\bar{\varphi}_\alpha(x), \bar{\varphi}_\beta(x')]_{t=t'} = (\bar{B}_a^{0-1})_{\alpha\beta} \delta(x-x'), [\bar{\varphi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')]_{t=t'} = 0, \\ (\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x'))_{t=t'} = (\bar{B}_s^{0-1})_{\alpha\beta} \delta(x-x') \quad (1.5.19)$$

(см. (1.5.12), (1.5.14), (1.3.36)) или в терминах полей  $\varphi, \psi$

$$[B_a^0\varphi(x), B_a^0\varphi(x')]_{t=t'} = B_a^0\delta(x-x'), [B_a^0\varphi(x), B_s^0\psi(x')]_{t=t'} = 0, \\ [B_s^0\psi(x), B_s^0\psi(x')]_{t=t'} = B_s^0\delta(x-x'). \quad (1.5.19')$$

Если метрика в пространстве векторов состояний является дефинитной, то из последней формулы следует, что матрица  $B_s^0$  является положительно определенной.

Как и в случае систем с конечным числом степеней свободы, генератору канонических преобразований классических полей соответствует некоторый эрмитов оператор

$$G(\bar{\chi}_\alpha) \rightarrow G(\hat{\bar{\chi}}_\alpha) \equiv \hat{G}, \quad (1.5.20)$$

являющийся генератором соответствующих унитарных преобразований в квантовой теории

$$\hat{\bar{\chi}}_\alpha \rightarrow \hat{\bar{\chi}}'_\alpha = \hat{\bar{\chi}}_\alpha + \delta\hat{\bar{\chi}}_\alpha, \delta\hat{\bar{\chi}}_\alpha = i[\hat{G}, \hat{\bar{\chi}}_\alpha]. \quad (1.5.21)$$

Проиллюстрируем сперва это положение на примере  $C$  — числовых вариаций  $\delta\chi_\alpha$ , являющихся произвольными функциями  $x$  и не зависящими от полей  $\chi_\alpha$ . В § 1.3 мы видели, что такие вариации определяют некоторое бесконечно малое каноническое преобразование с генератором  $G$ , определяемым формулой (1.3.40). В квантовой теории, согласно (1.5.20), этим вариациям соответствует некоторое унитарное преобразование с генератором

$$\hat{G} = i \int d^3x (\hat{\varphi} B_a^0 \delta\bar{\varphi} + \hat{\psi} B_s^0 \delta\bar{\psi}), \quad (1.5.22)$$

где  $\delta\bar{\varphi}_\alpha(x)$  — произвольные функции  $x$ ,  $\delta\bar{\psi}_\alpha(x)$  — произвольные грассмановы функции  $x$ , антикоммутирующие между собой и с фермиевскими полями  $\hat{\psi}_\alpha$ . Подставляя (1.5.22) в

— (1.5.21), получаем

$$\delta\bar{\varphi}_\alpha(x) = i \int_{t'=t} d^3x' [\hat{\varphi}(x') \bar{B}_\alpha^0 \delta\bar{\varphi}(x') + \hat{\psi}(x') \bar{B}_s^0 \delta\bar{\psi}(x'), \bar{\varphi}_\alpha(x)],$$

$$\delta\bar{\psi}_\alpha(x) = i \int_{t'=t} d^3x' [\hat{\varphi}(x') \bar{B}_\alpha^0 \delta\bar{\varphi}(x') + \hat{\psi}(x') \bar{B}_s^0 \delta\bar{\psi}(x'), \bar{\psi}_\alpha(x)],$$

откуда в силу произвольности функций  $\delta\bar{\varphi}$ ,  $\delta\bar{\psi}$  мы снова приходим к перестановочным соотношениям (1.5.19).

Рассмотрим бесконечно малые преобразования внутренней симметрии

$$\delta\chi(x) = -i\epsilon^a T_a \chi(x). \quad (1.5.23)$$

В квантовой теории, согласно (1.5.20), (1.5.21), им соответствует бесконечно малое унитарное преобразование, генератор которого определяется формулой (1.4.17), в которой под  $\chi_\alpha$  теперь подразумеваются операторы поля

$$\hat{G} = \epsilon^a \hat{Q}_a, \quad \hat{Q}_a = \int d^3x \hat{\mathcal{T}}_a^0(x), \quad (1.5.24)$$

где ток  $\hat{\mathcal{T}}_a^\mu(x)$  определяется формулой

$$\hat{\mathcal{T}}_a^\mu(x) = -i\mathcal{L}_0(\hat{\chi}, \delta_\lambda^\mu T_a \hat{\chi}); \quad (1.5.25)$$

так как (см. (1.5.21))

$$-i\epsilon^a T_a \hat{\chi}(x) = i[\epsilon^a \hat{Q}_a, \hat{\chi}(x)],$$

то в силу произвольности  $\epsilon^a$  имеем

$$[\hat{Q}_a, \hat{\chi}(x)] = -T_a \hat{\chi}(x) \quad (1.5.26)$$

(сравним с формулой (1.4.18)).

Наконец, в случае бесконечно малых преобразований пространственно-временных смещений, определяемых параметрами  $\epsilon^\mu$ , и пространственно-временных поворотов, определяемых параметрами  $\epsilon_{\mu\nu}$ , вариации полей имеют вид

$$\delta\hat{\chi}(x) \equiv \hat{\chi}'(x) - \hat{\chi}(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \hat{\chi} - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} \{\Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\} \hat{\chi}. \quad (1.5.27)$$

В квантовой теории, согласно (1.5.20), (1.5.21), этим вариациям соответствует бесконечно малое унитарное преобразование, генератор которого определяется формулами (1.4.32), (1.4.33), где под  $\chi$  подразумеваются операторы поля

$$\hat{G} = -\epsilon_\mu \hat{P}^\mu + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} \hat{M}^{\mu\nu}, \quad (1.5.28)$$

здесь

$$\hat{P}^\mu = \int d\sigma_\nu \hat{T}^{\mu\nu}, \quad \hat{M}^{\mu\nu} = \int d\sigma_\rho \hat{M}^{\mu\nu\rho}$$

и операторы тензора энергии-импульса  $\hat{T}^{\mu\nu}$  и тензора плотностей моментов количества движения  $\hat{M}^{\mu\nu\rho}$  определяются формулами

$$\hat{T}^{\mu\nu} = -\hat{\mathcal{L}} g^{\mu\nu} + \mathcal{L}_0(\hat{\chi}, \delta_\lambda^\nu \partial^\mu \hat{\chi}), \quad (1.5.29)$$

$$\hat{M}^{\mu\nu\rho} = x^\mu \hat{T}^{\nu\rho} - x^\nu \hat{T}^{\mu\rho} - i\mathcal{L}_0(\hat{\chi}, \delta_\lambda^\rho \Sigma^{\mu\nu} \hat{\chi}).$$

Заметим, что операторы поля  $\hat{\chi}(x)$  удовлетворяют уравнениям (1.3.12) и оператор

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \hat{\chi} \frac{\partial U}{\partial \hat{\chi}} - U(\hat{\chi}).$$

Так как  $\delta\hat{\chi} = i[\hat{G}, \hat{\chi}]$ , то в силу произвольности параметров  $\epsilon_\mu$ ,  $\epsilon_{\mu\nu}$  имеем из (1.5.27), (1.5.28)

$$i[\hat{P}_\mu, \hat{\chi}(x)] = \partial_\mu \hat{\chi}(x), \quad (1.5.30)$$

$$i[\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{\chi}(x)] = (-\Sigma_{\mu\nu} + i(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu)) \hat{\chi}(x)$$

(сравним с формулами (1.4.34)). Отметим также, что в квантовой теории справедливы формулы (1.4.41), (1.4.42), (1.4.47), если в них заменить скобки Пуассона  $\{;\}$  на коммутатор  $-i[;]$ .

**1.5.3. Квантование уравнений поля второго порядка.** В предыдущем пункте была изложена квантовая теория уравнений поля первого порядка, когда лагранжиан поля линеен по первым производным. Уравнениями первого порядка описываются все фермионы. Бозоны могут описываться в классической теории как уравнениями первого, так и уравнениями второго порядка. Поэтому представляет интерес рассмотреть вопрос квантования непосредственно уравнений поля второго порядка.

Классический лагранжиан, приводящий к уравнениям поля второго порядка, должен быть квадратичен относительно производных

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \varphi A^\mu \partial_\mu \varphi - W(\varphi), \quad (1.5.31)$$

где  $\varphi$  — вещественное (в принципе многокомпонентное) поле;  $A^\mu$  — постоянные, вещественные антисимметричные матрицы

(симметричные матрицы  $A^\mu$  приводили бы к члену, имеющему вид 4-дивергенции), действующие на индекс поля;  $W(\varphi)$  — некоторая локальная функция  $\varphi$ . Этот лагранжиан приводит к уравнениям поля второго порядка

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + A^\mu \partial_\mu \varphi + \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.5.32)$$

Если мы введем дополнительные компоненты поля  $\varphi_\mu \equiv \delta_\mu \varphi$ , то придем к уравнениям поля первого порядка

$$\partial^\mu \varphi_\mu + A^\mu \varphi_\mu + \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad \partial_\mu \varphi = \varphi_\mu. \quad (1.5.32')$$

Эти уравнения можно получить исходя из линейного по первым производным поля лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \varphi^\mu \partial_\mu \varphi + \varphi A^\mu \partial_\mu \varphi - U(\varphi, \varphi_\mu), \\ U(\varphi, \varphi_\mu) &= \frac{1}{2} \varphi^\mu \varphi_\mu + W(\varphi). \end{aligned} \quad (1.5.33)$$

Этот лагранжиан при  $\varphi_\mu = \partial_\mu \varphi$  переходит в лагранжиан (1.5.31). Согласно уравнениям поля (1.5.32'), динамически независимыми переменными, для которых должны формулироваться перестановочные соотношения, являются  $\varphi, \varphi^0$ . Генератором вариаций  $\delta\varphi, \delta\varphi^0$ , не зависящих от  $\varphi, \varphi^0$ , согласно (1.3.39), является оператор

$$\hat{G} = \int d^3x (\delta\varphi(x) \hat{\varphi}_0(x) + \hat{\varphi}(x) A^0 \delta\varphi(x)) - \int d^3x (\delta\varphi_0(x) \varphi(x) + \delta\varphi(x) A^0 \varphi(x)).$$

Поэтому, согласно (1.5.21), перестановочные соотношения для переменных  $\hat{\varphi}, \hat{\varphi}^0$  имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}_\alpha(x), \hat{\varphi}_\beta(x')]_{t=t'} &= 0, \quad [\hat{\varphi}_\alpha(x'), \hat{\varphi}_\beta^0(x)]_{t=t'} = i\delta_{\alpha\beta} \delta(x-x'), \\ [\hat{\varphi}_\alpha^0(x'), \hat{\varphi}_\beta^0(x)]_{t=t'} &= 2iA_{\alpha\beta}^0 \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

Этим соотношениям можно придать другую форму, если ввести импульс  $\pi_\alpha(x)$ , сопряженный с полем  $\varphi_\alpha(x)$  для исходного лагранжиана  $\mathcal{L}$

$$\pi_\alpha(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi_\alpha(x)} = \partial_0 \varphi_\alpha(x) - A_{\alpha\beta}^0 \varphi_\beta(x).$$

Тогда соотношения (1.5.34) можно представить в виде

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}_\alpha(x), \hat{\varphi}_\beta(x')]_{t=t'} &= [\hat{\pi}_\alpha(x), \hat{\pi}_\beta(x')]_{t=t'} = 0, \\ [\hat{\pi}_\alpha(x), \hat{\varphi}_\beta(x')]_{t=t'} &= -i\delta_{\alpha\beta} \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (1.5.35)$$

Эта форма перестановочных соотношений называется канонической, так как она соответствует обобщению на непрерывный случай известных условий квантования в квантовой механике

$$\begin{aligned} [q_i(t), q_j(t')]_{t=t'} &= [p_i(t), p_j(t')]_{t=t'} = 0, \\ [q_i(t), p_j(t')]_{t=t'} &= i\delta_{ij}, \end{aligned}$$

где  $q_i$  — обобщенные координаты;  $p_i \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i$  — соответствующие им обобщенные импульсы.

**1.5.4. Инвариантность теории по отношению к обращению времени и связь спина со статистикой.** В § 1.4 мы изучали законы сохранения 4-импульса и 4-момента поля исходя из требования инвариантности лагранжиана относительно преобразований собственной группы Лоренца. Теперь рассмотрим преобразования полей, связанные с инверсией пространства и времени, и покажем, что требование инвариантности лагранжиана относительно обращения времени приводит к однозначной связи между спином частиц и способом квантования соответствующих полей: частицы, связанные с фермионными полями, должны обладать полуцелым спином, а частицы, связанные с бозонными полями, — целым спином. Это утверждение носит название теоремы Паули [1, 12, 13].

Как мы видели, лагранжиан (1.3.5) инвариантен по отношению к преобразованиям группы Лоренца

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x') = S(a)\chi(x), \quad x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu,$$

если выполняются соотношения

$$\tilde{S} B^\mu S = a^\mu_\nu B^\nu,$$

причем в силу эрмитовости полей  $\chi(x)$  матрица  $S$  должна быть вещественной.

Преобразованию пространственного отражения  $x'_1 = -x_1, x'_2 = x_2, x'_3 = x_3, x'_0 = x_0$  соответствует матрица  $S = P$ , удовлетворяющая соотношениям

$$\tilde{P} B^1 P = -B^1, \quad \tilde{P} B^\mu P = B^\mu, \quad \mu = 2, 3, 0. \quad (1.5.36)$$

Преобразованию обращения времени  $x'_k = x_k (k = 1, 2, 3), x'_0 = -x_0$  соответствует матрица  $S = T$ , удовлетворяющая соотношениям

$$\tilde{T} B^0 T = -B^0, \quad \tilde{T} B^i T = B^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.5.37)$$

Матрицы  $B^\mu$  имеют блочную структуру (см. (1.3.6)), причем блок  $B_a^\mu$  связан с бозе-полем  $\varphi$ , а блок  $B_s^\mu$  — с ферми-полем  $\psi$ . В соответствии с этим матрицу  $T$  также можно представить

в виде

$$T = \begin{pmatrix} T_\varphi & 0 \\ 0 & T_\psi \end{pmatrix},$$

где матрица  $T_\varphi$  определяет преобразование обращения времени бозе-поля, а матрица  $T_\psi$  — ферми-поля. Эти матрицы, очевидно, удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{T}_\psi B_s^0 T_\psi = -B_s^0, \quad \tilde{T}_\psi B_s^k T_\psi = B_s^k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.5.38)$$

$$\tilde{T}_\varphi B_a^0 T_\varphi = -B_a^0, \quad \tilde{T}_\varphi B_a^k T_\varphi = B_a^k, \quad k = 1, 2, 3.$$

В разделе 1.5.2 было показано, что матрица  $B_s^0$  является положительно определенной, т. е.  $a_i^* (B_s^0)_{ij} a_j \geq 0$  для любых комплексных чисел  $a_i$ . Из первого уравнения (1.5.38) следует, что

$$(T_\psi^* a)_i^* (B_s^0)_{ij} (T_\psi a)_j = -a_i^* (B_s^0)_{ij} a_j, \quad (1.5.39)$$

поэтому в силу положительной определенности матрицы  $B_s^0$  уравнение (1.5.39) не может удовлетворяться, если матрица  $T_\psi$  вещественна. Однако, как следует из формулы (1.5.39), чисто мнимая матрица  $T_\psi$  может удовлетворять соотношениям (1.5.39). Но для чисто мнимой матрицы  $T_\psi$  поля  $\psi'(x')$  будут, согласно (1.3.18), не эрмитовыми, а антиэрмитовыми. Поэтому казалось бы преобразование обращения времени нельзя включить в число элементов симметрии лагранжиана (1.3.5). Можно, однако, сохранить эрмитовость поля  $\psi'(x')$ , если потребовать, чтобы поля  $\varphi$  и  $\psi$  преобразовывались при обращении времени не по формулам

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = T_\varphi \varphi(x), \quad (1.5.40)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = T_\psi \psi(x), \quad x'_0 = -x_0$$

классической теории, а по формулам

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = T_\varphi \varphi^T(x), \quad (1.5.41)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = iT_\psi \psi^T(x), \quad x'_0 = -x_0$$

квантовой теории, в которой поля  $\varphi$ ,  $\psi$  являются операторами. Здесь индекс  $T$  над полями  $\varphi$  и  $\psi$  (так же как знак  $\sim$  над матрицами) служит для обозначения операции транспонирования в гильбертовом пространстве

$$(\Phi_i, \varphi^T \Phi_j) = (\Phi_j, \varphi \Phi_i), \quad (\Phi_i, \psi^T \Phi_j) = (\Phi_j, \psi \Phi_i),$$

где  $\Phi_i$  — некоторый базис в гильбертовом пространстве, в котором определяется операция транспонирования. Операция транспонирования физически соответствует замене начального

состояния конечным и конечного состояния начальным при обращении времени.

Ясно, что при преобразовании (1.5.41) нарушается инвариантность лагранжиана в смысле

$$\mathcal{L}(\chi(x), \partial_\mu \chi(x)) = \mathcal{L}(\chi'(x'), \partial'_\mu \chi'(x')). \quad (1.5.42)$$

Однако, как мы покажем, уравнения поля и перестановочные соотношения для полей будут инвариантны по отношению к преобразованию обращения времени (1.5.41).

Чтобы убедиться в инвариантности уравнений движения по отношению к преобразованиям (1.5.41), достаточно, очевидно, показать, что имеет место соотношение

$$\mathcal{L}(\chi(x), \partial_\mu \chi(x)) = \mathcal{L}'(\chi'(x'), \partial'_\mu \chi'(x')), \quad x'_0 = -x_0, \quad (1.5.43)$$

которое заменяет теперь соотношение (1.5.42).

Рассмотрим с этой целью часть лагранжиана  $\mathcal{L}_0$ , зависящую от производных поля  $\chi$  (см. (1.3.7)). В случае бозе-полей, согласно (1.3.7),  $\mathcal{L}_0$  имеет вид

$$\mathcal{L}_0^\varphi(\varphi, \partial_\mu \varphi) = -\frac{i}{4} \{\partial_\mu \varphi, B_a^\mu \varphi\}.$$

Поэтому, согласно (1.5.41) и (1.5.38), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^\varphi(\varphi', \partial'_\mu \varphi') &= -\frac{i}{4} \{\partial'_\mu \varphi'^T(x), \tilde{T}_\varphi B_a^\mu T_\varphi \varphi'^T(x)\} = \\ &= -\frac{i}{4} \{\partial_\mu \varphi^T(x), B_a^\mu \varphi^T(x)\}, \end{aligned}$$

откуда и следует, что  $\mathcal{L}_0^\varphi(\varphi, \partial_\mu \varphi) = \mathcal{L}_0^\varphi(\varphi', \partial'_\mu \varphi')^T$ .

В случае ферми-полей, согласно (1.3.7),  $\mathcal{L}_0$  имеет вид

$$\mathcal{L}_0^\psi(\psi, \partial_\mu \psi) = -\frac{i}{4} [\partial_\mu \psi, B_s^\mu \psi].$$

Поэтому, согласно (1.5.41) и (1.5.38), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^\psi(\psi', \partial'_\mu \psi') &= \frac{i}{4} [\partial'_\mu \psi'^T(x), \tilde{T}_\psi B_s^\mu T_\psi \psi'^T(x)] = \\ &= \frac{i}{4} [\partial_\mu \psi^T(x), B_s^\mu \psi^T(x)], \end{aligned}$$

откуда и следует, что  $\mathcal{L}_0^\psi(\psi, \partial_\mu \psi) = \mathcal{L}_0^\psi(\psi', \partial'_\mu \psi')^T$ . Подчеркнем, что инвариантность лагранжиана  $\mathcal{L}_0^\psi$  относительно преобразования обращения времени (1.5.41) в смысле (1.5.43) достигается благодаря присутствию в преобразовании (1.5.41) как множителя  $i$ , так и операции транспонирования полей.

Чтобы полный лагранжиан был инвариантен относительно преобразования обращения времени, необходимо, чтобы

оператор  $U(\chi)$ , входящий в (1.3.5), удовлетворял соотношению

$$U(\varphi, \psi) = U(\varphi', \psi')^T.$$

В случае свободного бозе-поля оператор  $U(\chi) \equiv U^\varphi(\varphi)$  определяется формулой (1.3.22'), в которой, согласно (1.3.23), матрица  $\mathcal{S}_s$  удовлетворяет соотношению

$$\tilde{T}_\varphi \mathcal{S}_s T_\varphi = \mathcal{S}_s. \quad (1.5.44)$$

Из (1.5.41) и (1.5.44) следует, что

$$U^\varphi(\varphi') = \frac{1}{4} \{\varphi^T(x), \tilde{T}_\varphi \mathcal{S}_s T_\varphi \varphi^T(x)\} = \frac{1}{4} \{\varphi^T(x), \mathcal{S}_s \varphi^T(x)\},$$

поэтому  $U^\varphi(\varphi') = U^\varphi(\varphi)^T$ .

В случае свободного ферми-поля оператор  $U(\chi) \equiv U^\psi(\psi)$  определяется формулой (1.3.23'), в которой, согласно (1.3.23), матрица  $\mathcal{S}_a$  удовлетворяет соотношению

$$\tilde{T}_\psi \mathcal{S}_a T_\psi = \mathcal{S}_a. \quad (1.5.45)$$

Из (1.5.41) и (1.5.45) следует, что

$$\begin{aligned} U^\psi(\psi') &= -\frac{1}{4} [\psi^T(x), \tilde{T}_\psi \mathcal{S}_a T_\psi \psi^T(x)] = \\ &= -\frac{1}{4} [\psi^T(x), \mathcal{S}_a \psi^T(x)], \end{aligned}$$

поэтому  $U^\psi(\psi') = U^\psi(\psi)^T$ . Подчеркнем, что инвариантность  $U^\psi(\psi)$  относительно преобразования обращения времени (1.5.41) достигается благодаря присутствию в преобразовании (1.5.41) как множителя  $i$ , так и операции транспонирования полей.

Перейдем теперь к доказательству инвариантности перестановочных соотношений (1.5.19')

$$\begin{aligned} [B_a^0 \varphi(x_1), B_a^0 \varphi(x_2)]_{t_1=t_2} &= B_a^0 \delta(x_1 - x_2), \\ [B_s^0 \psi(x_1), B_s^0 \psi(x_2)]_{t_1=t_2} &= B_s^0 \delta(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

относительно преобразований обращения времени (1.5.41).

В случае бозе-полей из (1.5.41), (1.5.38) следует, что

$$\begin{aligned} [B_a^0 \varphi'(x'_1), B_a^0 \varphi'(x'_2)]_{t'_1=t'_2} &= \tilde{T}_\varphi^{-1} [B_a^0 \varphi^T(x_1), B_a^0 \varphi^T(x_2)]_{t_1=t_2} T_\varphi^{-1} = \\ &= -\tilde{T}_\varphi^{-1} [B_a^0 \varphi(x_1), B_a^0 \varphi(x_2)]_{t_1=t_2}^T T_\varphi^{-1}, \end{aligned}$$

откуда, используя (1.5.19'), (1.5.38), получаем

$$\begin{aligned} [B_a^0 \varphi'(x'_1), B_a^0 \varphi'(x'_2)]_{t'_1=t'_2} &= -\delta(x_1 - x_2) \tilde{T}_\varphi^{-1} B_a^0 T_\varphi^{-1} = \\ &= B_a^0 \delta(x'_1 - x'_2). \end{aligned}$$

Мы видим, что для инвариантности перестановочных соотношений (1.5.19') для бозе-полей существенно необходимо присутствие в преобразовании (1.5.41) операции транспонирования.

В случае ферми-полей из (1.5.41), (1.5.38) следует, что

$$\begin{aligned} [B_s^0 \psi'(x'_1), B_s^0 \psi'(x'_2)]_{t'_1=t'_2} &= -\tilde{T}_\psi^{-1} [B_s^0 \psi^T(x_1), B_s^0 \psi^T(x_2)]_{t_1=t_2} T_\psi^{-1} = \\ &= -\tilde{T}_\psi^{-1} [B_s^0 \psi(x_1), B_s^0 \psi(x_2)]_{t_1=t_2}^T T_\psi^{-1}, \end{aligned}$$

откуда, используя (1.5.19'), (1.5.38), получаем

$$\begin{aligned} [B_s^0 \psi'(x'_1), B_s^0 \psi'(x'_2)]_{t'_1=t'_2} &= -\delta(x_1 - x_2) \tilde{T}_\psi^{-1} B_s^0 T_\psi^{-1} = \\ &= B_s^0 \delta(x'_1 - x'_2). \end{aligned}$$

Подчеркнем, что инвариантность перестановочных соотношений (1.5.19') для ферми-полей относительно обращения времени существенно связана с присутствием множителя  $i$  в преобразовании (1.5.41) для полей  $\psi$ .

Покажем теперь, что матрица  $T$ , удовлетворяющая соотношениям (1.5.38), будет вещественной в случае полей с целым спином и мнимой в случае полей с полуцелым спином. Отсюда и из требования инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}$  и перестановочных соотношений относительно обращения времени (1.5.41) и будет следовать, что поля с целым спином являются бозе-полями, а поля с полуцелым спином — ферми-полями (это следует из того, что в случае бозе-полей матрица  $T_\varphi$  вещественна, а в случае ферми-полей матрица  $T_\psi$  — мнимая).

Переходя к доказательству, заметим, что благодаря инвариантности  $\mathcal{L}_0$  по отношению к собственной группе Лоренца имеет место соотношение (1.3.20)

$$i(\tilde{\Sigma}_{\rho\nu} B^\mu + B^\mu \Sigma_{\rho\nu}) = \delta_\rho^\mu B_\nu - \delta_\nu^\mu B_\rho.$$

Если ввести матрицу

$$B^\mu(\alpha) = e^{\alpha \tilde{\Sigma}_{10}} B^\mu e^{\alpha \Sigma_{10}},$$

то, согласно (1.3.20), она будет удовлетворять соотношению

$$B^\mu(\alpha) \equiv \frac{dB^\mu(\alpha)}{d\alpha} = i\delta_0^\mu B_1(\alpha) - i\delta_1^\mu B_0(\alpha),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} B^0(\alpha) &= B^0 \cos \alpha - iB^1 \sin \alpha, \\ B^1(\alpha) &= -iB^0 \sin \alpha + B^1 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.5.46)$$

Покажем теперь, что матрица

$$T \equiv e^{\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}} P e^{-\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}}, \quad (1.5.47)$$

где  $P$  — матрица, соответствующая преобразованию  $x_1 \rightarrow -x_1$  (см. (1.5.36)), удовлетворяет соотношениям (1.5.37) и, следовательно, может быть принята в качестве матрицы  $T$ , фигурирующей в преобразовании обращения времени (1.5.41). Действительно, из формул (1.5.46) и (1.5.47) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{T} B^0 T &= e^{-\frac{\pi}{2} \tilde{\Sigma}_{10}} \tilde{P} e^{\frac{\pi}{2} \tilde{\Sigma}_{10}} B^0 e^{\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}} P e^{-\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}} = \\ &= -ie^{-\frac{\pi}{2} \tilde{\Sigma}_{10}} \tilde{P} B^1 P e^{-\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}}. \end{aligned}$$

Замечая, что  $\tilde{P} B^1 P = -B^1$  и снова используя формулы (1.5.46), имеем

$$\tilde{T} B^0 T = ie^{-\frac{\pi}{2} \tilde{\Sigma}_{10}} B^1 e^{-\frac{\pi}{2} \Sigma_{10}} = -B^0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\tilde{T} B^1 T = B^1.$$

Заметим теперь, что для преобразований  $S$  полной группы Лоренца справедливо соотношение

$$S^{-1} \Sigma_{\mu\nu} S = a_{\mu\rho} a_{\nu\lambda} \Sigma^{\rho\lambda},$$

из которого следует, что

$$\Sigma_{10} P = -P \Sigma_{10}.$$

Поэтому

$$T = e^{\pi \Sigma_{10}} P. \quad (1.5.48)$$

В силу эрмитовости поля матрица  $P$  вещественна,  $P^* = P$ , а матрица  $\Sigma_{10}$  мнима,  $\Sigma_{10}^* = -\Sigma_{10}$ . Поэтому

$$T^* = e^{-\pi \Sigma_{10}} P$$

и, следовательно,

$$T^* = e^{2\pi i(i\Sigma_{10})} T.$$

Покажем, что спектр собственных значений матрицы  $i\Sigma_{10}$  совпадает со спектром матрицы  $\Sigma_2 \equiv \Sigma_{31}$ . Действительно, согласно (1.1.33), справедливы формулы

$$[\Sigma_2, \Sigma_{30}] = \Sigma_{10}, \quad [\Sigma_{10}, \Sigma_{30}] = \Sigma_2.$$

Ввод матрицы

$$\Sigma_2(\alpha) = e^{-\alpha \Sigma_{30}} \Sigma_2 e^{\alpha \Sigma_{30}}, \quad \Sigma_{10}(\alpha) = e^{-\alpha \Sigma_{30}} \Sigma_{10} e^{\alpha \Sigma_{30}}$$

и используя (1.5.49), получаем

$$\Sigma_2(\alpha) = \Sigma_{10}(\alpha), \quad \Sigma_{10}(\alpha) = \Sigma_2(\alpha).$$

Отсюда ясно, что

$$\Sigma_2(\alpha) \equiv e^{-\alpha \Sigma_{30}} \Sigma_2 e^{\alpha \Sigma_{30}} = \Sigma_2 \operatorname{ch} \alpha + \Sigma_{10} \operatorname{sh} \alpha.$$

Полагая в этой формуле  $\alpha = \frac{\pi}{2} i$ , находим

$$i\Sigma_{10} = e^{-\frac{\pi}{2} i\Sigma_{30}} \Sigma_2 e^{\frac{\pi}{2} i\Sigma_{30}},$$

откуда и следует, что спектры матриц  $\Sigma_2$  и  $i\Sigma_{10}$  совпадают.

Так как собственные значения матрицы  $\Sigma_2$  являются целыми числами для полей с целым спином и полуцелыми числами для полей с полуцелым спином, то матрица  $T$  будет вещественной для полей с целым спином и мнимой для полей с полуцелым, откуда и следует теорема Паули о связи спина со статистикой.

## § 1.6. Матрица рассеяния

**1.6.1. Операторы рождения и уничтожения частиц и состояние вакуума.** В предыдущем параграфе мы видели, что в квантовой теории физические поля являются операторами, удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям. Мы покажем теперь, что при таком квантовом описании мы естественно приходим к корпускулярной картине поля. Для разъяснения начнем с рассмотрения свободного поля. Согласно (1.3.12), (1.3.22'), эти уравнения имеют вид для бозе-полей

$$(iB_a^\mu \partial_\mu - \mathcal{E}_s) \varphi(x) = 0 \quad (1.6.1)$$

и вид для ферми-полей

$$(iB_s^\mu \partial_\mu - \mathcal{E}_a) \psi(x) = 0 \quad (1.6.2)$$

(индекс  $a$  при матрицах  $B$ ,  $\mathcal{E}$  означает, что они антисимметричны, индекс  $s$ , что они симметричны). Будем искать решения этих уравнений в виде плоских волн  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x) \sim \exp(-ipx)$ , где  $px = p_0 t - \mathbf{p}x$ . В случае релятивистски инвариантных уравнений  $p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_a^2}$ , где  $m_a$  — масса «частиц», связанных с полем, причём каждому сорту «частиц»  $a$  соответствует две частоты  $p_0$ , отличающиеся знаком (см. уравнение (1.6.14)). Поэтому решения уравнений (1.6.1), (1.6.2) будем искать в виде

$$\varphi(x), \psi(x) = u^{(s)}(\mathbf{p}) e^{-iqp_a x}, \quad p_a = (p_{a0}, \mathbf{p}), \quad (1.6.3)$$

где  $q = \pm 1$  и  $p_{a0} = \sqrt{p^2 + m_a^2}$ . Величины  $u^{qa}(p)$  удовлетворяют уравнению

$$(\hat{q}p_a - \mathcal{E}) u^{qa}(p) = 0, \quad \hat{p}_a = B^\mu p_{a\mu} \quad (1.6.4)$$

(для простоты мы опустили индексы  $a$  и  $s$  у матриц  $B^\mu$  и  $\mathcal{E}$ ). Это уравнение можно переписать в виде

$$H u^{qa}(qp) = q p_{a0} B^0 u^{qa}(qp), \quad H = Bp + \mathcal{E}. \quad (1.6.5)$$

Так как матрицы  $B^\mu$  и  $\mathcal{E}$  эрмитовы, то эрмитовыми будут и матрицы  $B^0$  и  $H$ . Уравнению (1.6.5) можно придать вид уравнения для определения собственных функций  $u_\alpha^{qa}(qp)$  и собственных значений оператора  $\mathcal{H} = B^{0-1}H$

$$\mathcal{H} u^{qa}(qp) = q p_{a0} u^{qa}(qp), \quad \mathcal{H} = B^{0-1}H \quad (1.6.6)$$

(мы предполагаем, что матрица  $B^{0-1}$  существует). Однако оператор  $\mathcal{H}$  в стандартном скалярном произведении  $(u, u') \equiv u^* u'$  не является эрмитовым. Однако он будет эрмитовым, если в качестве скалярного произведения ввести величину

$$\langle u, u' \rangle = (u, B^0 u') \equiv u^* B^0 u'. \quad (1.6.7)$$

Действительно,

$$\langle u, \mathcal{H} u' \rangle = (u, H u'),$$

откуда, используя эрмитовость матрицы  $H$  в обычном скалярном произведении, имеем

$$\langle u, \mathcal{H} u' \rangle = \langle \mathcal{H} u, u' \rangle, \quad \mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}. \quad (1.6.8)$$

Напомним, что матрица  $\mathcal{A}^\dagger$  эрмитовски сопряжена матрице  $\mathcal{A}$  в скалярном произведении  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , если

$$\langle u, \mathcal{A} u' \rangle = \langle \mathcal{A}^\dagger u, u' \rangle. \quad (1.6.9)$$

В случае ферми-полей матрица  $B^0$ , как мы видели, является положительно определенной, поэтому скалярное произведение (1.6.7) будет соответствовать дефинитной метрике

$$\langle u, u \rangle > 0. \quad (1.6.10)$$

В случае бозе-полей матрица  $B^0$  не является положительно определенной (см. (1.6.14)), поэтому скалярное произведение (1.6.7) будет соответствовать индефинитной метрике

$$\langle u, u \rangle = \pm | \langle u, u \rangle |. \quad (1.6.10')$$

Так как в уравнении (1.6.6) собственные значения  $q p_{a0}$  могут быть вырождены, то можно ввести систему эрмитовых матриц  $\mathcal{A}$  (в скалярном произведении  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ), коммутирующих с  $\mathcal{H}$

$$[\mathcal{H}, \mathcal{A}] = 0, \quad (1.6.11)$$

для которых величины  $u^{qa}(qp)$  будут собственными векторами, принадлежащими собственным значениям  $a$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} u^{qa}(qp) &= q p_{a0} u^{qa}(qp), \\ \mathcal{A} u^{qa}(qp) &= a u^{qa}(qp). \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Поскольку операторы  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{A}$  эрмитовы, то собственные функции  $u_\alpha^{qa}(qp)$  образуют полную ортонормированную (в скалярном произведении  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) систему в пространстве функций  $f_\alpha$  ( $\alpha$  — индекс поля).

В случае ферми-полей систему функций  $u_\alpha^{qa}(qp)$  можно считать ортонормированной (см. (1.6.10))

$$\langle u^{qa}(qp), u^{q'a'}(q'p) \rangle \equiv u^{qa}(qp)^* B^0 u^{q'a'}(q'p) = \delta_{qq'} \delta_{aa'} 2p_{0a}. \quad (1.6.13)$$

В случае бозе-полей мы покажем, что если матрица  $\mathcal{E}$  является положительно определенной, то

$$\text{sgn} \langle u^{qa}(qp), u^{qa}(qp) \rangle = q, \quad (1.6.14)$$

поэтому можно считать систему функций  $u_\alpha^{qa}(qp)$  ортонормированной согласно условию

$$\langle u^{qa}(qp), u^{q'a'}(q'p) \rangle \equiv u^{qa}(qp)^* B^0 u^{q'a'}(q'p) = 2p_{0a} q \delta_{qq'} \delta_{aa'}. \quad (1.6.15)$$

Чтобы убедиться в справедливости соотношения (1.6.14), заметим, что при  $p = 0$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \equiv B^{0-1} \mathcal{E}$ . Поэтому из (1.6.12) имеем  $\langle u^{qa}(0), \mathcal{H}_0 u^{qa}(0) \rangle = q m_a \langle u^{qa}(0), u^{qa}(0) \rangle \equiv u^{qa}(0)^* \times \mathcal{E} u^{qa}(0)$ . Отсюда из положительной определенности матрицы  $\mathcal{E}$  следует, что

$$\text{sgn} \langle u^{qa}(0), u^{qa}(0) \rangle = q.$$

Соотношение (1.6.14) справедливо и при  $p \neq 0$ . Естественно считать, что  $u(p) = S u(0)$  ( $S$  — матрица преобразований Лоренца, см. (1.3.18)), поэтому величина  $u^{qa^*}(p) B^\mu u^{qa}(p)$  является 4-вектором пропорциональным  $p_a^\mu$ , а так как  $p_a^\mu$  представляет собой временноподобный вектор, то знак этой величины при  $\mu = 0$  должен совпадать со знаком этой же величины при  $p = 0$ , что и требовалось доказать.

Поскольку  $u^{qa^*}(qp) B^0 u^{qa}(qp)$  есть 4-я компонента вектора, то в условия нормировки (1.6.13), (1.6.15) мы ввели множитель  $2p_{0a}$ . Такая нормировка является релятивистски инвариантной.

Сформулируем теперь условие полноты функций  $u_\alpha^{qa}(qp)$ . Это условие означает, что произвольную функцию  $f_\alpha$  можно



представить в виде

$$f_\alpha = \sum_{qa} C_{qa} u_\alpha^{qa}(qp).$$

откуда, используя условие ортонормировки в случае бозе-поля, имеем

$$C_{qa} = \frac{q}{2p_{0a}} u^{qa}(qp)^* B^0 f,$$

следовательно,

$$f_\alpha = \sum_{qa} \frac{1}{2p_{0a}} q u_\alpha^{qa}(qp) u^{qa}(qp)^* B^0 f.$$

Поэтому в случае бозе-полей условие полноты можно сформулировать в виде

$$\sum_{qa} \frac{q}{2p_{0a}} u_\alpha^{qa}(qp) u_\beta^{qa}(qp)^* = B_{\alpha\beta}^{0-1}. \quad (1.6.16)$$

Аналогично, в случае ферми-полей условия полноты имеет вид

$$\sum_{qa} \frac{1}{2p_{0a}} u_\alpha^{qa}(qp) u_\beta^{qa}(qp)^* = B_{\alpha\beta}^{0-1}. \quad (1.6.17)$$

Отметим, наконец, что можно считать справедливыми соотношения

$$u^{qa}(p)^* = u^{-qa}(p). \quad (1.6.18)$$

Действительно, согласно (1.3.8), (1.3.22'),  $B_a^{u^*} = -B_a^u$ ,  $\mathcal{E}_a^* = -\mathcal{E}_a$ ,  $B_s^{u^*} = B_s^u$ ,  $\mathcal{E}_s^* = \mathcal{E}_s$ . Поэтому, выбирая матрицы  $\mathcal{A}$  вещественными,  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ , имеем

$$(-iB^u p_{au} - \mathcal{E}) u^{qa}(p)^* = 0, \quad \mathcal{A} u^{qa}(p)^* = a u^{qa}(p)^*,$$

откуда и следует соотношение (1.6.18).

Свободные поля  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ , удовлетворяющие уравнениям (1.6.1), (1.6.2), можно разложить по плоским волнам

$$\varphi(x), \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{pa} \frac{1}{\sqrt{2p_{0a}}} \{ u^a(p) e^{-ip_a x} \hat{a}_{ap} + u^a(p)^* e^{ip_a x} \hat{a}_{ap}^+ \}, \quad (1.6.19)$$

где  $u^a(p) \equiv u^{1a}(p)$ ,  $u^a(p)^* \equiv u^{-1a}(p)$  и  $\hat{a}_{ap}$ ,  $\hat{a}_{ap}^+$  — коэффициенты разложения, представляющие собой операторы, действующие в пространстве векторов состояний квантованных полей. Благодаря соотношению  $u^j(p)^* = u^{-ja}(p)$ , поля  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  являются эрмитовыми.

Покажем, что в случае бозе-полей операторы  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\hat{a}_{ap}, \hat{a}_{a'p'}^+] = \delta_{pp'} \delta_{aa'}, \quad [\hat{a}_{ap}, \hat{a}_{a'p'}] = 0, \quad (1.6.20)$$

а в случае ферми-полей — перестановочным соотношениям

$$\{\hat{a}_{ap}, \hat{a}_{a'p'}^+\} = \delta_{pp'} \delta_{aa'}, \quad \{\hat{a}_{ap}, \hat{a}_{a'p'}\} = 0. \quad (1.6.21)$$

Легко в этом убедиться, показав, что из соотношений (1.6.20), (1.6.21) вытекают соотношения (1.5.19), (1.5.19'). Действительно, из (1.6.20), (1.6.21) следует, что

$$[\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')] = iG_{\alpha\beta}^0(x-x'), \quad (1.6.22)$$

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = iG_{\alpha\beta}^0(x-x'),$$

где

$$G_{\alpha\beta}^0(x) = \frac{1}{V} \sum_{pa} \frac{1}{2p_{0a}} \{ u_\alpha^a(p) u_\beta^a(p)^* e^{-ip_a x} - u_\alpha^a(p)^* u_\beta^a(p) e^{ip_a x} \}, \quad (1.6.23)$$

$$G_{\alpha\beta}^0(x) = \frac{1}{V} \sum_{pa} \frac{1}{2p_{0a}} \{ u_\alpha^a(p) u_\beta^a(p)^* e^{-ip_a x} + u_\alpha^a(p)^* u_\beta^a(p) e^{ip_a x} \}.$$

Полагая в этих формулах  $t = t'$  и используя условия полноты (1.6.16), (1.6.17), для бозе- и ферми-полей имеем

$$[\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')]_{t=t'} = B_{\alpha\beta}^0 \delta(x-x'),$$

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\}_{t=t'} = B_{\alpha\beta}^0 \delta(x-x').$$

Эти формулы совпадают с формулами (1.5.19), (1.5.19'), что и требовалось доказать.

Так как функции  $G^0(x)$ ,  $G^0(x)$  при преобразованиях Лоренца преобразуются как левые части уравнений (1.6.22) и обращаются в нуль при  $t = 0$  ( $x \neq 0$ ), то они равны нулю всюду вне светового конуса

$$G^0(x) = G^0(x) = 0, \quad x^2 = x_\mu x^\mu < 0 \quad (1.6.22')$$

(см. также конкретные свободные поля в гл. 2). Перейдем теперь к построению векторов состояний квантованного свободного поля. Определим состояние вакуума  $\Phi_0$  как состояние с наименьшей энергией, в котором энергия и импульс поля равны нулю:

$$P_\mu \Phi_0 = 0. \quad (1.6.24)$$

Поскольку оператор  $P_\mu$  представляет собой оператор пространственно-временного сдвига, то, согласно уравнениям (1.5.30), (1.6.19),

$$[P_\mu, \hat{a}_{ap}] = -p_{\mu a} \hat{a}_{ap}, \quad [P_\mu, \hat{a}_{ap}^+] = p_{\mu a} \hat{a}_{ap}^+ \quad (1.6.25)$$

и, следовательно,

$$P_{\mu} \hat{a}_{\alpha p} \Phi_0 = -p_{\mu\alpha} \hat{a}_{\alpha p}^{\dagger} \Phi_0, \quad P_{\mu} \hat{a}_{\alpha p}^{\dagger} \Phi_0 = p_{\mu\alpha} \hat{a}_{\alpha p}^{\dagger} \Phi_0.$$

Первая из этих формул показывает, что

$$\hat{a}_{\alpha p} \Phi_0 = 0 \quad (1.6.24')$$

(в противном случае имелись бы состояния с отрицательной энергией, что противоречит определению вакуума). Поэтому оператор  $\hat{a}_{\alpha p}$ , обращающий в нуль состояние вакуума, может быть назван оператором уничтожения частицы. Так как  $P_{\mu} \hat{a}_{\alpha p}^{\dagger} \Phi_0 = p_{\mu\alpha} \hat{a}_{\alpha p}^{\dagger} \Phi_0$ , то оператор  $\hat{a}_{\alpha p}^{\dagger}$  может быть назван оператором рождения частицы с 4-импульсом  $p_{\mu\alpha} \equiv (p_{0\alpha}, \mathbf{p})$ ,  $p_{0\alpha} > 0$ .

Определим теперь положительно и отрицательно частотные части операторов: положительно частотная часть  $f^{(+)}(t)$  функции (оператора)  $f(t)$  определяется как

$$f^{(+)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} f(\omega), \quad (1.6.26)$$

где  $f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t)$  — фурье-компонента функции  $f(t)$ ;

отрицательно частотная часть функции  $f(t)$  определяется формулой

$$f^{(-)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 d\omega e^{-i\omega t} f(\omega).$$

Например,

$$\varphi^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p\alpha} \frac{1}{\sqrt{2p_{0\alpha}}} u^{\alpha}(\mathbf{p}) e^{-ip_{\alpha}x} \hat{a}_{\alpha p}.$$

Тогда состояние вакуума поля  $\chi$  удовлетворяет, согласно (1.6.24'), соотношению

$$\chi^{(+)}(x) \Phi_0 = 0. \quad (1.6.27)$$

Из (1.6.24), (1.6.25) следует, что

$$P_{\mu} \hat{a}_{\alpha p_1}^{\dagger} \dots \hat{a}_{\alpha p_n}^{\dagger} \Phi_0 = (p_1 + \dots + p_n)_{\mu} \hat{a}_{\alpha p_1}^{\dagger} \dots \hat{a}_{\alpha p_n}^{\dagger} \Phi_0.$$

Поэтому вектор  $\hat{a}_{\alpha p_1}^{\dagger} \dots \hat{a}_{\alpha p_n}^{\dagger} \Phi_0$  определяет состояние, в котором имеется  $n$  частиц с импульсами  $p_1, \dots, p_n$ . Далее, при изучении конкретных полей мы выясним физический смысл индекса  $\alpha$  при операторе рождения  $\hat{a}_{\alpha p}^{\dagger}$  и уничтожения  $\hat{a}_{\alpha p}$  частиц. Именно этот индекс будет определять квантовые числа частиц, связанные со спиновыми и внутренними свойствами симметрии частиц.

**1.6.2. S-матрица.** В предыдущем пункте мы рассматривали свободные поля и соответствующие им свободные частицы. Однако поля и частицы взаимодействуют между собой, поэтому возникает вопрос об описании этого взаимодействия. Это взаимодействие проявляется в процессах рассеяния, рождения и аннигиляции частиц. Для описания этих физических процессов взаимодействия вводится матрица рассеяния. Она тесно связана с оператором преобразования  $S(t, 0)$ , который можно рассматривать как оператор эволюции векторов состояний в представлении взаимодействия (см. п. 1.5.1)  $\Phi(t) = S(t, 0) \Phi(0)$ .

Задача о рассеянии ставится следующим образом: задан вектор состояния системы частиц  $\Phi(t)$  в момент времени  $t = -\infty$ , когда частицы могут считаться невзаимодействующими; требуется определить вектор состояния  $\Phi(t)$  в момент времени  $t = +\infty$ , когда частицы после взаимодействия снова становятся свободными. Из формулы (1.5.6) следует, что

$$\Phi(t) = S(t, t_0) \Phi(t_0), \quad (1.6.28)$$

где

$$S(t, t_0) = S(t, 0) S^{\dagger}(t_0, 0).$$

Полагая  $t_0 = -\infty$ ,  $t = +\infty$  и считая, что в эти моменты взаимодействие выключено, находим матрицу рассеяния

$$S = S(\infty, -\infty) = S(\infty, 0) S^{\dagger}(-\infty, 0), \quad (1.6.29)$$

связывающую состояния  $\Phi(-\infty)$  и  $\Phi(\infty)$ .

Согласно (1.6.28), оператор  $S(t, t_0)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$i \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = \tilde{V}(t) S(t, t_0) \quad (1.6.30)$$

и начальному условию  $S(t_0, t_0) = 1$ . Отсюда следует, что разложение  $S(t, t_0)$  по степеням  $V$  имеет вид

$$S(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t, t_0), \quad (1.6.31)$$

$$S_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n V(\tau_1) \dots V(\tau_n).$$

Оператор  $S_n(t, t_0)$  можно записать также в виде

$$S_n(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n T \{ V(\tau_1) \dots V(\tau_n) \}, \quad (1.6.32)$$

где символ  $T$  служит для обозначения операции хронологического упорядочения:

$$T \{ \underline{V}(\tau_1) \dots \underline{V}(\tau_n) \} = \underline{V}(\tau_i) \dots \underline{V}(\tau_{i_n}), \quad \tau_{i_1} \geq \tau_{i_2} \geq \dots \geq \tau_{i_n} \quad (1.6.33)$$

(в правой части этого соотношения выписаны те же операторы, что и в левой части, но расположенные в хронологическом порядке).

Действительно, легко видеть, что при  $t > t_0$ , согласно определению  $T$ -произведения, имеет место формула

$$i \frac{\partial S_n(t, t_0)}{\partial t} = \frac{(-i)^{n-1}}{(n-1)!} \underline{V}(t) \int_{t_0}^t d\tau_2 \dots \int_{t_0}^t d\tau_n T \{ \underline{V}(\tau_2) \dots \dots \underline{V}(\tau_n) \} = \underline{V}(t) S_{n-1}(t, t_0).$$

К такому же уравнению приводит и формула (1.6.31). Отсюда и следует эквивалентность выражения (1.6.32), (1.6.31).

Используя (1.6.29), (1.6.32) и предполагая, что взаимодействие  $\underline{V}(t)$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  выключается, можно представить матрицу рассеяния в виде \*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n, \quad (1.6.34)$$

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_n e^{-i(\tau_1 + \dots + \tau_n)} \times T \{ \underline{V}(\tau_1) \dots \underline{V}(\tau_n) \}$$

( $\epsilon \rightarrow +0$ ) или символически в виде

$$S = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \underline{V}(\tau) \right). \quad (1.6.35)$$

Обозначим начальный вектор состояния через  $\Phi_i \equiv \Phi(-\infty)$ . Это состояние характеризуется определенным набором невзаимодействующих частиц, обладающих заданными импульсами и заданными квантовыми числами, связанными с внутренними степенями свободы. Это состояние можно представить в виде

$$\Phi_i = \hat{a}_{a_1 p_1}^+ \dots \hat{a}_{a_n p_n}^+ \Phi_0,$$

где  $\Phi_0$  — вектор состояния вакуума невзаимодействующих полей;  $\hat{a}_{a p}^+$  — оператор рождения частицы, введенной в предыдущем пункте. Это состояние при  $t \rightarrow \infty$  переходит в состояние

\* Этот результат был получен Дайсоном [14].

$\Phi_f(\infty)$ ,

$$\Phi_f(\infty) = S \Phi_i$$

Интересующее нас конечное состояние  $\Phi_f$  характеризуется также определенным набором невзаимодействующих частиц, обладающих заданными импульсами и заданными квантовыми числами, связанными с внутренними степенями свободы

$$\Phi_f = \hat{a}_{a_1 p_1}^+ \dots \hat{a}_{a_m p_m}^+ \Phi_0.$$

Амплитуда вероятности нахождения в состоянии  $\Phi_f(\infty)$  состояния  $\Phi_i$  определяется формулой

$$A_{if} = (\Phi_f, \Phi_i(\infty)) = (\Phi_f, S \Phi_i). \quad (1.6.36)$$

Эта величина называется амплитудой перехода из начального состояния  $\Phi_i$  в конечное состояние  $\Phi_f$ . Она, как видно, определяется матричным элементом оператора рассеяния  $S$ . Вероятность перехода определяется квадратом модуля амплитуды перехода. Таким образом, процессы взаимодействия частиц полностью описываются матрицей рассеяния  $S$ .

**1.6.3. Упорядоченные произведения операторов поля.** Мы видели, что  $S$ -матрица определяется  $T$ -произведением (хронологическим произведением) гамильтонианов взаимодействия в представлении взаимодействия. Дадим теперь определение  $T$ -произведения самих операторов поля

$$T(\chi_{\alpha_1}(x_1) \dots \chi_{\alpha_n}(x_n)) = \delta \cdot \chi_{\alpha_1}(x_1) \dots \chi_{\alpha_n}(x_n), \quad (1.6.37)$$

где  $t_1 > \dots > t_n$  (в правой части равенства выписаны те же операторы, что и в левой, но расположенные в хронологическом порядке), и  $\delta$ -сигнатура фермиевских операторов ( $\chi \equiv \psi, \bar{\psi}$ );  $\delta = +1$  — если перестановка четная,  $\delta = -1$  — если перестановка нечетная). Так как операторы  $\chi_{\alpha}(x), \chi_{\alpha'}(x')$  коммутируют (или антикоммутируют) при  $t = t', x \neq x'$ , то  $T$ -произведение определено только для несовпадающих пространственно-временных точек  $x_i \neq x_j$ . В случае  $x_i = x_j$  произведение не определено. Это значит, что  $T$ -произведение определено с точностью до членов, пропорциональных функциям  $\delta(x_i - x_j)$  и их производным [15]. Определение (1.6.37) является релятивистски инвариантным, если  $x_i \neq x_j$ . Действительно, если точки  $x$  и  $x'$  разделены времениподобным интервалом, то неравенство  $t > t'$  не зависит от выбора системы отсчета; если же точки  $x$  и  $x'$  разделены пространственно-подобным интервалом, то операторы  $\chi_{\alpha}(x), \chi_{\beta}(x')$  коммутируют (или антикоммутируют) друг с другом (см. (1.6.22)), поэтому их можно расставлять в произвольном порядке. В этом определении  $T$ -произведения по операторами  $\chi$  можно понимать как операторы поля в представлении взаимо

действия (или свободные операторы поля), так и операторы в гейзенберговском представлении.

Наряду с хронологическим произведением операторов поля важную роль играет нормальное произведение операторов поля в представлении взаимодействия (или свободных операторов поля). Напомним в этой связи, что оператор поля  $\chi(x)$  можно разложить на положительно-частотную и отрицательно-частотную части,  $\chi(x) = \chi^{(+)}(x) + \chi^{(-)}(x)$ , при этом оператор  $\chi^{(+)}(x)$  является суперпозицией операторов уничтожения  $\hat{a}_{ap}$ , а оператор  $\chi^{(-)}(x)$  — суперпозицией операторов рождения  $\hat{a}_{ap}^{\dagger}$ . Нормальное произведение операторов  $\chi^{(\pm)}(x)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} : \chi^{(+)}(x_1) \dots \chi^{(-)}(x_n) : &\equiv N \{ \chi^{(+)}(x_1) \dots \chi^{(-)}(x_n) \} = \\ &= \delta \cdot \chi^{(-)}(x_n) \dots \chi^{(+)}(x_1), \end{aligned} \quad (1.6.38)$$

где в правой части равенства операторы  $\chi^{(+)}(x)$  стоят справа от операторов  $\chi^{(-)}(x)$  и  $\delta$  — сигнатура перестановки фермиевских операторов ( $\delta = +1$ ) — если перестановка четная;  $\delta = -1$  — если перестановка нечетная; напомним, что  $\chi \equiv (\varphi, \psi)$ , где  $\varphi$  — бозевские и  $\psi$  — фермиевские операторы). Так как операторы  $\chi^{(+)}$  (так же, как и операторы  $\chi^{(-)}$ ) коммутируют (в случае бозе-полей) или антикоммутируют (в случае ферми полей) между собой, то их можно располагать в произвольном порядке. В общем случае, когда  $\chi = \chi^{(+)} + \chi^{(-)}$ ,  $N$  — произведение определяется формулой

$$: \dots \chi \dots : = : \dots \chi^{(+)} \dots : + : \dots \chi^{(-)} \dots : \quad (1.6.38')$$

Понятие нормального произведения играет важную роль при построении операторов физических величин. Для разъяснения этого, напомним, что в п. 1.6.1 мы требовали, чтобы энергия и импульс вакуума были равны нулю:  $P_{\mu} \Phi_0 = 0$ .

Если мы с помощью формул (1.4.9) построим вектор энергии-импульса свободного поля, то схематически эта величина будет определяться формулой

$$\begin{aligned} P^{\mu} = \int (\dots \chi^{(+)} \chi^{(+)} + \dots \chi^{(-)} \chi^{(-)} + \dots \chi^{(+)} \chi^{(-)} + \\ + \dots \chi^{(-)} \chi^{(+)}). \end{aligned}$$

Коэффициенты при  $\chi^{(+)} \chi^{(+)}$  (или  $\chi^{(-)} \chi^{(-)}$ ), согласно (1.6.19), пропорциональны произведениям функций  $e^{-i\omega t}$  и  $e^{-i\omega' t}$  (или  $e^{i\omega t}$  и  $e^{i\omega' t}$ ). Так как  $P^{\mu}$  не зависит от  $t$  и  $\omega > 0$ ,  $\omega' > 0$ , то коэффициенты при  $\chi^{(+)} \chi^{(+)}$  (или  $\chi^{(-)} \chi^{(-)}$ ) должны обращаться

в нуль. Поэтому

$$P^{\mu} = \int (\dots \chi^{(+)} \chi^{(-)} + \dots \chi^{(-)} \chi^{(+)} \quad (1.6.39)$$

и, следовательно, соотношение  $P^{\mu} \Phi_0 = 0$  не будет выполняться. Однако это противоречие легко устранить. Действительно, из формулы (1.6.39) следует, что если мы переопределим тензор энергии импульса

$$T^{\mu\nu}(x) \rightarrow : T^{\mu\nu}(x) :, \quad (1.6.40)$$

то для вектора энергии импульса

$$P^{\mu} = \int d^3x : T^{\mu 0}(x) : \quad (1.6.40')$$

будет справедливо соотношение

$$P^{\mu} \Phi_0 = 0.$$

Так как поля свободны и, следовательно, величина  $T^{\mu\nu}(x)$  квадратична по полям, то выражения (1.6.39), (1.6.40') для  $P^{\mu}$  отличаются на  $C$ -числовую константу (в действительности эта константа бесконечна). Поэтому соотношение (1.6.23) (на основании которого был сделан вывод, что операторы  $\chi^{(+)}(x)$  являются операторами уничтожения) остается справедливым и в том случае, когда  $P^{\mu}$  определяется формулой (1.6.40').

Аналогично (1.6.40') операторы обобщенных зарядов поля  $Q_a$  и моментов количества движения поля  $M^{\mu\nu}$  должны определяться формулами

$$Q_a = \int d^3x : \mathcal{J}_a^0(x) :, \quad M^{\mu\nu} = \int d^3x : M^{\mu\nu 0}(x) : \quad (1.6.41)$$

При этом ясно, что

$$Q_a \Phi_0 = 0, \quad M^{\mu\nu} \Phi_0 = 0.$$

В заключение этого пункта подчеркнем, что в квантовой теории свободного поля при переходе от классических величин к квантовым мы должны еще сформулировать рецепт перестановки операторов поля ( $N$ -упорядочение).  $N$ -упорядочение приводит к простым и однозначным результатам в случае, когда рассматриваемые нами функционалы полей (лагранжиан и генераторы различных преобразований) квадратичны по полям. Однако положение в принципе может существенно осложниться в случае квантовой теории взаимодействующих полей, когда лагранжиан не квадратичен по функциям поля.

Квантованию конкретных свободных физических полей будет посвящена гл. 2.

**1.6.4. Нормальное упорядочение матрицы рассеяния.** Матрица рассеяния определяется гамильтонианом взаимодействия

в представлении взаимодействия, который, согласно (1.4.9), (1.3.5), в свою очередь представляет собой локальную функцию (обычно полиномиального вида) полевых операторов  $\chi(x)$  в представлении взаимодействия. Последние являются суперпозициями операторов уничтожения  $\hat{a}_{\alpha p}$  и рождения  $\hat{a}_{\alpha p}^+$  частиц. Поэтому, согласно (1.6.35), каждый член разложения матрицы рассеяния по гамильтониану взаимодействия можно представить в виде суммы произведений операторов рождения и уничтожения частиц в различных состояниях. Необходимо выяснить следующее: при каких условиях такого рода произведения имеют отличные от нуля матричные элементы, отвечающие какому-либо интересующему нас процессу  $i \rightarrow f$ ? Если, например, в начальном состоянии  $i$  имеется одна частица, а в конечном состоянии  $f$  — две, то, очевидно, один из операторов уничтожения должен «уничтожить» частицу в состоянии  $i$ , два оператора рождения должны «создать» две частицы в состоянии  $f$ , а все остальные операторы должны подразделиться на пары, причем операторы каждой пары «создают» и «уничтожают» одну и ту же частицу.

Такого рода виртуальные процессы испускания и последующего поглощения одной и той же частицы значительно усложняют вычисление элементов матрицы рассеяния. Поэтому мы постараемся преобразовать матрицу рассеяния так, чтобы виртуальные процессы не рассматривались [16].

Задача сводится, очевидно, к тому, чтобы представить матрицу рассеяния в виде суммы нормальных произведений операторов рождения и уничтожения частиц, в которых операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения. При вычислении матричных элементов таких произведений операторы уничтожения будут «уничтожать» только те частицы, которые находятся в начальном состоянии, а операторы рождения будут «создавать» только те частицы, которые должны быть в конечном состоянии. Что же касается виртуальных процессов испускания и поглощения частиц, то явным образом они не будут входить в рассмотрение.

Для представления матрицы рассеяния в таком виде введем понятие связи операторов  $\chi_\alpha(x) \chi_\beta(x')$ :

$$\chi_\alpha(x) \chi_\beta(x') = T(\chi_\alpha(x) \chi_\beta(x')) - : \chi_\alpha(x) \chi_\beta(x') :. \quad (1.6.42)$$

Подставляя в эту формулу разложение операторов на положительно и отрицательно частотные части, получаем

$$\chi_\alpha(x) \chi_\beta(x') = \begin{cases} [\varphi_\alpha^{(+)}(x), \varphi_\beta^{(-)}(x')], & t > t' \\ -[\varphi_\alpha^{(-)}(x), \varphi_\beta^{(+)}(x')], & t < t' \end{cases}$$

в случае бозе-полей,

$$\chi_\alpha(x) \chi_\beta(x') = \begin{cases} \{\psi_\alpha^{(+)}(x), \psi_\beta^{(-)}(x')\}, & t > t' \\ -\{\psi_\alpha^{(-)}(x), \psi_\beta^{(+)}(x')\}, & t < t' \end{cases}$$

в случае ферми-полей и

$$\chi_\alpha(x) \chi_\beta(x') = 0$$

в смешанном случае. Эти формулы показывают, что связи между операторами представляют собой  $C$ -числовые функции

$$\chi_\alpha(x) \varphi_\beta(x') = i G_{\alpha\beta}^{\varphi^{(c)}}(x - x'), \quad \psi_\alpha(x) \psi_\beta(x') = i G_{\alpha\beta}^{\psi^{(c)}}(x - x'), \\ \chi_\alpha(x) \chi_\beta(x') = 0, \quad (1.6.43)$$

где функции  $G^{\varphi^{(c)}}$ ,  $G^{\psi^{(c)}}$  определяются формулами

$$G_{\alpha\beta}^{\varphi^{(c)}}(x) = \begin{cases} G_{\alpha\beta}^{\varphi^{(+)}(c)}(x), & t > 0 \\ -G_{\alpha\beta}^{\varphi^{(-)}(c)}(x), & t < 0, \end{cases} \quad G_{\alpha\beta}^{\psi^{(c)}}(x) = \begin{cases} G_{\alpha\beta}^{\psi^{(+)}(c)}(x), & t > 0 \\ -G_{\alpha\beta}^{\psi^{(-)}(c)}(x), & t < 0. \end{cases}$$

Из (1.6.42), (1.6.27) следует, что связь между операторами можно представить в виде

$$\chi_\alpha(x) \chi_\beta(x') = (\Phi_0, T(\chi_\alpha(x) \chi_\beta(x')) \Phi_0). \quad (1.6.44)$$

Формулу (1.6.42)

$$T(\chi_\alpha(x) \chi_\beta(x')) = : \chi_\alpha(x) \chi_\beta(x') : + \chi_\alpha(x) \chi_\beta(x')$$

можно рассматривать как представление  $T$ -произведения двух операторов в виде суммы нормального произведения этих операторов и их связи. Это соотношение можно обобщить на тот случай, когда под знаком  $T$ -произведения стоит не два, а любое число операторов. Именно  $T$ -произведение операторов полей равно сумме их  $N$ -произведений, в которых операторы связаны всеми возможными связями (правила Вика [20]). Например,

$$T(\chi(x_1) \chi(x_2) \chi(x_3) \chi(x_4)) = : \chi(x_1) \chi(x_2) \chi(x_3) \chi(x_4) : + \\ + : \chi(x_1) \chi(x_2) \chi(x_3) \chi(x_4) : + \dots + : \chi(x_1) \chi(x_2) \chi(x_3) \chi(x_4) : + \\ + : \chi(x_1) \chi(x_2) \chi(x_3) \chi(x_4) : + \dots + : \chi(x_1) \chi(x_2) \chi(x_3) \chi(x_4) :.$$

При этом связи операторов бозе-полей под знаком какого-либо  $N$ -произведения могут быть вынесены из-под знака  $N$ -произведения. Чтобы вынести связи операторов ферми полей из-под знака  $N$ -произведения, необходимо поставить связываемые операторы рядом, умножив результат на множитель  $\delta = \pm 1$  ( $\delta = 1$  — если число перестановок ферми-операторов

четное;  $\delta = -1$  — если число перестановок нечетное), после этого связи могут быть вынесены из-под знака  $N$ -упорядочения.

Часто гамильтониан взаимодействия в  $S$ -матрице представляет собой  $N$ -упорядоченный оператор. В этом случае члены разложения  $S$ -матрицы определяются так называемыми смешанными  $T$ -произведениями, в которых отдельные сомножители являются  $N$ -упорядоченными произведениями операторов полей, относящихся к одной и той же пространственно-временной точке. Смешанные  $T$ -произведения также могут быть представлены в виде суммы  $N$ -произведений со всевозможными связями, за исключением связей между операторами в пределах одного и того же  $N$ -произведения. Доказательства этих правил даны в работах [5, 17].

Используя правила Вика, можно представить  $n$ -й член разложения  $S$ -матрицы ( $S_n$ ) в виде суммы интегралов, содержащих только  $N$ -произведения операторов полей:

$$S_n = \sum \int d^4x_1 \dots d^4x_n F_n(x_1, \dots, x_n) : \chi(x_1) \dots \chi(x_n) :, \quad (1.6.45)$$

где величины  $F_n(x_1 \dots x_n)$ , называемые коэффициентными функциями, определяются только связями между операторами.

Правила Вика можно сформулировать в аналитической форме [19].

Рассмотрим прежде всего функционал от операторов бозе-полей  $\varphi$

$$F\{\varphi\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x_1 \dots d^4x_n K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times \varphi_{\alpha_1}(x_1) \dots \varphi_{\alpha_n}(x_n), \quad (1.6.46)$$

где  $K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$  — некоторые числовые функции от  $x_1, \dots, x_n$ , суммирование производится, помимо  $n$ , также по всем  $\alpha_n$ . Можно показать, что

$$TF\{\varphi\} = : e^{\Delta} F\{\varphi\} :, \quad (1.6.47)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta \varphi_{\alpha}(x)} \varphi_{\alpha}(x) \varphi_{\beta}(x') \frac{\delta}{\delta \varphi_{\beta}(x')} \quad (1.6.48)$$

и функциональная производная по бозе-оператору  $\varphi_{\alpha}(x)$  определяется обычным образом.

Формула такого же типа справедлива и для ферми-операторов: если  $F\{\psi\}$  — функционал от операторов  $\psi$  вида

$$F\{\psi\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x_1 \dots d^4x_n K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times \psi_{\alpha_1}(x_1) \dots \psi_{\alpha_n}(x_n),$$

где суммирование производится, помимо  $n$ , также и по индексам  $\alpha_n$ , от которых зависит  $K^{(n)}$ , то

$$TF\{\psi\} = : e^{\Sigma} F\{\psi\} :, \quad (1.6.49)$$

где

$$\Sigma = \int d^4x d^4x' \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \psi_{\alpha}(x)} \psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}(x') \frac{\delta}{\delta \psi_{\beta}(x')} \quad (1.6.50)$$

и функциональные производные по  $\psi_{\alpha}$  и  $\psi_{\alpha}$  определяются в соответствии с формулами раздела 1.3.1

$$\delta F\{\psi\} = \int d^4x \delta \psi_{\alpha}(x) \frac{\delta F\{\psi\}}{\delta \psi_{\alpha}(x)}.$$

Из формул (1.6.47) и (1.6.49) следует, что, если мы имеем общий функционал  $F\{\varphi, \psi\}$  от операторов  $\varphi, \psi$ , то

$$TF\{\varphi, \psi\} = : e^{\Delta + \Sigma} F\{\varphi, \psi\} :, \quad (1.6.51)$$

(доказательство этих формул см [18]).

Из формулы (1.6.51) ясно, что при вычислении величины

$$e^{\Delta + \Sigma} F\{\varphi, \psi\}$$

мы можем рассматривать поля  $\varphi$  как обычные  $S$ -числовые функции, а поля  $\psi$  — как обычные грассмановы функции; в полученных после вычисления этой величины полиномиальных по  $\varphi, \psi$  выражениях следует возникшие произведения полевых величин заменить нормальными произведениями соответствующих операторов. Для этого и введем в формуле (1.6.51) символ  $N$ -упорядочения.

**1.6.5. Функции Грина.** В тесной связи с матрицей рассеяния находятся функции Грина полей. Эти функции, которые мы будем обозначать через  $G_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n)$ , определяются формулами

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{S_0} (\Phi_0, T(\chi_{\alpha_1}(x_1) \dots \chi_{\alpha_n}(x_n) S) \Phi_0), \quad (1.6.52)$$

где  $S_0$  — вакуумное среднее  $S$ -матрицы,

$$S_0 = (\Phi_0, S \Phi_0),$$

и хронологическое упорядочение относится как к операторам поля  $\chi_{\alpha_1}(x_1) \dots \chi_{\alpha_n}(x_n)$  выписанным явно, так и к операторам поля, входящим в матрицу рассеяния.

Если времена  $t_1, \dots, t_m$  устремить к  $-\infty$ , а времена  $t_{m+1}, \dots, t_n$  к  $\infty$ , то

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1 \dots x_n) \Big|_{\substack{t_1 \dots t_m \rightarrow -\infty \\ t_{m+1} \dots t_n \rightarrow \infty}} = \frac{1}{S_0} (\chi_{\alpha_1}(x_1) \dots \chi_{\alpha_m}(x_m) \Phi_0, S \chi_{\alpha_{m+1}}(x_{m+1}) \dots \chi_{\alpha_n}(x_n) \Phi_0) \Big|_{\substack{t_1 \dots t_m \rightarrow -\infty \\ t_{m+1} \dots t_n \rightarrow \infty}}$$

Используя разложение операторов поля по плоским волнам (см. (1.6.19)), легко видеть, что правая часть этого равенства определяет матричные элементы  $S$ -матрицы между состояниями, в которых содержится  $m$  и  $n - m$  частиц. Таким образом, функции Грина являются более общими образованиями, чем матрица рассеяния и, как мы убедимся, далее играют важную роль в диаграммном представлении матрицы рассеяния (см. гл. 3).

Теория возмущений для  $S$ -матрицы (см. формулы (1.6.34), (1.6.35)) непосредственно определяет теорию возмущений для функций Грина. В частности, в отсутствие взаимодействия между полями ( $S = 1$ ) функция Грина  $G(x_1 \dots x_n)$  непосредственно выражается с помощью правил Вика через парные функции Грина

$$G_{\alpha_1 \alpha_2}(x_1, x_2) = (\Phi_0, T(\chi_{\alpha_1}(x_1) \chi_{\alpha_2}(x_2)) \Phi_0), \quad (1.6.53)$$

которые в свою очередь определяют связи между операторами. Так как операторы  $\chi_{\alpha}(x)$  подчиняются уравнениям свободного поля

$$(iB^{\mu} \partial_{\mu} - \mathcal{E}) \chi(x) = 0, \quad (1.6.54)$$

то

$$(iB^{\mu} \partial_{\mu} - \mathcal{E}) G(x, x') = i\delta(x - x'). \quad (1.6.54')$$

Мы учли при этом, что  $\partial_0 \theta(x_0 - x'_0) = \delta(x_0 - x'_0)$  и использовали одновременные перестановочные соотношения (1.6.19), (1.6.19') для ферми- и бозе-полей. Таким образом, функции  $G(x_1, x_2)$  для свободных полей являются функциями Грина уравнения (1.6.54). Поэтому величины (1.6.52) и называются функциями Грина.

При построении матрицы рассеяния мы не учитывали внешние поля. Для учета внешних полей необходимо ввести гамильтониан взаимодействия частиц с внешним полем. Будем предполагать, что он имеет следующую структуру:

$$V_e = \int d^3x \eta_{\alpha}(x) \chi_{\alpha}(x), \quad (1.6.55)$$

где  $\eta_{\alpha}(x)$  — источник внешнего поля. Если  $\chi_{\alpha}(x)$  — бозевское поле, то источник  $\eta_{\alpha}(x)$  представляет собой обычную  $S$ -числовую функцию координат и может иметь непосредственный

физический смысл; если же  $\chi_{\alpha}(x)$  — фермиевское поле, то источник  $\eta_{\alpha}(x)$  должен быть гассмановой функцией  $x$  и в этом случае непосредственно физического смысла этот источник не имеет.

Вводя внешние поля, мы делаем  $S$ -матрицу

$$S = T \exp \left\{ -i \int d^4x (\omega_{\text{int}}(x) + \eta_{\alpha}(x) \chi_{\alpha}(x)) \right\} \quad (1.6.56)$$

( $\omega_{\text{int}}(x)$  — плотность гамильтониана взаимодействия полей) функционалом внешних полей. Тогда вакуумное среднее от  $S$ -матрицы можно рассматривать как производящий функционал (по переменным  $\eta_{\alpha}(x)$ ) функций Грина (1.6.52). Действительно, замечая, что

$$\frac{\delta S}{\delta \eta_{\alpha}(x)} = -iT(\chi_{\alpha}(x) S),$$

имеем

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) = i^n \frac{\delta^n}{\delta \eta_{\alpha_n}(x_n) \dots \delta \eta_{\alpha_1}(x_1)} (\Phi_0, S \Phi_0) |_{\eta=0}. \quad (1.6.57)$$

Функции Грина обладают следующим важным свойством. Если представить, что группа аргументов  $x_1 \dots x_m$  лежит вблизи точки  $x$ , а группа аргументов  $y_1 \dots y_s$  — вблизи точки  $y$ , то

$$G(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_s) \xrightarrow{x \rightarrow y} G(x_1 \dots x_m) G(y_1 \dots y_s). \quad (1.6.58)$$

В этой связи целесообразно из функций Грина  $G(x_1 \dots x_n)$  вычесть произведение функций Грина низшего порядка так, чтобы полученная разность стремилась к нулю при произвольном раздвижении аргументов. Полученные функции называются связными функциями Грина и обозначаются через  $G^c(x_1, \dots, x_n)$ . Например,

$$G^c(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_1, x_2, x_3, x_4) - G(x_1, x_2) G(x_3, x_4) - G(x_1, x_3) G(x_2, x_4) - G(x_1, x_4) G(x_2, x_3).$$

Величина  $\ln(\Phi_0, S \Phi_0)$  представляет собой производящий функционал для связных функций Грина

$$G^c(x_1, \dots, x_n) = i^n \frac{\delta^n}{\delta \eta(x_n) \dots \delta \eta(x_1)} \ln(\Phi_0, S \Phi_0) |_{\eta=0}. \quad (1.6.59)$$

Покажем, что функции Грина могут быть выражены через гейзенберговские операторы  $\chi_{\alpha_1}(x_1), \dots, \chi_{\alpha_n}(x_n)$ :

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) = (\Psi_0, T(\chi_{\alpha_1}(x_1) \dots \chi_{\alpha_n}(x_n)) \Psi_0), \quad (1.6.60)$$

где  $\Psi_0$  — вектор вакуума взаимодействующих полей, описывающий наименьшее по энергии состояние системы взаимодей-

ствующих полей (мы предполагаем, что это состояние не выроджено). Предположим, что операторы полей  $\chi(x)$  и векторы состояний  $\Phi(t)$  в представлении взаимодействия совпадают с операторами полей  $\chi(x)$  и векторами состояний  $\Psi$  в гейзенберговском представлении в момент времени  $t=0$ . Тогда, согласно (1.5.6),

$$\begin{aligned}\chi(x) &= S(t, 0) \chi(x) S(t, 0)^+, \\ \Phi(t) &= S(t, 0) \Psi.\end{aligned}$$

В соответствии с адиабатической гипотезой, согласно которой собственный вектор свободного гамильтониана переходит при медленном включении взаимодействия при  $t = \pm\infty$  в собственный вектор полного гамильтониана, имеет место соотношение

$$\Psi_0^\pm = S(0, \pm\infty) \Phi_0 \quad (1.6.61)$$

( $\Psi_0^\pm$  — собственный вектор полного гамильтониана; мы учли, что при  $t=0$  вектор состояния в представлении взаимодействия совпадает с вектором состояния в гейзенберговском представлении). Из этой формулы следует, что

$$S_0 \equiv (\Phi_0, S\Phi_0) = (\Psi_0^+, \Psi_0^-). \quad (1.6.62)$$

Векторы состояния вакуума  $\Psi_0^+$  и  $\Psi_0^-$  отличаются, очевидно, друг от друга только некоторым фазовым множителем, который, согласно (1.6.62), совпадает с  $S_0$ , следовательно,  $\Psi_0^- = S_0 \cdot \Psi_0^+$  (так как  $SS^+ = 1$ , то  $|S_0| = 1$ ). Таким образом,

$$\Phi_0 = S(-\infty, 0) \Psi_0 = \frac{1}{S_0} S(\infty, 0) \Psi_0, \quad \Psi_0 \equiv \Psi_0^-. \quad (1.6.63)$$

Считая для простоты, что  $t_1 > t_2 > \dots > t_n$  и используя формулы (1.6.63) и соотношения

$$\begin{aligned}|S_0| &= 1, \quad S = S(\infty, t_1) S(t_1, 0) S(0, t_2) \dots \\ &\dots S(0, t_n) S(t_n, -\infty),\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{S_0} (\Phi_0, T(\chi(x_1) \dots \chi(x_n) S) \Phi_0) = \\ &= (\Psi_0, S(0, \infty) S(\infty, t_1) \chi(x_1) S(t_1, 0) S(0, t_2) \chi(x_2) \times \\ &\times S(t_2, 0) \dots S(0, t_n) \chi(x_n) S(t_n, -\infty) S(-\infty, 0) \Psi_0),\end{aligned}$$

откуда в силу (1.5.6) следует (1.6.60).

Формулы типа (1.6.60) справедливы также и для матричных элементов операторов полей. Рассмотрим, например,

матричный элемент оператора  $\chi(x)$  между состоянием вакуума  $\Psi_0$  и одночастичным состоянием  $\Psi_1$ . Используя (1.6.61) и (1.5.6), имеем

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \chi(x) \Psi_1) &= S_0^* (\Phi_0, S(\infty, 0) S(0, t) \chi(x) S(t, 0) \times \\ &\times S(0, -\infty) \Phi_1) = \frac{1}{S_0} (\Phi_0, T\{\chi(x) S\} \Phi_1),\end{aligned} \quad (1.6.64)$$

где  $\Phi_1$  — вектор одночастичного состояния в отсутствие взаимодействия.

**1.6.6. Вероятности и эффективные сечения процессов.** В отсутствие взаимодействия, когда состояния частиц не меняются, матрица рассеяния  $S$  совпадает, очевидно, с единичной матрицей 1. Поэтому удобно положить

$$S = 1 + iT$$

и связывать вероятности различных процессов  $P_{i \rightarrow f}$  с элементами матрицы  $T$ ,

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | T | i \rangle|^2, \quad (1.6.65)$$

где  $i$  и  $f$  служат для обозначения начального и конечного состояния системы взаимодействующих полей (предполагается, что  $|i\rangle \neq |f\rangle$ ).

Из матричного элемента  $\langle f | T | i \rangle$  можно выделить  $\delta$ -функцию, содержащую разности 4-импульсов частиц в начальном  $p_i$  и конечном  $p_f$  состояниях,

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 M_{i \rightarrow f} \delta(\Sigma p_i - \Sigma p_f). \quad (1.6.66)$$

Это следует из того, что матрица рассеяния коммутирует с оператором 4-импульса свободных полей (величину  $M_{i \rightarrow f}$  называют амплитудой рассеяния для соответствующего процесса). Поэтому вероятность процесса  $P_{i \rightarrow f}$  будет пропорциональна квадрату  $\delta(\Sigma p_i - \Sigma p_f)$ . Заменяв одну из этих  $\delta$ -функций интегралом

$$\delta(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 x e^{iqx}, \quad q = \Sigma p_i - \Sigma p_f,$$

мы будем считать область интегрирования в нем ограниченной, т. е. заменим  $\delta$  функцию на  $V\Delta t/(2\pi)^4$ , где  $\Delta t$  — интервал интегрирования по времени;  $V$  — пространственный объем интегрирования.

Таким образом, вероятность процесса  $i \rightarrow f$  пропорциональна времени  $\Delta t$ , можно поэтому ввести вероятность, относенную к единице времени:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{P_{i \rightarrow f}}{\Delta t} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 V \delta(\Sigma p_i - \Sigma p_f).$$



Так как в рассматриваемом процессе начальное и конечное состояния частиц относятся к непрерывному спектру, то практический интерес представляет знание вероятности того, что трехмерные импульсы частиц  $p_f$  в конечном состоянии находятся в заданных интервалах  $d^3p_f$ . Чтобы найти эту вероятность, которую мы обозначим через  $dw_{i \rightarrow f}$ , нужно умножить  $W_{i \rightarrow f}$  на  $\prod_f V d^3p_f / (2\pi)^3$ , где  $V d^3p_f / (2\pi)^3$  — число состояний частицы с определенной поляризацией, для которой импульс  $p_f$  лежит в интервале  $d^3p_f$ :

$$dw_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta(\Sigma p_i - \Sigma p_f) V \prod_f \frac{V d^3p_f}{(2\pi)^3}. \quad (1.6.67)$$

Установим зависимость величины  $dw_{i \rightarrow f}$  от нормировочного объема  $V$ . Обозначим через  $N_i$  и  $N_f$  числа частиц в начальном и конечном состоянии. Так как, согласно (1.6.19), каждая частица начального или конечного состояния вносит множитель  $V^{-1/2}$  в величину  $M_{i \rightarrow f}$ , то  $M_{i \rightarrow f} \sim V^{-\frac{1}{2}(N_i + N_f)}$ . Поэтому  $dw_{i \rightarrow f} \sim V^{1-N_i}$ . Если  $N_i = 1$  (процесс распада), то вероятность процесса не зависит от объема. Если  $N_i = 2$  (столкновения двух частиц), то вероятность процесса будет обратно пропорциональна объему. Поэтому процесс в этом случае удобнее характеризовать не вероятностью  $dw_{i \rightarrow f}$ , а сечением  $d\sigma_{i \rightarrow f}$ :

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{dw_{i \rightarrow f}}{j}, \quad (1.6.68)$$

где  $j$  — плотность потока «налетающих» частиц, которая обратно пропорциональна объему (так как плотность «налетающих» частиц равна  $1/V$ ). Поэтому дифференциальное сечение рассеяния  $d\sigma_{i \rightarrow f}$  не зависит от объема  $V$ .

Дадим теперь точное определение плотности потока сталкивающихся частиц. Плотность потока «падающих» частиц в общем случае, когда частицы мишени движутся, определяется из требования релятивистской инвариантности дифференциального сечения. Можно показать, что  $j$  следует определять формулой (см. [17])

$$j = \frac{n_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}, \quad n_1 \cong \frac{1}{V}$$

( $p_1, p_2$  — 4-векторы импульсов сталкивающихся частиц, а  $m_1, m_2$  — их массы). При  $p_2 = 0$  это выражение переходит в  $j = n_1 v_1$ .

Используя эту формулу и определения (1.6.68) и (1.6.67), получаем следующее общее выражение для дифференциаль-

ного эффективного сечения процесса рассеяния  $i \rightarrow f$  [17]:

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |M_{i \rightarrow f}|^2 \delta(p_1 + p_2 - \Sigma p_f) \times \\ \times \frac{V \epsilon_1 \epsilon_2}{V (p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \prod_f \frac{V d^3p_f}{(2\pi)^3}, \quad (1.6.69)$$

где индексы 1, 2 относятся к частицам в начальном состоянии (как мы уже говорили,  $d\sigma_{i \rightarrow f}$  не зависит от  $V$ ).

Выражение для  $d\sigma_{i \rightarrow f}$  можно переписать так, чтобы оно содержало только инвариантные величины. Выделим с этой целью из  $M_{i \rightarrow f}$  те множители, которые не инвариантны. Эти множители происходят от матричных элементов операторов полей и имеют, согласно (1.6.19), вид  $\frac{1}{\sqrt{2\epsilon V}}$ , где  $\epsilon$  — энергия частицы. Если поэтому записать  $M_{i \rightarrow f}$  в виде

$$M_{i \rightarrow f} = A_{i \rightarrow f} \prod \frac{1}{\sqrt{2\epsilon V}}, \quad (1.6.70)$$

где произведение распространяется на все частицы как в начальном, так и в конечном состояниях, то величина  $A_{i \rightarrow f}$  будет релятивистским инвариантом. Она называется инвариантной амплитудой процесса рассеяния.

Подставив это выражение в (1.6.69) и используя соотношение

$$\int \frac{d^3p_f}{\epsilon_f} \dots = 2 \int d^4p_f \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(\epsilon_f) \dots,$$

получим

$$d\sigma_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |A_{i \rightarrow f}|^2 \frac{\delta(p_1 + p_2 - \Sigma p_f)}{4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \times \\ \times \prod \frac{d^4p_f \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(\epsilon_f)}{(2\pi)^3}. \quad (1.6.71)$$

Это и есть релятивистски инвариантная форма эффективного сечения рассеяния (в этой формуле независимыми переменными являются  $p_f, \epsilon_f$ ; интегрирование по  $\epsilon_f$  с помощью  $\delta(p_f^2 - m_f^2)$  приводит к формуле (1.6.69)).

Аналогичная формула для вероятности распада в терминах инвариантной амплитуды распада  $A_{i \rightarrow f}$  (в состоянии  $i$  находится одна частица) имеет вид

$$dw_{i \rightarrow f} = (2\pi)^4 |A_{i \rightarrow f}|^2 \frac{1}{2\epsilon_i} \prod_f \frac{d^4p_f \delta(p_f^2 - m_f^2) \theta(\epsilon_f)}{(2\pi)^3} \quad (1.6.72)$$

(величина  $\epsilon_i dw_{i \rightarrow f}$ , как и должно быть, представляет собой релятивистский инвариант).

## КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНЫХ БОЗОННЫХ И ФЕРМИОННЫХ ПОЛЕЙ

### § 2.1. Квантование скалярного поля

**2.1.1. Лагранжиан скалярного поля.** Мы перейдем теперь к изучению конкретных физических полей. Начнем со скалярного поля, описываемого одной комплексной функцией  $\varphi(x)$ , преобразующейся при собственных преобразованиях Лоренца  $x \rightarrow x' = ax$  по закону

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x). \quad (2.1.1)$$

Комплексное скалярное поле описывает частицы со спином нуль, обладающие зарядом. Лагранжиан этого поля, инвариантный относительно преобразования (2.1.1), имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^*. \quad (2.1.2)$$

Этот лагранжиан, согласно (1.1.5), приводит к уравнениям поля второго порядка

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \varphi = 0, \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \varphi^* = 0, \quad (2.1.3)$$

где  $m$  — масса частиц, связанных с полем. Это видно из того, что решение уравнений (2.1.3) в виде плоских волн

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp(-ipx), \quad px = p_0 t - \mathbf{p} \mathbf{x}$$

приводит к дисперсионному соотношению

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2.$$

Уравнение (2.1.3) называется уравнением Клейна — Гордона. Ему можно придать вид уравнений первого порядка, если ввести наряду с  $\varphi$ ,  $\varphi^*$  векторы  $\varphi_\mu$ ,  $\varphi_\mu^*$ :

$$\varphi_\mu = \partial_\mu \varphi, \quad \varphi_\mu^* = \partial_\mu \varphi^*.$$

В результате уравнение  $(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \varphi = 0$  заменяется системой уравнений

$$\partial^\mu \varphi_\mu + m^2 \varphi = 0, \quad \partial_\mu \varphi - \varphi_\mu = 0. \quad (2.1.4)$$

Этим уравнениям соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L} = \varphi_\mu \partial^\mu \varphi^* + \varphi_\mu^* \partial^\mu \varphi - \varphi_\mu^* \varphi^\mu - m^2 \varphi \varphi^*, \quad (2.1.5)$$

инвариантный относительно преобразований Лоренца

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x), \quad \varphi_\mu(x) \rightarrow \varphi'_\mu(x') = a_\mu^\nu \varphi_\nu(x)$$

и фазовых преобразований

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{i\alpha} \varphi(x).$$

Второе из уравнений (2.1.4) при  $\mu = 1, 2, 3$  представляет собой уравнение связи (см. § 1.3). Мы могли бы как и в § 1.3 пользоваться только вещественными полями. Для этого достаточно положить  $\varphi = \varphi^1 + i\varphi^2$ ,  $\varphi_\mu = \varphi_\mu^1 + i\varphi_\mu^2$  и считать поля  $\varphi^1$ ,  $\varphi^2$  вещественными.

Тензор энергии-импульса и вектор тока, соответствующие лагранжиану (2.1.5), определяются формулами

$$T^{\mu\nu} = (m^2 \varphi \varphi^* - \varphi_\lambda \varphi^{\lambda*}) g^{\mu\nu} + \partial^\mu \varphi^* \varphi^\nu + \partial^\mu \varphi \varphi^{\nu*},$$

$$\mathcal{J}^\mu = i(\partial^\mu \varphi^* \varphi - \varphi^* \partial^\mu \varphi); \quad (2.1.6)$$

заметим, что для вещественного скалярного поля ток обращается в нуль.

**2.1.2. Квантование скалярного поля.** Перейдем к рассмотрению квантования скалярного поля. Будем исходить из лагранжиана (2.1.2), приводящего к уравнениям поля второго порядка. При этом можно использовать формализм, изложенный в разделе 1.5.3. Так как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi} = \partial_0 \varphi^*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi^*} = \partial_0 \varphi,$$

то, согласно (1.5.35), операторы  $\varphi$ ,  $\varphi^+$  удовлетворяют одновременным перестановочным соотношениям

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')]_{t=t'} = 0, \quad [\partial_0 \varphi(x), \partial_0 \varphi^+(x')]_{t=t'} = 0,$$

$$[\varphi(x), \partial_0 \varphi^+(x')]_{t=t'} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.1.7)$$

и уравнениям поля (2.1.3)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi(x) = 0, \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi^+(x) = 0.$$

Как мы видели, в квантовой теории операторы энергии-импульса поля

$$P^\mu = \int d^3x : T^{\mu 0}(x) :$$

и заряда поля

$$Q = \int d^3x : \mathcal{J}^0(x) :$$

являются не зависящими от времени генераторами бесконечно малых преобразований группы пространственно-временных трансляций

$$\delta\varphi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \varphi(x)$$

и группы фазовых преобразований

$$\delta\varphi(x) = i\alpha\varphi(x),$$

т. е.

$$[P^\mu, \varphi(x)] = -i\partial^\mu \varphi(x), \quad [Q, \varphi(x)] = -\varphi(x), \quad (2.1.8)$$

где  $P^\mu$ ,  $Q$  — операторы энергии импульса и заряда поля (см. (1.5.30), (1.5.26)).

Получим теперь разновременные перестановочные соотношения для операторов скалярного поля. Заметим, что решение уравнения (2.1.3) при заданных значениях  $\varphi$  и  $\partial_0\varphi$  на гиперплоскости  $t = t'$  имеет вид

$$\varphi(x) = \int d^3x' (\varphi(x') \partial_0 \Delta(x-x') + \partial_0 \varphi(x') \Delta(x-x')), \quad (2.1.9)$$

где функция  $\Delta(x)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta(x) = 0 \quad (2.1.10)$$

и начальным условиям

$$\Delta(x)|_{t=0} = 0, \quad \partial_0 \Delta(x)|_{t=0} = \delta(x). \quad (2.1.10')$$

Поэтому, используя (2.1.7), видим, что

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0, \quad (2.1.11)$$

$$[\varphi(x), \varphi^+(x')] = -i\Delta(x-x').$$

Из уравнений (2.1.10), (2.1.10') следует, что \*

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{ipx} \frac{\sin p_0 t}{p_0}, \quad p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (2.1.12)$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p p_0 e^{ipx - ip_0 t} \operatorname{sgn} p_0 \delta(p^2 + m^2 - p_0^2)$$

или

$$\Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{-ipx} \operatorname{sgn} p_0 \delta(p^2 - m^2). \quad (2.1.12')$$

Из формулы (2.1.12') следует, что

$$\Delta(x) = \begin{cases} f(x^2), & t > 0 \\ -f(x^2), & t < 0, \end{cases}$$

\* Функция  $\Delta(x)$  была введена Паули и Иорданом [1].

где  $f$  — некоторая функция инварианта  $x^2$ . Так как  $\Delta(x, 0) = 0$ , то  $\Delta(x) = 0$  при  $x^2 < 0$ .

Функцию  $\Delta(x)$  также можно представить в виде

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{c_0} d^4p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2}, \quad (2.1.13)$$

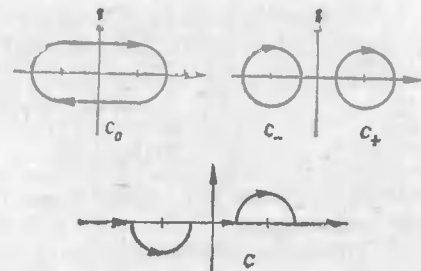


Рис. 1.

где контур интегрирования в комплексной плоскости  $p_0$  изображен на рис. 1. В справедливости этой формулы легко убедиться, вычисляя интеграл по  $p_0$  с помощью вычетов.

**2.1.3. Операторы рождения и уничтожения скалярных частиц.** Операторы  $\varphi(x)$ ,  $\varphi^+(x)$ , удовлетворяющие волновому уравнению (2.1.3), могут быть разложены по плоским волнам

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^+ e^{ipx}), \quad (2.1.14)$$

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} (a_{\mathbf{p}}^+ e^{ipx} + b_{\mathbf{p}} e^{-ipx}),$$

где  $px = p_0 t - \mathbf{p}\mathbf{x}$ ,  $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ;  $V = L^3$  — нормировочный объём (компоненты вектора  $\mathbf{p}$  принимают дискретные значения  $p_i = 2\pi n_i/L$ ,  $n_i$  — целые числа) и коэффициенты разложения  $a_{\mathbf{p}}$ ,  $b_{\mathbf{p}}$ ,  $a_{\mathbf{p}}^+$ ,  $b_{\mathbf{p}}^+$  представляют собой, так же как  $\varphi$ ,  $\varphi^+$ , операторы, действующие в пространстве векторов состояний  $\Phi$ . Поскольку  $\varphi^+$  — оператор, эрмитовски сопряжённый оператору  $\varphi$ , то операторы  $a_{\mathbf{p}}^+$ ,  $b_{\mathbf{p}}^+$  эрмитовски сопряжены по отношению к операторам  $a_{\mathbf{p}}$ ,  $b_{\mathbf{p}}$ .

Подставляя (2.1.14) в (2.1.11), видим, что перестановочные соотношения (2.1.11) будут удовлетворяться, если

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^+] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}^+] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad (2.1.15)$$

и все другие пары операторов  $a$ ,  $b$ ,  $a^+$ ,  $b^+$  коммутируют между собой ( $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = 0$ ,  $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}'$  и  $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}} = 1$ ).

Подставляя в (2.1.8) разложение (2.1.14), получаем

$$[Q, a_{\mathbf{p}}] = -a_{\mathbf{p}}, \quad [Q, b_{\mathbf{p}}^+] = -b_{\mathbf{p}}^+, \quad (2.1.16)$$

$$[Q, a_{\mathbf{p}}^+] = a_{\mathbf{p}}^+, \quad [Q, b_{\mathbf{p}}] = b_{\mathbf{p}},$$

а также

$$[P_\mu, a_{\mathbf{p}}] = -p_\mu a_{\mathbf{p}}, \quad [P_\mu, b_{\mathbf{p}}^+] = p_\mu b_{\mathbf{p}}^+, \quad (2.1.17)$$

$$[P_\mu, a_{\mathbf{p}}^+] = p_\mu a_{\mathbf{p}}^+, \quad [P_\mu, b_{\mathbf{p}}] = -p_\mu b_{\mathbf{p}}.$$

Покажем теперь как строятся векторы состояний скалярного поля. Для этого введем вектор состояния вакуума (см. § 1.6)

$$a_p \Phi_0 = b_p \Phi_0 = 0 \quad (2.1.18)$$

или

$$\varphi^{(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad \varphi^{+(-)}(x) \Phi_0 = 0, \quad (2.1.18')$$

где (+) служит для обозначения положительно частотной части операторов.

Определив вектор состояния вакуума, мы можем построить гильбертово пространство состояний скалярного поля

$$|p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle \equiv a_{p_1}^+ \dots a_{p_n}^+ b_{q_1}^+ \dots b_{q_m}^+ \Phi_0. \quad (2.1.19)$$

При этом скалярное произведение векторов состояний  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  мы определим так, чтобы операторы  $a^+$  и  $b^+$  были операторами эрмитовосопряженными по отношению к  $a$  и  $b$

$$(\Phi_1, a^+ \Phi_2) = (a \Phi_1, \Phi_2), \quad (\Phi_1, b^+ \Phi_2) = (b \Phi_1, \Phi_2) \quad (2.1.20)$$

и вектор состояния вакуума  $\Phi_0$  был нормирован на единицу

$$(\Phi_0, \Phi_0) = 1.$$

Отсюда и из перестановочных соотношений (2.1.15) следует что

$$\langle p'_1 \dots p'_n; q'_1 \dots q'_m | p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m \rangle = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (2.1.21)$$

$$\sum_{p_1 p_1'} \delta_{p_1 p_1'} \dots \sum_{q_1 q_1'} \delta_{q_1 q_1'}, \dots$$

где суммирование распространяется на все перестановки величин  $p'_1 \dots p'_n$  и величин  $q'_1 \dots q'_m$ . Замечая, что

$$P_\mu \Phi_0 = Q \Phi_0 = 0 \quad (2.1.22)$$

и используя формулы (2.1.16), (2.1.17), получаем

$$P_\mu |p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle = (p_1 + \dots + p_n + q_1 + \dots + q_m)_\mu |p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle,$$

$$Q |p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle = (n - m) |p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_m\rangle.$$

Эти формулы и формулы (2.1.19) позволяют интерпретировать оператор  $a_p^+$  как оператор рождения скалярной частицы с импульсом  $p$  и зарядом  $+1$ , а оператор  $b_q^+$  — как оператор рождения скалярной частицы с импульсом  $q$  и зарядом  $-1$  (античастицы). Поскольку, согласно (2.1.15),

$$a_p |p'\rangle = \delta_{pp'} |0\rangle, \quad b_q |q'\rangle = \delta_{qq'} |0\rangle,$$

( $|0\rangle \equiv \Phi_0$ ), то операторы  $a_p$ ,  $b_q$  можно интерпретировать как операторы уничтожения скалярных частиц с импульсами  $p$  и  $q$  и зарядами  $+1$ ,  $-1$ .

Определим теперь связи между операторами скалярного поля. Согласно (1.6.42), эти связи определяются формулой

$$\underline{u(x)} v(x') = (\Phi_0, T(u(x) v(x')) \Phi_0) =$$

$$= \begin{cases} [u^{(+)}(x), v^{(-)}(x')], & t > t' \\ -[u^{(-)}(x), v^{(+)}(x')], & t < t'. \end{cases}$$

Используя соотношения (2.1.11), имеем

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{+(-)}(x')] = -i\Delta^{(+)}(x - x'), \quad [\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(x')] = 0,$$

$$[\varphi^{(-)}(x), \varphi^{+(-)}(x')] = -i\Delta^{(-)}(x - x'), \quad [\varphi^{(-)}(x), \varphi^{(+)}(x')] = 0,$$

где  $\Delta^{(\pm)}(x)$  — положительно и отрицательно частотные части функции  $\Delta(x)$ . Поэтому

$$\underline{\varphi(x)} \varphi(x') = \underline{\varphi^+(x)} \varphi^+(x') = 0, \quad (2.1.23)$$

$$\underline{\varphi(x)} \varphi^+(x') = -i\Delta^c(x - x'),$$

где

$$\Delta^c(x) = \begin{cases} \Delta^{(+)}(x), & t > 0 \\ -\Delta^{(-)}(x), & t < 0. \end{cases}$$

Из формулы (2.1.13) следует, что

$$\Delta^{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_{\pm}} d^4 p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2}, \quad (2.1.24)$$

где контур интегрирования  $C_{\pm}$  в комплексной плоскости  $p_0$  изображен на рис. 1. Отсюда вытекает единое представление для функции  $\Delta^c(x)$

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4 p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2}, \quad (2.1.25)$$

где интегрирование в комплексной плоскости  $p_0$  производится по контуру  $C$  (см. рис. 1). В справедливости последней формулы легко убеждаемся, используя теорему о вычетах и то обстоятельство, что благодаря экспоненте  $e^{-ip_0 t}$  при  $t > 0$  контур интегрирования  $C$  можно замкнуть в нижней полуплоскости (в результате получится контур  $C_+$ ), а при  $t < 0$  контур  $C$  можно замкнуть в верхней полуплоскости (в результате получится контур  $C_-$ ).

Функцию  $\Delta^c(x)$ , очевидно, можно переписать в виде

$$\Delta^c(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4 p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} \quad (2.1.26)$$

(контур  $C$  обходит левый полюс снизу, а правый — сверху). Так как при  $\epsilon \rightarrow +0$  полюса подынтегрального выражения равны:  $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2} \left(1 - \frac{i\epsilon}{2\sqrt{p^2 + m^2}}\right)$  и  $p_0 = -\sqrt{p^2 + m^2} \times \left(1 - \frac{i\epsilon}{2\sqrt{p^2 + m^2}}\right)$ , то контур интегрирования  $C$  можно совместить с действительной осью в плоскости  $p_0$ . Поэтому функцию  $\Delta^C(x)$  можно записать в виде \*

$$\Delta^C(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx} \Delta^C(p),$$

$$\Delta^C(p) = (m^2 - p^2 - i0)^{-1} = 2\pi i \delta_+(m^2 - p^2), \quad (2.1.27)$$

где  $\delta_{\pm}(\omega)$  — обобщенная функция, определяемая соотношением

$$\delta_{\pm}(\omega) = \mp \frac{i}{2\pi} (\omega \mp i\eta)^{-1}, \quad \eta \rightarrow +0. \quad (2.1.28)$$

## § 2.2. Квантование векторного поля

**2.2.1. Лагранжиан векторного поля.** Следующим по сложности является векторное комплексное поле, описываемое 4-вектором  $\varphi_{\mu}(x)$ , преобразующимся при преобразованиях Лоренца по закону

$$\varphi_{\mu}(x) \rightarrow \varphi'_{\mu}(x') = a_{\mu}^{\nu} \varphi_{\nu}(x).$$

Поля  $\varphi_{\mu}(x)$ ,  $\varphi_{\mu}^*(x)$  удовлетворяют уравнениям

$$(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) \varphi_{\nu} = 0, \quad (\partial_{\mu} \partial^{\mu} + m^2) \varphi_{\nu}^* = 0, \quad (2.2.1)$$

где  $m$  — масса частиц, связанных с полем. Такому же уравнению удовлетворяет скалярное поле  $\varphi(x) = \partial^{\mu} \varphi_{\mu}(x)$ , поэтому, чтобы исключить возможность существования такого поля, нужно наложить на  $\varphi_{\mu}(x)$  добавочное условие

$$\partial^{\mu} \varphi_{\mu}(x) = 0. \quad (2.2.2)$$

Поле  $\varphi_{\mu}(x)$  с учетом этого добавочного условия описывает частицы со спином единица. Уравнения поля (2.2.1), (2.2.2) могут быть получены из лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_{\mu} \varphi_{\nu} - \partial_{\nu} \varphi_{\mu}) (\partial^{\nu} \varphi^{\mu*} - \partial^{\mu} \varphi^{\nu*}) - m^2 \varphi^{\mu*} \varphi_{\mu}. \quad (2.2.3)$$

От уравнений поля второго порядка можно перейти к уравнениям поля первого порядка. Введем для этого антисимметричный тензор

$$\varphi_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \varphi_{\nu} - \partial_{\nu} \varphi_{\mu}. \quad (2.2.4)$$

\* Функция  $\Delta^C(x)$  (пропагатор) была введена Фейнманом [2].

Тогда уравнения (2.2.1), (2.2.2) примут вид

$$\partial^{\nu} \varphi_{\mu\nu} - m^2 \varphi_{\mu} = 0, \quad \partial_{\nu} \varphi_{\mu} - \partial_{\mu} \varphi_{\nu} + \varphi_{\mu\nu} = 0 \quad (2.2.5)$$

(первое уравнение при  $\mu = 0$  и второе уравнение при  $\mu, \nu = 1, 2, 3$  являются уравнениями связей). Этим уравнениям соответствует лагранжиан (в силу (2.2.4) совпадающий с лагранжианом (2.2.3))

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \varphi^{\mu\nu*} (\partial_{\nu} \varphi_{\mu} - \partial_{\mu} \varphi_{\nu}) - \frac{1}{2} (\partial_{\nu} \varphi_{\mu}^* - \partial_{\mu} \varphi_{\nu}^*) \varphi^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varphi_{\mu\nu}^* \varphi^{\mu\nu} - m^2 \varphi_{\mu}^* \varphi^{\mu}, \quad (2.2.6)$$

инвариантный относительно преобразований Лоренца

$$\varphi_{\mu}(x) \rightarrow \varphi'_{\mu}(x') = a_{\mu}^{\nu} \varphi_{\nu}(x),$$

$$\varphi_{\mu\nu}(x) \rightarrow \varphi'_{\mu\nu}(x') = a_{\mu}^{\lambda} a_{\nu}^{\rho} \varphi_{\lambda\rho}(x)$$

и фазовых преобразований

$$\varphi_{\mu}(x) \rightarrow \varphi'_{\mu}(x) = e^{i\alpha} \varphi_{\mu}(x),$$

$$\varphi_{\mu\nu}(x) \rightarrow \varphi'_{\mu\nu}(x) = e^{i\alpha} \varphi_{\mu\nu}(x).$$

Тензор энергии-импульса, вектор тока и тензор плотностей моментов количества движения, соответствующие лагранжиану (2.2.6), определяются формулами

$$T^{\mu\nu} = \left( m^2 \varphi_{\lambda}^* \varphi^{\lambda} - \frac{1}{2} \varphi_{\lambda\rho}^* \varphi^{\lambda\rho} \right) g^{\mu\nu} - \partial^{\mu} \varphi^{\rho} \cdot \varphi_{\rho}^{\nu*} - \partial^{\mu} \varphi^{\rho*} \varphi_{\rho}^{\nu},$$

$$M^{\lambda\nu;\mu} = x^{\lambda} T^{\nu\mu} - x^{\nu} T^{\lambda\mu} - i \varphi^{\rho\mu*} (\Sigma^{\lambda\nu} \varphi)_{\rho} - i \varphi^{\rho\mu} (\Sigma^{\lambda\nu} \varphi)_{\rho}^*,$$

$$\mathcal{J}^{\mu} = i (\varphi^{\rho*} \varphi_{\rho}^{\mu} - \varphi^{\rho} \varphi_{\rho}^{\mu*}), \quad (2.2.7)$$

где

$$(\Sigma^{\lambda\nu})_{\mu}^{\rho} = i (\delta_{\mu}^{\lambda} g^{\nu\rho} - g^{\lambda\rho} \delta_{\mu}^{\nu}). \quad (2.2.8)$$

Матрицы  $\Sigma^{\lambda\nu}$  определяют закон преобразования поля  $\varphi_{\mu}$  при бесконечно малых преобразованиях Лоренца,  $a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu}$ ,  $\varphi'_{\lambda} = \varphi_{\lambda} - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} (\Sigma^{\mu\nu})_{\lambda}^{\rho} \varphi_{\rho}$  (см. (1.1.14), (1.1.12)).

**2.2.2. Квантование векторного поля.** При квантовании векторного поля мы будем исходить из лагранжиана (2.2.3) и поэтому использовать формализм пункта 1.5.3. Так как лагранжиан (2.2.3) содержит временные производные полей  $\varphi_{\mu}$ ,  $\varphi_{\mu}^*$  в комбинации

$$-\partial^0 \varphi^{k*} \partial^0 \varphi_k + \partial^0 \varphi^{k*} \partial_k \varphi_0 + \partial^k \varphi^{0*} \partial_0 \varphi_k,$$

то импульсы  $\pi_k, \pi_k^*$ , сопряженные полям  $\varphi_k, \varphi_k^*$ , определяются формулами

$$\pi^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi_k} = -\partial^0 \varphi^{k*} + \partial^k \varphi^{0*} = \varphi^{k0*},$$

$$\pi^{k*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \varphi_k^*} = -\partial^0 \varphi^k + \partial^k \varphi^0 = \varphi^{k0}.$$

Величины  $\varphi_k, \varphi_k^*$  и  $\varphi^{k0}, \varphi^{k0*}$  можно назвать динамически независимыми компонентами поля, поскольку их задание в начальный момент времени определяет дальнейшую эволюцию поля. Действительно, для нахождения однозначного решения уравнений (2.2.1) необходимо знать в начальный момент времени  $\varphi_\mu, \varphi_\mu^*, \partial_0 \varphi_\mu, \partial_0 \varphi_\mu^*$ . Так как, согласно (2.2.5),

$$\varphi^0 = -\frac{1}{m^2} \partial_k \varphi^{k0}, \quad \partial_0 \varphi^0 = -\partial_k \varphi^k,$$

$$\partial_0 \varphi_k = -\left(\delta_k^i + \frac{1}{m^2} \partial_k \partial^i\right) \varphi_{i0}, \quad (2.2.9)$$

то значения  $\varphi_k$  и  $\varphi_{k0}$  в начальный момент времени и определяют дальнейшую эволюцию поля.

Нетривиальные одновременные перестановочные соотношения для динамически независимых компонент поля имеют, согласно (1.5.35), вид

$$[\varphi^{k0+}(x'), \varphi_i(x)]_{t=t'} = -i \delta_i^k \delta(x-x'), \quad [\varphi^{k0}(x'), \varphi_i^+(x)]_{t=t'} =$$

$$= -i \delta_i^k \delta(x-x') \quad (2.2.10)$$

(коммутаторы для остальных пар динамически независимых переменных равны нулю). Операторы  $\varphi_\mu, \varphi_\mu^+$  удовлетворяют уравнениям (см. (2.2.1), (2.2.2))

$$(\partial^\nu \partial_\nu + m^2) \varphi_\mu = 0, \quad (\partial^\nu \partial_\nu + m^2) \varphi_\mu^+ = 0, \quad \partial^\nu \varphi_\nu = \partial^\nu \varphi_\nu^+ = 0. \quad (2.2.11)$$

Как мы видели, в квантовой теории справедливы формулы

$$i[P_\nu, \varphi_\mu] = \partial_\nu \varphi_\mu, \quad [Q, \varphi_\mu] = -\varphi_\mu,$$

$$[M^{\mu\nu}, \varphi_\lambda] = (i(x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu) - (\Sigma^{\mu\nu})_\lambda^{\rho}) \varphi_\rho, \quad (2.2.12)$$

где  $Q$  — оператор заряда;  $P^\mu$  — оператор энергии-импульса и  $M^{\mu\nu}$  — оператор момента количества движения векторного поля (см. (1.5.30), (1.5.26)).

Получим теперь разновременные перестановочные соотношения для операторов векторного поля. Используя (2.2.9), (2.2.11) и одновременные перестановочные соотношения

(2.2.10), нетрудно показать, что

$$[\varphi_k(x), \varphi^{i+}(x')] = i \left( \delta_k^i + \frac{1}{m^2} \partial_k \partial^i \right) \Delta(x-x'),$$

$$[\varphi_k(x), \varphi^{0+}(x')] = [\varphi_0(x), \varphi_k^+(x')] = \frac{i}{m^2} \partial_k \partial^0 \Delta(x-x'),$$

$$[\varphi_0(x), \varphi_0^+(x')] = -\frac{i}{m^2} \partial_k \partial^k \Delta(x-x'),$$

$$[\varphi_\mu(x), \varphi_\nu(x')] = 0,$$

где функция  $\Delta(x)$  определяется формулой (2.1.13). Замечая, что  $-\frac{1}{m^2} \partial_k \partial^k \Delta(x-x') = \left(1 + \frac{1}{m^2} \partial_0^2\right) \Delta(x-x')$ , эти соотношения можно представить в релятивистски-инвариантном виде:

$$[\varphi_\mu(x), \varphi^{\nu+}(x')] = i \left( \delta_\mu^\nu + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial^\nu \right) \Delta(x-x'),$$

$$[\varphi_\mu(x), \varphi^\nu(x')] = 0 \quad (2.2.13)$$

(эти перестановочные соотношения находятся в соответствии с условием поперечности поля  $\varphi^\mu, \partial_\mu \varphi^\mu = 0$ ).

**2.2.3. Операторы рождения и уничтожения векторных частиц.** Векторное поле  $\varphi_\mu(x)$  может быть разложено на плоские волны

$$\varphi_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\rho\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} (a_{\rho\lambda} e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e^{-ipx} + b_{\rho\lambda}^+ e_{\rho\mu}^{(\lambda)*} e^{ipx}), \quad (2.2.14)$$

где  $px = \rho_0 t - \rho x$ ,  $\rho_0 = +\sqrt{\rho^2 + m^2}$  и  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  — единичные векторы поляризации, удовлетворяющие в силу (2.2.2) условию поперечности

$$e_{\rho\mu}^{(\lambda)} \rho^\mu = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (2.2.15)$$

Так как векторы поляризации  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  являются пространственно-подобными (они ортогональны времениподобному вектору  $\rho^\mu$ ), то условие ортонормировки для них можно записать в виде

$$e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e_{\rho\nu}^{(\lambda')*} = -\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.2.16)$$

Дополним векторы  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) вектором  $e_{\rho\mu}^{(0)} \equiv \rho_\mu/m$  до полной системы векторов в 4-пространстве. Очевидно, векторы  $e_{\rho\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ), согласно (2.2.15), (2.2.16), удовлетворяют условиям ортонормировки

$$e_{\rho\mu}^{(\lambda)} e_{\rho\nu}^{(\lambda')*} = \zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \zeta_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = 0 \\ -1, & \lambda = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Так как произвольный вектор  $f_\mu$  можно разложить по векторам  $e_{p\mu}^{(\lambda)}$ .

$$f_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 C_\lambda e_{p\mu}^{(\lambda)}, \quad C_\lambda = f_\mu e_p^{(\lambda)\mu*} \zeta_\lambda,$$

то

$$f_\mu = f_\nu \sum_{\lambda=0}^3 e_{p\mu}^{(\lambda)} e_p^{(\lambda)\nu*} \zeta_\lambda.$$

Поэтому условие полноты системы  $e_{p\mu}^{(\lambda)}$  имеет вид

$$\sum_{\lambda=0}^3 e_{p\mu}^{(\lambda)} e_p^{(\lambda)\nu*} \zeta_\lambda = \delta_\mu^\nu \quad (2.2.18)$$

и, следовательно,

$$\sum_{\lambda=1}^3 e_{p\mu}^{(\lambda)} e_p^{(\lambda)\nu*} = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}. \quad (2.2.18')$$

Условия (2.2.15), (2.2.16) не определяют однозначно векторы  $e_{p\mu}^{(\lambda)}$ . Чтобы однозначно фиксировать векторы  $e_{p\mu}^{(\lambda)}$  (они называются векторами поляризации), введем матрицы спина векторного поля, связанные с матрицами  $\sum_{\lambda\nu}$  соотношением (см. (1.1.34))

$$\Sigma^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \Sigma_{kl}.$$

Из (2.2.8) видно, что

$$\Sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.19)$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(матрицы  $\Sigma^i$  удовлетворяют соотношениям коммутации для операторов моментов (1.1.35)). Из последней формулы видно, что спин частиц, связанных с полем, равен 1 и 0. Однако ну-

левой спин исключается условием (2.2.15). Действительно, вектор поляризации, соответствующий нулевому спину, согласно (2.2.19), должен иметь только временную составляющую, что противоречит условию (2.2.15).

Определим теперь вектора  $e_{p\mu}^{(\lambda)}$  с помощью соотношений

$$(\Sigma n) e_p^{(1)} = e_p^{(1)}, \quad (\Sigma n) e_p^{(2)} = -e_p^{(2)}, \quad (\Sigma n) e_p^{(3)} = 0, \quad (2.2.20)$$

где  $n = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ . Так как  $(\Sigma)_{\alpha 0} = (\Sigma)_{0\alpha} = 0$ , то эти соотношения не определяют временной составляющей векторов  $e_{p\mu}^{(\lambda)}$ . Последняя определяется формулой (2.2.15),  $e_{p\mu}^{(\lambda)} p^\mu = 0$ . Вернемся к разложению (2.2.14). Подставляя разложение (2.2.14) в (2.2.13), легко убедиться, что перестановочные соотношения (2.2.13) будут удовлетворяться, если операторы  $a, b, a^\dagger, b^\dagger$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[a_{p\lambda}, a_{p'\lambda'}^\dagger] = [b_{p\lambda}, b_{p'\lambda'}^\dagger] = \delta_{pp'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (2.2.21)$$

(коммутаторы для других пар операторов  $a, a^\dagger, b, b^\dagger$  обращаются в нуль).

Вектор состояния вакуума определяется формулами

$$\varphi_\mu^{(+)}(x) \Phi_0 = \varphi_\mu^{(+\dagger)}(x) \Phi_0 = 0 \quad (2.2.22)$$

или

$$a_{p\lambda} \Phi_0 = b_{p\lambda} \Phi_0 = 0,$$

где (+) служит для обозначения положительно частотной части операторов  $\varphi_\mu, \varphi_\mu^\dagger$ . Так же как и в случае скалярного поля, из соотношений

$$\partial_\nu \varphi_\mu = i [P_\nu, \varphi_\mu], \quad [Q, \varphi_\mu] = -\varphi_\mu, \quad (2.2.23)$$

аналогичных соотношениям (2.1.8), следует, что  $a_{p\lambda}^\dagger$  представляет собой оператор рождения векторной частицы с импульсом  $\mathbf{p}$  и зарядом  $+1$ ; оператор  $b_{p\lambda}^\dagger$  — оператор рождения векторной античастицы с импульсом  $\mathbf{p}$  и зарядом  $-1$ . Покажем, что справедливы соотношения

$$M n a_{p\lambda}^\dagger \Phi_0 = \mu(\lambda) a_{p\lambda}^\dagger \Phi_0,$$

$$\vec{M} n b_{p\lambda}^\dagger \Phi_0 = \mu(\lambda) b_{p\lambda}^\dagger \Phi_0, \quad (2.2.24)$$

где  $M_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} M_{kl}$  — оператор момента количества движения поля,  $n = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ , функция  $\mu(\lambda)$  определяется формулой

$$\mu(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = 1 \\ -1, & \lambda = 2 \\ 0, & \lambda = 3. \end{cases}$$

С этой целью заметим, что, согласно определению оператора  $M_{ik}$  и определению вектора состояния вакуума,

$$M_{ik}\Phi_0 = 0.$$

Поэтому, используя соотношение (2.2.12), имеем

$$M_{ik}\varphi_\mu(x)\Phi_0 = (-\Sigma_{ik} - i(x_i\partial_k - x_k\partial_i))\varphi_\mu(x)\Phi_0,$$

$$M_{ik}\varphi_\mu^\dagger(x)\Phi_0 = (-\Sigma_{ik} - i(x_i\partial_k - x_k\partial_i))\varphi_\mu^\dagger(x)\Phi_0.$$

Подставляя в эти формулы разложение (2.2.14) и замечая, что

$$\int d^3p f(p)(x_k\partial_l - x_l\partial_k)e^{ipx} = \int d^3p e^{ipx} \left( p_k \frac{\partial}{\partial p^l} - p_l \frac{\partial}{\partial p^k} \right) f(p)$$

( $f(p)$  — произвольная функция  $p$ ), находим

$$M_i \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} e_{p\mu}^{(\lambda)*} b_{p\lambda}^+ \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \left( \sum_i e_p^{(\lambda)} \right)_\mu^* \times \\ \times b_{p\lambda}^+ \Phi_0 + \varepsilon^{ikl} p_k \frac{\partial}{\partial p^l} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} e_{p\mu}^{(\lambda)*} b_{p\lambda}^+ \Phi_0,$$

$$M_i \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} e_{p\mu}^{(\lambda)*} a_{p\lambda}^+ \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \left( \sum_i e_p^{(\lambda)} \right)_\mu^* \times \\ \times a_{p\lambda}^+ \Phi_0 + \varepsilon^{ikl} p_k \frac{\partial}{\partial p^l} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} e_{p\mu}^{(\lambda)*} a_{p\lambda}^+ \Phi_0,$$

где (см. (1.1.34))  $\Sigma^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \Sigma_{kl}$ . Умножая эти уравнения на  $n_i = p_i/|\mathbf{p}|$ , производя суммирование по  $i$  и используя далее формулы (2.2.20), мы и получаем соотношения (2.2.24).

Формулы (2.2.24) показывают, что в состояниях  $a_{p\lambda}^+ \Phi_0$ ,  $b_{p\lambda}^+ \Phi_0$  проекция момента количества движения на направление импульса равна  $\mu(\lambda)$ . Поскольку проекция орбитального момента на направление импульса равна нулю, то можно сказать, что величина  $\mu(\lambda)$  представляет собой проекцию спинового момента частицы на её импульс, т. е. спиральность частицы.

Таким образом, операторы  $a_{p\lambda}^+$ ,  $a_{p\lambda}$  ( $b_{p\lambda}^+$ ,  $b_{p\lambda}$ ) представляют собой операторы рождения и уничтожения векторной частицы с импульсом  $p$ , спиральностью  $\mu(\lambda)$  и зарядом  $1$  ( $-1$ ). Связи между операторами  $\varphi_\mu$ ,  $\varphi_\nu$  и  $\varphi_\mu^\dagger$ ,  $\varphi_\nu^\dagger$  равны, очевидно, нулю

$$\varphi_\mu(x)\varphi_\nu(x') = 0, \quad \varphi_\mu^\dagger(x)\varphi_\nu^\dagger(x') = 0, \quad (2.2.25)$$

а связь между операторами  $\varphi_\mu$ ,  $\varphi_\nu^\dagger$  определяется формулой

$$\varphi_\mu(x)\varphi_\nu^\dagger(x') = i \left( g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) \Delta^c(x-x'). \quad (2.2.25')$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что благодаря производным  $\partial_\mu \partial_\nu$  фурье-компоненты связей векторного поля в области больших 4-импульсов не убывают (в отличие от скалярного поля).

### § 2.3. Квантование электромагнитного поля

**2.3.1. Уравнения Максвелла.** Вещественное векторное поле, масса частиц которого равна нулю, называется электромагнитным или максвелловским полем. Оно описывается 4-вектором  $\varphi_\mu(x) \equiv A_\mu(x)$  (он называется 4-потенциалом) и антисимметричным тензором второго ранга  $\varphi_{\mu\nu}(x) \equiv F_{\mu\nu}(x)$ , объединяющим электрическое и магнитное поле. Эти поля, согласно (2.2.5), удовлетворяют уравнениям

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}. \quad (2.3.1)$$

Заметим, что при  $m \neq 0$  из уравнений (2.2.5) вытекает условие  $\partial^\mu \varphi_\mu = 0$ . Если же  $m = 0$ , то это условие не обязательно выполняется.

Непосредственный физический смысл имеет не 4-вектор потенциала  $A_\mu$ , а антисимметричный тензор  $F_{\mu\nu}$ , называемый тензором электромагнитного поля. Не изменяя  $F_{\mu\nu}$ , можно, очевидно, подвергнуть  $A_\mu$  преобразованию

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (2.3.2)$$

где  $\Lambda(x)$  — произвольная скалярная функция  $x$ . Это преобразование называется калибровочным. В частности, функцию  $\Lambda(x)$  можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\partial^\mu A_\mu = 0. \quad (2.3.3)$$

Такая калибровка потенциала  $A_\mu(x)$  называется лоренцевской. В этой калибровке потенциал  $A_\mu(x)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\partial_\rho \partial^\rho A_\mu(x) = 0. \quad (2.3.4)$$

Второе из уравнений (2.3.1) эквивалентно уравнению

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (2.3.5)$$

Уравнениям (2.3.1) соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.3.6)$$



Варьируя действие с таким лагранжианом по  $A_\mu$ , получаем первое из уравнений (2.3.1), а варьируя действие по  $F_{\mu\nu}$ , — второе из уравнений (2.3.1).

Если в качестве независимых переменных выбрать  $A_\mu$ , то лагранжиан будет иметь вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.3.7)$$

В этом случае, варьируя  $L$  по  $A_\mu$ , приходим к уравнениям поля второго порядка

$$\partial^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0. \quad (2.3.8)$$

Используя общее выражение для канонического тензора энергии импульса (1.1.39), находим тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{\mu\nu}(x) = \Theta^{\mu\nu}(x) + \partial_\rho \chi^{\nu\rho\mu}, \quad (2.3.9)$$

где

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda} g^{\mu\nu} + F^{\rho\nu} F^\mu{}_\rho, \quad \chi^{\nu\rho\mu} = -F^{\nu\rho} A^\mu.$$

Второе слагаемое в выражении для  $T^{\mu\nu}$  не является калибровочно-инвариантным, поэтому не имеет физического смысла. Это слагаемое не вносит вклад в суммарный 4-импульс поля. Первое слагаемое представляет собой симметричный калибровочно-инвариантный тензор энергии-импульса (см. разд. 1.1.4).

Согласно (1.4.44), тензор моментов количества движения электромагнитного поля равен

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\mu \Theta^{\nu\rho} - x^\nu \Theta^{\mu\rho}. \quad (2.3.10)$$

Общее решение волнового уравнения (2.3.4) может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн  $\exp(ikx + i\omega t)$ ,  $\exp(ikx - i\omega t)$  или волн  $\exp(ikx)$ ,  $\exp(-ikx)$ , где  $kx = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}$ ,  $\omega = |k|$ :

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (C_\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} + C_\mu^*(\mathbf{k}) e^{ikx}),$$

где  $V$  — объём поля (мы учли вещественность поля  $A_\mu(x)$ ).

Любой вектор  $a_\mu$  может быть разложен по полной системе векторов  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ), удовлетворяющих условиям ортонормировки (см. (2.2.17); отметим, что векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$  не ортогональны  $k_\mu$ )

$$g^{\mu\nu} e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)} e_{\mathbf{k}\nu}^{(\lambda')*} = \delta_{\lambda\lambda'} \xi_\lambda, \quad \xi_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = 0 \\ -1, & \lambda = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.3.11)$$

и полноты

$$\sum_{\lambda=0}^3 e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)} e_{\mathbf{k}\nu}^{(\lambda)*} \xi_\lambda = g_{\mu\nu}. \quad (2.3.12)$$

Поэтому

$$C_\mu(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda=0}^3 C_{\mathbf{k}\lambda} e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)},$$

где  $C_{\mathbf{k}\lambda}$  — некоторые коэффициенты. Таким образом,

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}, \lambda=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (C_{\mathbf{k}\lambda} e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx} + C_{\mathbf{k}\lambda}^* e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx}). \quad (2.3.13)$$

Условия (2.3.11), (2.3.12) не определяют однозначно вектор  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$ . Чтобы однозначно фиксировать векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$  (они называются векторами поляризации), введем матрицы спина электромагнитного поля. Поскольку электромагнитное поле  $A_\mu(x)$  является векторным, то матрицы спина  $\Sigma^i$  определяются, очевидно, формулами (2.2.19). Определим теперь векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$  как собственные векторы матриц  $\Sigma^2$  и  $\Sigma_n$  ( $n = \mathbf{k}/\omega$ ). Вектор  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(0)}$  определим соотношениями

$$\Sigma^2 e_{\mathbf{k}\mu}^{(0)} = 0, \quad \Sigma_n e_{\mathbf{k}\mu}^{(0)} = 0, \quad (2.3.14)$$

откуда и из условия нормировки следует, что

$$e_{\mathbf{k}\mu}^{(0)} = (1, 0, 0, 0).$$

Вектор  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(3)}$  определим соотношениями

$$\Sigma^2 e_{\mathbf{k}\mu}^{(3)} = 2e_{\mathbf{k}\mu}^{(3)}, \quad \Sigma_n e_{\mathbf{k}\mu}^{(3)} = 0, \quad (2.3.15)$$

откуда и из условия нормировки следует, что

$$e_{\mathbf{k}\mu}^{(3)} = \left(0, \frac{\mathbf{k}}{\omega}\right).$$

Наконец, векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}$  для  $\lambda = 1, 2$  определим соотношениями

$$\Sigma^2 e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)} = 2e_{\mathbf{k}\mu}^{(\lambda)}, \quad \lambda = 1, 2, \quad (2.3.16)$$

$$\Sigma_n e_{\mathbf{k}\mu}^{(1)} = e_{\mathbf{k}\mu}^{(1)}, \quad \Sigma_n e_{\mathbf{k}\mu}^{(2)} = -e_{\mathbf{k}\mu}^{(2)},$$

откуда и из условий нормировки следует, что

$$e_{\mathbf{k}\mu}^{(1)} = (0, \mathbf{e}_k^{(1)}), \quad e_{\mathbf{k}\mu}^{(2)} = (0, \mathbf{e}_k^{(2)}),$$

где единичные пространственные векторы  $\mathbf{e}_k^{(1)}$ ,  $\mathbf{e}_k^{(2)}$  ортогональны друг другу и вектору  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{e}_k^{(1)} \mathbf{k} = e_{\mathbf{k}\mu}^{(2)*} \mathbf{k} = \mathbf{e}_k^{(1)} \mathbf{e}_k^{(2)*} = 0.$$

Векторы  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(1)}$ ,  $e_{\mathbf{k}\mu}^{(2)}$  мы будем называть векторами поперечной поляризации со спиральностью  $+1$  и  $-1$  (см. формулы (2.3.16),

а также § 2.2); вектор  $e_{k\mu}^{(3)}$ , пространственная часть которого параллельна вектору  $k$ , будем называть вектором продольной поляризации; наконец, вектор  $e_{k\mu}^{(0)}$ , не имеющий пространственных составляющих, будем называть вектором скалярной поляризации. Заметим, что разложение (2.3.13) не предполагает выполненным условие Лоренца  $\partial^\mu A_\mu = 0$ . Так как

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega}{2}} \{ (C_{k3} - C_{k0}) e^{-ikx} - (C_{k3}^* - C_{k0}^*) e^{ikx} \}, \quad (2.3.17)$$

то условие Лоренца будет выполняться, если  $C_{k3} - C_{k0} = 0$ . Если между  $C_{k3}$  и  $C_{k0}$  имеется такая связь, то разложение  $A_\mu(x)$  на плоские волны будет иметь вид

$$A_\mu(x) = A_\mu^{tr}(x) + \partial_\mu \Lambda(x),$$

где  $A_\mu^{tr}(x)$  — поперечная часть потенциала

$$A_\mu^{tr}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (C_{k\lambda} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx} + C_{k\lambda}^* e_{k\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx})$$

и  $\Lambda(x)$  — скалярная функция, имеющая вид

$$\Lambda(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\omega \sqrt{2\omega}} (C_{k0} e^{-ikx} - C_{k0}^* e^{ikx}).$$

Заметим, что величина  $\partial_\mu \Lambda(x)$  не дает вклада в тензор электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}(x)$ , поэтому может быть устранена с помощью калибровочного преобразования (2.3.2).

Соотношение (2.3.14) вместе с соотношениями (2.3.15), (2.3.16) показывают, что частицы, связанные с электромагнитным полем — фотоны, обладают спином, равным единице, причем состояние с проекцией спина равной нулю не является физическим, так как может быть исключено калибровочным преобразованием (2.3.2).

**2.3.2. Квантование электромагнитного поля.** Уравнения поля (2.3.1), следующие из лагранжиана (2.3.6), могут быть переписаны в виде

$$\partial_\nu F^{k\nu} = 0, \quad \partial_0 A_k = \partial_k A_0 + F_{0k}; \quad (2.3.18)$$

$$\partial_k F^{0k} = 0, \quad F_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k. \quad (2.3.19)$$

Уравнения (2.3.18) являются собственно уравнениями поля, а уравнения (2.3.19) — уравнениями связи. Таким образом, переменные  $F_{0k}^{(t)}$ ,  $A_k$ , которые можно задавать произвольно, в начальный момент времени являются динамически независимыми (индекс  $t$  служит для обозначения поперечной части 3-мерного векторного поля).

Мы видим, что переменную  $A_0$  нельзя выразить через динамически независимые переменные. Причина этого состоит в том, что лагранжиан (2.3.6) инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad (2.3.20)$$

поэтому переменные  $A_\mu$  нашей системы не определяются однозначно динамически независимыми переменными.

Между тем при квантовании полей предполагалось, что все переменные поля могут быть выражены через динамически независимые переменные. Для решения данного вопроса необходимо нарушить калибровочную инвариантность лагранжиана (2.3.6). С этой целью можно ввести дополнительное скалярное поле  $\varphi$  и исходить из лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \left( \frac{1}{2} \varphi^2 - \varphi \partial_\mu A^\mu \right). \quad (2.3.21)$$

Независимыми переменными теперь считаются  $F_{\mu\nu}$ ,  $A_\mu$ ,  $\varphi$  ( $\xi$  — произвольный вещественный параметр).

Для нарушения калибровочной инвариантности можно не вводить дополнительное поле  $\varphi$ , а наложить ограничение на 4-потенциал  $A_\mu$ , потребовав, например, поперечности векторного потенциала  $A_k$ ,  $\partial_k A^k = 0$ . Такая калибровка потенциала называется радиационной или кулоновской.

Мы рассмотрим только первую возможность, поскольку она приводит к релятивистски инвариантным формулировкам на всех этапах построения теории.

В теории, основывающейся на радиационной калибровке, явная релятивистская инвариантность теряется. Однако в этой калибровке присутствуют только поперечные фотоны в отличие от релятивистски инвариантной формулировки теории с добавочным полем  $\varphi$ , в которой присутствуют наряду с реальными поперечными фотонами еще продольные и скалярные фотоны («духи»).

Возвращаясь к лагранжиану (2.3.21), можно написать следующее выражение для вариации полного действия электромагнитного поля:

$$\delta W = C_1(t_2) - G_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} d^4x F(x), \quad (2.3.22)$$

где

$$G_1(t) = - \int d^3x \left( F^{0k} \delta A_k + \frac{1}{\xi} \varphi \delta A_0 \right),$$

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} \delta F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - F_{\mu\nu}) + \\ + \delta A_\nu \left( \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\nu \varphi \right) + \frac{1}{\xi} \delta \varphi (\varphi - \partial_\mu A^\mu).$$

Используя принцип стационарного действия, получаем отсюда

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \partial^\mu \varphi = 0, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.3.23) \\ \partial_\mu A^\mu = \varphi.$$

Уравнения

$$\partial_0 A_0 = -\partial_h A^h + \varphi, \quad \partial_0 A_k = \partial_h A_0 + F_{0k}, \\ \partial_0 F^{k0} = \frac{1}{\xi} \partial^k \varphi - \partial_l F^{kl}, \quad \partial^0 \varphi = \xi \partial_h F^{0k} \quad (2.3.24)$$

будут теперь собственно уравнениями поля, а величины  $A_\mu$ ,  $F_{0k}$ ,  $\varphi$  — динамически независимыми переменными. Уравнения же

$$F_{kl} = \partial_h A_l - \partial_l A_h \quad (2.3.25)$$

будут уравнениями связи, определяющими  $F_{kl}$  (магнитное поле) через динамически независимые переменные  $A_h$ .

Таким образом, введя добавочное поле  $\varphi$ , мы добились того, что все переменные поля стали строго фиксированными, т. е. все они выражаются через динамически независимые переменные.

Из уравнений (2.3.23) вытекает, что поля  $A_\mu$  и  $\varphi$  удовлетворяют волновым уравнениям

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0, \quad \partial^\mu \partial_\mu \varphi = 0. \quad (2.3.26)$$

Установим теперь перестановочные соотношения для динамически независимых переменных электромагнитного поля  $A_\mu$ ,  $F_{k0}$ ,  $\varphi$ .

Кинематическая часть действия, необходимая для построения генераторов поля, определяется формулой

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( -F^{0k} \partial_0 A_k - \frac{1}{\xi} \varphi \partial_0 A_0 \right). \quad (2.3.27)$$

Отсюда следует, что для вариаций  $\delta A_\mu(x)$ ,  $\delta F^{0k}(x)$ ,  $\delta \varphi(x)$ , являющихся функциями только пространственных координат, кинематическая часть действия будет инвариантной, следовательно, рассматриваемые вариации будут определять бесконечно малое унитарное преобразование. Для этих вариаций будет иметь место соотношение (см. § 1.3)

$$\delta W_K = G_1(t_1) - G_1(t_2),$$

где

$$G_1(t) = \int d^3x \left( -F^{0k} \delta A_k - \frac{1}{\xi} \varphi \delta A_0 \right).$$

Учитывая, что, согласно (2.3.22), для рассматриваемых вариаций

$$G_2(t) = \int d^3x \left( \delta F^{0k} A_k + \frac{1}{\xi} \varphi \delta A_0 \right),$$

получаем следующее выражение для генератора  $G(t) \equiv G_1(t) + G_2(t)$  этих вариаций:

$$G(t) = \int d^3x \left( \delta F^{0k} \cdot A_k - \delta A_k F^{0k} + \frac{1}{\xi} \delta \varphi A_0 - \frac{1}{\xi} \delta A_0 \varphi \right). \quad (2.3.28)$$

Вариации  $\delta A_\mu$ ,  $\delta F_{0k}$ ,  $\delta \varphi$  связаны с генератором  $G$  соотношениями

$$\delta A_\mu(x) = i[G(t), A_\mu(x)], \quad \delta F^{0k} = i[G, F^{0k}], \quad \delta \varphi = i[G, \varphi].$$

Отсюда и из (2.3.28) следуют перестановочные соотношения для динамически независимых компонент поля:

$$[F^{0k}(x'), A_l(x)]_{t=t'} = i \delta_l^k \delta(x - x'), \\ [\varphi(x'), A^0(x)]_{t=t'} = i \xi \delta(x - x') \quad (2.3.29)$$

(коммутаторы остальных пар динамически независимых переменных равны нулю). Установим теперь разновременные перестановочные соотношения для операторов поля  $A_\mu(x)$ . Начнем со случая  $\xi = 1$  (эта калибровка относится к классу лоренцевских калибровок и называется фейнмановской). В этой калибровке уравнения поля (2.3.23) и перестановочные соотношения (2.3.29) можно записать в виде

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu(x) = 0,$$

$$[A_\mu(x), \partial_0 A_\nu(x')]_{t=t'} = -i g_{\mu\nu} \delta(x - x').$$

Поэтому, используя формулу (2.1.9) для  $m = 0$ , получаем

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_{\xi=1} = i g_{\mu\nu} \mathcal{D}(x - x'), \quad (2.3.30)$$

где функция  $\mathcal{D}(x)$  совпадает с функцией  $\Delta(x)$  при  $m = 0$

$$\mathcal{D}(x) = \Delta(x)|_{m=0} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{c_0} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2} \quad (2.3.31)$$

(см. (2.1.13)).

В квантовой теории также справедливо разложение (2.3.13), в котором величины  $C_{kl}$ ,  $C_{kl}^* \equiv C_{kj}$  являются операторами. Эти операторы, согласно (2.3.30), удовлетворяют

перестановочным соотношениям

$$[C_{k\lambda}, C_{k'\lambda'}^\dagger] = -\xi_\lambda \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad [C_{k\lambda}, C_{k'\lambda'}] = 0, \quad \xi_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = 0 \\ -1, & \lambda = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.3.32)$$

В случае  $\xi \neq 1$  перестановочные соотношения для потенциалов  $A_\mu(x)$  имеют вид (см. [4])

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x'; \xi), \quad (2.3.33)$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{c_0} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться, если заметить, что функция  $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi)$ , согласно (2.3.26), удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \partial_\nu \partial^\nu \delta_\mu^\lambda - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\mu \partial^\lambda \right\} \mathcal{D}_{\lambda\nu}(x; \xi) = 0$$

и начальным условиям, соответствующим выражениям для одновременных коммутаторов (2.3.29).

Заметим, что поперечная часть потенциала  $A_\mu(x)$  раскладывается на плоские волны:

$$A_\mu^{(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=0}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{ C_{k\lambda} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx} + C_{k\lambda}^\dagger e_{k\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx} \}. \quad (2.3.34)$$

Что же касается разложений  $A_0(x)$  и продольной части потенциала  $A_k^{(t)}(x)$ , то они имеют более сложный характер (см. [3]).

Можно показать (см. [3]), что

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(t)}(x) + A'_\mu(x), \quad (2.3.35)$$

где поперечная часть потенциала  $A_\mu^{(t)}(x)$  определяется формулой (2.3.34)

$$A'_\mu(x) = \partial_\mu(a(x) + lb(x)) - \frac{2}{1-\xi} b(x) \delta_\mu^0 \quad (2.3.36)$$

и операторы  $a(x)$ ,  $b(x)$  имеют вид

$$a(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{(1+\xi)^{1/2}}{2\omega^{3/2}} (C_{k3} e^{-ikx} - C_{k3}^\dagger e^{ikx}), \quad (2.3.36')$$

$$b(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1-\xi}{2(1+\xi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \{ (C_{k3} - C_{k0}) e^{-ikx} + (C_{k3}^\dagger - C_{k0}^\dagger) e^{ikx} \}.$$

При этом операторы  $C_{k\lambda}$ ,  $C_{k\lambda}^\dagger$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ) удовлетворяют перестановочным соотношениям (2.3.32).

**2.3.3. Векторы состояний электромагнитного поля и индексная метрика.** Операторы  $A_\mu(x)$  удовлетворяют, как мы видели, волновому уравнению (2.3.26). В классической теории это уравнение эквивалентно уравнениям Максвелла

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.3.37)$$

если учесть дополнительное условие Лоренца

$$\varphi \equiv \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.3.37')$$

В квантовой теории первое из уравнений (2.3.37) несправедливо, а условие Лоренца (2.3.37') не может выполняться, так как оно несовместимо с перестановочными соотношениями (2.3.33) ( $\partial^\mu D_{\mu\nu}(x-x'; \xi) \neq 0$ ).

Между тем, как мы видели, в классической теории условие Лоренца физически необходимо, поскольку оно вместе с требованием калибровочной инвариантности (2.3.2) позволяло исключить из 4-потенциала  $A_\mu(x)$  скалярные и продольные степени свободы.

Исключение скалярных и продольных степеней свободы в квантовой теории может быть достигнуто, если наложить на векторы состояний  $\Phi$ , характеризующих поле как некоторую динамическую систему, определенное дополнительное условие. Мы предположим, что векторы состояния, которые могут реализоваться, удовлетворяют условию

$$\varphi^{(+)}(x) \Phi = 0, \quad (2.3.38)$$

где  $\varphi^{(+)}(x)$  — положительно-частотная часть оператора  $\varphi(x)$  (это условие называется условием Лоренца — Ферми). Из уравнений (2.3.26), (2.3.33) следует, что  $\partial_\mu \partial^\mu \varphi^{(+)}(x) = 0$ ,  $[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(+)}(x')] = 0$ . Поэтому условие (2.3.38) совместно с уравнениями (2.3.26), (2.3.33). Векторы состояний, удовлетворяющие уравнению (2.3.38), будем называть физическими векторами состояний.

Если  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — два физических вектора состояния, то, согласно (2.3.38),  $(\Phi_1, \varphi(x) \Phi_2) = 0$ ; при этом учитывалось, что  $\varphi(x) = \varphi^{(+)}(x) + \varphi^{(-)}(x)$ , где  $\varphi^{(-)}(x)$  — отрицательно-частотная часть  $\varphi(x)$ , а  $\varphi^{(-)+} = \varphi^{(+)}$ . Поэтому в силу (2.3.38) уравнение (2.3.37) и условие Лоренца (2.3.37') будут выполняться только в пространстве физических векторов состояний.

Физические векторы состояний образуют подпространство гильбертова пространства векторов состояний. Для построения гильбертова пространства (а также подпространства физических векторов состояний) необходимо определить в нем скалярное произведение. Как и в разделе 2.1.3, определяем

скалярное произведение  $(\Phi_1, \Phi_2)$  векторов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  так, чтобы операция  $+$ , стоящая в перестановочных соотношениях (2.3.32) над операторами  $C_{k\lambda}$ , соответствовала операции эрмитовского сопряжения в определяемом скалярном произведении, т. е.

$$(\Phi_1, C_{k\lambda}\Phi_2) = (C_{k\lambda}^+\Phi_1, \Phi_2).$$

Чтобы определить однозначно скалярное произведение, необходимо еще ввести вектор состояния вакуума  $\Phi_0$ , при действии на который операторов уничтожения частиц должен получаться нуль. Исходя из перестановочных соотношений (2.3.32) в качестве операторов уничтожения частиц, казалось бы, следует взять операторы  $C_{k\lambda}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ),  $C_{k0}^+$ ,

$$C_{k\lambda}\Phi_0 = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad C_{k0}^+\Phi_0 = 0.$$

Однако при таком определении операторов уничтожения не будет существовать физических векторов состояний, удовлетворяющих условно  $\varphi^{(+)}(x)\Phi = 0$  (или  $(C_{k0} - C_{k3})\Phi = 0$ , см. (2.3.17) (2.3.23)) и обладающих конечной нормой. При этом вакуумный вектор состояния  $\Phi_0$  также не будет физическим.

Если бы оператор  $C_{k0}$  был также оператором уничтожения, то вакуумный вектор был бы физическим вектором состояния и данная проблема не возникла бы. Поэтому мы будем теперь исходить из предположения, что все операторы  $C_{k\lambda}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ) являются операторами уничтожения. При этом вектором состояния вакуума мы будем называть такой вектор  $\Phi_0$ , который удовлетворяет условиям

$$C_{k\lambda}\Phi_0 = 0, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3. \quad (2.3.39)$$

Это условие при  $\xi \neq 1$  можно представить в виде

$$A_{\mu}^{(+)}(x)\Phi_0 = 0, \quad (2.3.40)$$

где

$$A_{\mu}^{(\pm)}(x) = A_{\mu}^{(+)(\pm)}(x) + A_{\mu}^{(-)(\pm)}(x), \\ A_{\mu}^{(+)(\pm)}(x) \equiv \partial_{\mu}(a^{(\pm)}(x) + tb^{(\pm)}(x)) - \frac{2}{1-\xi} b^{(\pm)}(x) \delta_{\mu}^0$$

(см. (2.3.35)). Так, определенные операторы  $A_{\mu}^{(+)}(A_{\mu}^{(-)})$  являются операторами уничтожения (рождения).

Определим теперь скалярное произведение в пространстве векторов  $\Phi$ . Как мы говорили ранее, оно должно определяться перестановочными соотношениями (2.3.32), определением вакуума (2.3.39) (который мы для определенности будем считать нормированным на 1;  $(\Phi_0, \Phi_0) = 1$ ) и трактовкой операторов  $C_{k\lambda}^+$  как операторов эрмитовски сопряженных по отношению к операторам  $C_{k\lambda}$ .

Гильбертово пространство векторов состояний мы можем построить в результате действия на вакуум операторов рождения

$$|k_1\lambda_1, \dots, k_n\lambda_n\rangle = C_{k_1\lambda_1}^+ \dots C_{k_n\lambda_n}^+\Phi_0. \quad (2.3.41)$$

Скалярное произведение этих векторов состояний

$$\langle k'_1\lambda'_1, \dots, k'_m\lambda'_m | k_1\lambda_1, \dots, k_n\lambda_n \rangle \equiv \\ \equiv (C_{k'_1\lambda'_1}^+ \dots C_{k'_m\lambda'_m}^+\Phi_0, C_{k_1\lambda_1}^+ \dots C_{k_n\lambda_n}^+\Phi_0)$$

с учетом (2.1.20) может быть записано в виде

$$\langle k'_1\lambda'_1, \dots, k'_m\lambda'_m | k_1\lambda_1, \dots, k_n\lambda_n \rangle = \\ = (\Phi_0, C_{k'_m\lambda'_m} \dots C_{k'_1\lambda'_1} C_{k_1\lambda_1}^+ \dots C_{k_n\lambda_n}^+\Phi_0).$$

Используя далее перестановочные соотношения (2.3.32) и определение вакуума (2.3.39), получаем

$$\langle k'_1\lambda'_1, \dots, k'_m\lambda'_m | k_1\lambda_1, \dots, k_n\lambda_n \rangle = \\ = \delta_{nm} \sum \xi_{\lambda_1} \dots \xi_{\lambda_n} \delta_{k_1\lambda_1; k'_1\lambda'_1} \dots \delta_{k_n\lambda_n; k'_n\lambda'_n}, \quad (2.3.42)$$

где  $\delta_{k\lambda; k'\lambda'} = \delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'}$ , а суммирование производится по всем перестановочным штрихованным индексам. Мы видим, что скалярное произведение  $(\Phi, \Phi)$  может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от того, будет ли в состоянии  $\Phi \equiv C_{k_1\lambda_1}^+ \dots C_{k_n\lambda_n}^+\Phi_0$  число операторов  $C_{k_0}^+$  четным или нечетным.

Таким образом, в отличие от обычной квантовой механики, в которой гильбертово пространство векторов состояний  $\Phi$  характеризуется тем, что  $(\Phi, \Phi) > 0$ , в рассматриваемой схеме квантования электромагнитного поля скалярное произведение  $(\Phi, \Phi)$  может быть как положительным, так и отрицательным\*. В этом случае говорят о гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой. Заметим, что в квантовой механике положительность нормы векторов состояний, т. е. условие  $(\Phi, \Phi) > 0$ , являлось необходимым для физической интерпретации теории. Как далее будет видно, при рассмотрении взаимодействующих электромагнитного и дираковского полей индефинитность метрики не приводит к затруднениям в интерпретации. Это связано с тем, что не все векторы  $\Phi$  описывают физические состояния. Именно физические векторы состояний образуют подпространство гильбертова простран-

\* В квантовую электродинамику индефинитная метрика была введена в работах [6, 7].

ства векторов  $\Phi$ , которое выделяется с помощью условия Лоренца — Ферми (2.3.38).

Согласно определению вакуума (2.3.39),

$$\varphi^{(+)}(x)\Phi_0 = 0. \quad (2.3.43)$$

Поэтому  $\Phi_0$  будет физическим вектором состояния. Другие физические векторы состояний могут быть получены в результате действия на вектор  $\Phi_0$  операторов рождения поперечных фотонов  $C_{k\lambda}^+$ ,  $\lambda = 1, 2$ . Мы учли, что для  $\lambda = 1, 2$ ,  $[C_{k\lambda}^+, \varphi^{(+)}(x)] = 0$  (интерпретация индексов  $k$  и  $\lambda$  как импульса и спиральности рожденного фотона будет дана ниже).

**2.3.4. Структура физического подпространства векторов состояния и калибровочная инвариантность.** Определим теперь вектор состояния физического вакуума  $\Phi_{vac}$  так, чтобы в этом состоянии не было только поперечных фотонов, а вектор  $\Phi_{vac}$  удовлетворял дополнительному условию Лоренца — Ферми

$$C_{k\lambda}\Phi_{vac} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \quad \varphi^{(+)}(x)\Phi_{vac} = 0. \quad (2.3.44)$$

Вектор  $\Phi_0$  удовлетворяет этим условиям. Поэтому  $\Phi_0$  представляет собой вектор состояния физического вакуума. Но это не единственный вектор состояния физического вакуума. Действительно, введем унитарный оператор  $U = U(\varphi(x'))$ , который строится только с помощью операторов  $\varphi(x)$ , коммутирующих в различных точках (см. (2.3.33)). Поскольку (см. (2.3.36'))

$$\varphi(x) = \partial_\mu A^\mu(x) = -\frac{i}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi}} \sqrt{\omega} (C_{k0} - C_{k3}) e^{-ikx} + \text{э. с.}, \quad (2.3.45)$$

легко видеть, что  $[U, C_{k\lambda}] = 0$ ,  $\lambda = 1, 2$  и  $[U, \varphi^{(+)}(x)] = 0$ . Поэтому вектор  $U\Phi_0$  также будет удовлетворять условиям (2.3.44), т. е. будет представлять собой вектор состояния физического вакуума. Таким образом, мы получаем бесчисленное множество векторов состояний физического вакуума

$$\Phi_{vac} = U(\varphi(x'))\Phi_0. \quad (2.3.46)$$

Подчеркнем, что в описываемом вектором  $\Phi_{vac}$  состоянии присутствуют скалярные (связанные с оператором рождения  $C_{k0}^+$ ) и продольные (связанные с оператором  $C_{k3}^+$ ) фотоны. Отметим также, что если мы исходим из физического состояния

$$\Phi = C_{k_1\lambda_1}^+ \dots C_{k_n\lambda_n}^+ \Phi_0, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n = 1, 2, \quad (2.3.47)$$

в котором присутствуют только поперечные фотоны, то мы можем построить эквивалентное физическое состояние

$$\underline{\Phi} = U(\varphi(x'))\Phi, \quad (2.3.48)$$

в котором присутствуют те же поперечные фотоны, а также продольные и скалярные фотоны. Этот произвол в выборе физических векторов связан с произволом калибровки потенциалов в рамках условия Лоренца — Ферми (2.3.38). В этом можно убедиться, если заметить, что теория, использующая векторы состояний  $\Phi$ , эквивалентна теории использующей векторы состояний  $\underline{\Phi}$ , если при этом перейти от операторов поля  $A_\mu(x)$  к операторам  $\underline{A}_\mu(x) = U^+(\varphi) A_\mu(x) U(\varphi)$ :

$$(\underline{\Phi}_1, A_\mu(x)\underline{\Phi}_2) \equiv (U\Phi_1, A_\mu(x)U\Phi_2) = (\Phi_1, \underline{A}_\mu(x)\Phi_2).$$

С другой стороны, оператор  $\underline{A}_\mu(x)$  можно записать в виде  $\underline{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + U^+[A_\mu(x), U]$ . Заметим далее, что, согласно (2.3.35), (2.3.36),

$$\underline{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \equiv U^+ A_\mu(x) U, \quad (2.3.49)$$

$$\Lambda(x) = [U^+, a(x)]U.$$

Отсюда видно, что операторы  $\underline{A}_\mu$  и  $A_\mu$  действительно связаны друг с другом операцией калибровочных преобразований с калибровочной функцией  $\Lambda(x)$ , удовлетворяющей условию  $\partial_\mu \partial^\mu \Lambda(x) = 0$ .

Оператор  $F$  мы будем называть калибровочно-инвариантным оператором, если

$$(U\Phi_1, FU\Phi_2) = (\Phi_1, F\Phi_2)$$

для любых физических векторов состояний  $\Phi_{1,2}$ . Отсюда следует, что калибровочно-инвариантный оператор должен удовлетворять соотношению

$$U(\varphi)^+ FU(\varphi) = F + B, \quad (2.3.50)$$

где  $B$  — оператор, равный нулю в физическом подпространстве

$$(\Phi_1, B\Phi_2) = 0, \quad \varphi^{(+)}(x)\Phi_{1,2} = 0. \quad (2.3.50')$$

Так как  $[F_{\mu\nu}(x), \varphi(x')] = 0$ , то  $U^+ F_{\mu\nu} U = F_{\mu\nu}$ . Поэтому оператор напряженностей электромагнитного поля является калибровочно-инвариантным. Оператор же потенциалов  $A_\mu(x)$  таковым не является. Формула (2.3.50) показывает, что матричные элементы в физическом подпространстве калибровочно-инвариантных операторов не зависят от произвола в выборе физических векторов состояний.

Заметим, что норма физических векторов состояний (2.3.47) всегда положительна

$$(\underline{\Phi}, \underline{\Phi}) = (\Phi, \Phi) > 0.$$

Определим теперь связи операторов электромагнитного поля. Согласно (1.6.42), имеем

$$\underline{A}_\mu(x) A_\nu(x') = \begin{cases} [A_\mu^{(+)}(x), A_\nu^{(-)}(x')], & t > t' \\ -[A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(x')], & t < t'. \end{cases}$$

Поэтому, используя (2.3.33), находим

$$\underline{A}_\mu(x) A_\nu(x') = i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi), \quad (2.3.51)$$

где

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) = \begin{cases} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{(+)}(x; \xi), & t > 0 \\ -\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(-)}(x; \xi), & t < 0 \end{cases}$$

и

$$\mathcal{D}^{(\pm)}(x; \xi) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_\pm} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

(контур интегрирования в плоскости  $k_0$  определен на рис. 1). Поступая аналогично случаю скалярного поля, функцию  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x, \xi)$  можно, очевидно, представить в виде

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (2.3.52)$$

где контур интегрирования изображен на рис. 1. Эту формулу можно переписать в виде (см. раздел 2.1.3).

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} \times \\ \times \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\varepsilon} \right), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

Таким образом, фурье-компонента функции

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) \quad (2.3.53)$$

определяется формулой

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) = -\frac{1}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right), \quad (2.3.53')$$

**2.3.5. Квантовые числа фотонов.** Имея лагранжиан электромагнитного поля (2.3.6), можно построить операторы наблюдаемых величин: энергии-импульса и момента количества движения электромагнитного поля. Мы, однако, не будем здесь заниматься этим вопросом, а отметим лишь, что оператор энергии-импульса поля удовлетворяет соотношению

$$i[P_\nu, A_\mu(x)] = \partial_\nu A_\mu(x), \quad (2.3.54)$$

а оператор момента количества движения  $M_{\mu\nu}$  — соотношению

$$[M_{\mu\nu}, A_\lambda(x)] = (-\Sigma_{\mu\nu} + i(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu)) \lambda^\rho A_\rho(x). \quad (2.3.55)$$

Из этих соотношений, в частности, следует, что операторы  $P_\nu$ ,  $M_{\mu\nu}$  являются калибровочно-инвариантными. Действительно, оператор  $\varphi(x) \equiv \partial^\nu A_\nu(x)$ , согласно (2.3.54), удовлетворяет уравнению

$$i[P_\nu, \varphi(x)] = \partial_\nu \varphi(x).$$

Поэтому

$$U(\varphi)^\dagger P_\nu U(\varphi) = P_\nu + B_\nu, \\ B_\nu = -i \int d^4x U(\varphi)^\dagger \frac{\delta U(\varphi)}{\delta \varphi(x)} \partial_\nu \varphi(x).$$

Поскольку матричные элементы оператора  $B_\nu$  между физическими векторами состояний равны нулю, то отсюда и следует калибровочная инвариантность  $P_\nu$ . Аналогично доказывается калибровочная инвариантность  $M_{\mu\nu}$ .

Согласно (2.3.54), (2.3.13), при  $\xi = 1$  операторы  $C_{k\lambda}^\dagger$ ,  $C_{k\lambda}$  и оператор  $P_\mu$  удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[P_\mu, C_{k\lambda}] = -k_\mu C_{k\lambda}, \quad (2.3.56)$$

$$[P_\mu, C_{k\lambda}^\dagger] = k_\mu C_{k\lambda}^\dagger, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3.$$

Поэтому из (2.3.39) следует, что

$$P_\mu C_{k_1 \lambda_1}^\dagger \dots C_{k_n \lambda_n}^\dagger \Phi_0 = (k_1 + \dots + k_n)_\mu C_{k_1 \lambda_1}^\dagger \dots C_{k_n \lambda_n}^\dagger \Phi_0.$$

Эту формулу можно интерпретировать следующим образом: вектор  $C_{k_1 \lambda_1}^\dagger \dots C_{k_n \lambda_n}^\dagger \Phi_0$  описывает состояние электромагнитного поля, в котором содержится  $n$  фотонов с 4-импульсами  $k_1, \dots, k_n$ . Отсюда следует, что  $C_{k\lambda}^\dagger$  представляет собой оператор рождения фотона с 4-импульсом  $k$ . При  $\xi \neq 0$  аналогичное утверждение справедливо, очевидно, для поперечных фотонов,  $\lambda = 1, 2$ .

Покажем наконец, что индекс  $\lambda$  в операторе  $C_{k\lambda}$  можно связать со спиральностью фотона, т. е. с проекцией момента количества движения фотона на его импульс. С этой целью докажем, что

$$n M C_{k\lambda}^\dagger \Phi_0 = \mu(\lambda) C_{k\lambda}^\dagger \Phi_0, \quad \lambda = 1, 2,$$

$$n M C_{k0}^\dagger \Phi_0 = n M C_{k3}^\dagger \Phi_0 = 0, \quad (2.3.57)$$

где  $M^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} M_{kl}$  — момент количества движения поля,  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  и

$$\mu(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = 1, \\ -1, & \lambda = 2. \end{cases}$$

Воспользуемся с этой целью формулой (2.3.55). Учитывая (2.3.40), имеем

$$M_{ik} A_{\mu}^{(-)}(x) \Phi_0 = (-\Sigma_{ik} + i(x_k \partial_i - x_i \partial_k))_{\mu}^{\nu} A_{\nu}^{(-)}(x) \Phi_0$$

(матрицы  $\Sigma_{ik}$  определяются формулой (2.2.19)). Замечая, что для произвольной функции  $f(k)$  справедливо соотношение

$$\int d^3k f(k) (x_k \partial_i - x_i \partial_k) e^{ikx} = \int d^3k e^{ikx} \left( k_k \frac{\partial}{\partial k^i} - k_i \frac{\partial}{\partial k^k} \right) f(k),$$

так же как и в случае векторного поля, получаем отсюда

$$nM A_{\mu}^{(-)}(k, t) \Phi_0 = -(n\Sigma)_{\mu}^{\nu} A_{\nu}^{(-)}(k, t) \Phi_0,$$

где  $A_{\mu}^{(-)}(k, t)$  — пространственная фурье-компонента оператора  $A_{\mu}^{(-)}(x, t)$  и  $\Sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \Sigma_{kl}$ . Подставляя сюда разложение (2.3.13) и учитывая определение векторов поляризации (см. раздел 2.3.1), получаем формулы (2.3.57).

Соотношения (2.3.57) для физических состояний  $C_{k\lambda}^{\pm} \Phi_0$  ( $\lambda = 1, 2$ ) показывают, что проекция момента количества движения фотона на направление его импульса может принимать два значения  $\mu(\lambda) = \pm 1$ . Проекция орбитального момента количества движения на направление импульса всегда равна нулю. Поэтому спиральность представляет собой проекцию спинового момента на направление импульса фотона. Отсюда мы еще раз убеждаемся, что спин фотона равен единице.

## § 2.4. Квантование поля со спином 1/2

**2.4.1. Уравнение Дирака.** Изучив скалярное и векторные поля, описывающие частицы со спином 0 и 1, перейдем к изучению полей, описывающих частицы со спином 1/2. Такие поля называются дираковскими. Важнейшим примером такого поля является электронно-позитронное поле, частицы которого (электроны и позитроны) обладают спином 1/2.

Прежде всего мы разясним, как уравнение для дираковского поля может быть получено из уравнения Клейна — Гордона путем понижения порядка уравнения (см. § 2.2).

Обозначим функции поля частицы со спином 1/2 через  $\chi_{\rho}(x)$ , где индекс  $\rho$  принимает два значения ( $\rho = 1, 2$ ) в соответствии с тем, что спин частицы предполагается равным 1/2. Функции  $\chi_{\rho}(x)$  должны удовлетворять волновому уравнению Клейна — Гордона

$$(\partial^{\mu} \partial_{\mu} + m^2) \chi_{\rho}(x) = 0 \quad (2.4.1)$$

или уравнению

$$p^{\mu} p_{\mu} \chi(x) = m^2 \chi(x),$$

где  $m$  — масса частицы и  $p_{\mu} = i\partial_{\mu}$ .

Введем далее матрицы Паули

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4.2)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\sigma^i \sigma^k = \delta_{ik} + i\epsilon^{ikl} \sigma^l, \quad \{\sigma^i, \sigma^k\} = 2\delta_{ik}. \quad (2.4.3)$$

Тогда, вводя матрицы  $\bar{\sigma}^{\mu} \equiv g_{\mu\nu} \sigma^{\nu} = (\sigma^0, -\sigma^k)$  и учитывая, что  $(\sigma^{\mu} p_{\mu})(\bar{\sigma}^{\nu} p_{\nu}) = p_{\mu} p^{\mu}$ , можно переписать уравнение (2.4.1) в виде

$$(\sigma^{\mu} p_{\mu})(\bar{\sigma}^{\nu} p_{\nu}) \chi = m^2 \chi. \quad (2.4.4)$$

Для понижения порядка этого уравнения как по временной, так и по пространственным производным, введем новые компоненты поля  $\varphi_{\lambda}(x)$ , ( $\lambda = 1, 2$ )

$$\bar{\sigma}^{\nu} p_{\nu} \chi = m\varphi,$$

после чего уравнение (2.4.4) перепишем в виде

$$(\sigma^{\mu} p_{\mu}) \varphi = m\chi.$$

Таким образом, вместо уравнения второго порядка для двух функций  $\chi_{\rho}(x)$  мы получили четыре уравнения первого порядка для двух функций  $\varphi_{\rho}(x)$  и двух функций  $\chi_{\rho}(x)$

$$i\sigma^{\mu} \partial_{\mu} \varphi - m\chi = 0, \quad (2.4.5)$$

$$i\bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \chi - m\varphi = 0.$$

Будем рассматривать функции  $\varphi$  и  $\chi$  как компоненты единой 4-компонентной функции  $\psi_{\rho}(x)$  ( $\rho = 1, 2, 3, 4$ )

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix},$$

которую назовем биспинором. Тогда, если построить с помощью матриц  $\sigma^{\mu}$ ,  $\bar{\sigma}^{\mu}$  четыре четырехрядные матрицы

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma}^{\mu} \\ \sigma^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.4.6)$$

оба уравнения (2.4.5) могут быть объединены в единое уравнение для  $\psi$

$$(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi(x) = 0. \quad (2.4.7)$$

Это уравнение носит название уравнения Дирака [8].



Заметим, что, согласно (2.4.3), матрицы  $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu &= g^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \bar{\sigma}_\lambda \sigma_\rho, \\ \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu &= g^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \sigma_\lambda \bar{\sigma}_\rho,\end{aligned}\quad (2.4.8)$$

где  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$  — полностью антисимметричный тензор четвертого ранга ( $\varepsilon^{0123} = 1$ ). Отсюда следует, что

$$\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.4.9)$$

Эти формулы показывают, что матрицы  $\gamma^\mu$  удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \equiv \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (2.4.10)$$

Можно показать [9], что эти соотношения определяют матрицы  $\gamma^\mu$  с точностью до преобразования подобия. Это значит, что если матрицы  $\gamma^\mu$  и  $\gamma'^\mu$  удовлетворяют соотношениям

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = 2g^{\mu\nu},$$

то существует такая несингулярная матрица  $S$ , что

$$\gamma'^\mu = S \gamma^\mu S^{-1}.$$

Матрицы  $\gamma^\mu$ , определяемые формулой (2.4.6), удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^{\mu+} = \gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu} \gamma^\nu, \quad (2.4.11)$$

следовательно,  $\gamma^0$  — эрмитова матрица, а  $\gamma^k$  — антиэрмитова матрица ( $k = 1, 2, 3$ ). Отсюда и из (2.4.10) следует, что матрицы  $\gamma^\mu$  унитарны. В дальнейшем будем пользоваться таким представлением матриц  $\gamma^\mu$ , в котором справедлива формула (2.4.11). Как мы видели, дираковские матрицы  $\gamma^\mu$  определяются соотношениями (2.4.10) с точностью до преобразования подобия. Однако физические результаты, получаемые с помощью уравнения Дирака, не должны зависеть от этого преобразования. Поэтому они должны выражаться через величины, которые не зависят от преобразования подобия. Такими величинами являются шпур (или следы) произведений матриц  $\gamma^\mu$ . Покажем, как вычисляются шпур произведения дираковских матриц. Введем предварительную матрицу  $\gamma^5$ :

$$\gamma^5 = -i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (2.4.12)$$

Из соотношений (2.4.10) легко видеть, что

$$\gamma^5 \gamma^5 = 1, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad \gamma^{5+} = \gamma^5. \quad (2.4.13)$$

В представлении (2.4.6)

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (2.4.14)$$

Используя матрицу  $\gamma^5$  и то, что  $\text{Sp } ab = \text{Sp } ba$ , легко показать, что шпур произведения нечетного числа матриц  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) равен нулю

$$\text{Sp } \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} = 0. \quad (2.4.15)$$

Для вычисления шпуров произведений четного числа матриц  $\gamma^\mu$  заметим, что, согласно (2.4.10), справедлива формула

$$\begin{aligned}\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}} &= -\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}} \gamma^{\mu_1} + \\ &+ 2 \sum_{i=2}^{2n} (-1)^i g^{\mu_1 \mu_i} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{i-1}} \gamma^{\mu_{i+1}} \dots \gamma^{\mu_{2n}},\end{aligned}$$

откуда, учитывая, что  $\text{Sp } ab = \text{Sp } ba$ , имеем

$$\text{Sp } \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n}} = \sum_{i=2}^{2n} (-1)^i g^{\mu_1 \mu_i} \text{Sp } \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{i-1}} \gamma^{\mu_{i+1}} \dots \gamma^{\mu_{2n}}. \quad (2.4.16)$$

Таким образом, вычисление шпура от произведения  $2n$  матриц сводится к вычислению шпура от произведения  $2n - 2$  матриц  $\gamma^\mu$ . Замечая, что  $\text{Sp } I = 4$  ( $I$  — единичная 4-рядная матрица), согласно формуле (2.4.16), имеем, например

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu}, \quad (2.4.16')$$

$$\frac{1}{4} \text{Sp } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho = g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}.$$

Введем теперь полную систему 4-рядных матриц, т. е. систему матриц, по которой можно разложить любую 4-рядную матрицу. В случае двухрядных матриц в качестве полной системы могут быть выбраны матрицы  $\sigma^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . В случае 4-рядных матриц в качестве полной системы могут быть выбраны 16 унитарных матриц  $\Gamma_a$  ( $a = 1, \dots, 16$ )

$$\Gamma_a = 1, \quad \gamma^\mu, \quad \gamma^5, \quad \gamma^\mu \gamma^5, \quad \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \equiv \sigma^{\mu\nu} (\mu < \nu). \quad (2.4.17)$$

Поскольку полная система должна состоять из 16 матриц, то нам достаточно доказать линейную независимость матриц  $\Gamma_a$ . Определим с этой целью в пространстве 4-рядных матриц скалярное произведение

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{4} \text{Sp } A^+ B. \quad (2.4.18)$$

Замечая, что

$$\Gamma_a^+ = 1, \gamma_\mu, \gamma^5, -\gamma_\mu, \gamma^5, -\frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu],$$

легко видеть, используя формулы (2.4.15), (2.4.16), что

$$(\Gamma_a, \Gamma_b) = \delta_{ab}. \quad (2.4.19)$$

Это значит, что матрицы  $\Gamma_a$  при таком определении скалярного произведения являются ортонормированными и, следовательно, они линейно независимы.

Поскольку матрицы  $\Gamma_a$  образуют базис, то если некоторая матрица  $B$  коммутирует со всеми матрицами  $\gamma^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ),  $[\gamma^\mu, B] = 0$ , она кратна единичной,  $B = \lambda \cdot I$ .

Наряду с биспинором  $\psi(x)$  введем биспинор  $\bar{\psi}(x)$ , равный

$$\bar{\psi}(x) = \psi^*(x) \gamma^0. \quad (2.4.20)$$

При этом имеется в виду, что 4-рядная матрица  $A$  может действовать на биспинор, находясь как слева, так и справа от него

$$(A\psi)_\rho = A_{\rho\sigma}\psi_\sigma, \quad (\psi A)_\rho = \psi_\sigma A_{\sigma\rho}.$$

Отсюда следует, что  $A\psi = \psi\bar{A}$  ( $\bar{A}$  — матрица, транспонированная по отношению к матрице  $A$ ).

Легко видеть, что биспинор  $\bar{\psi}$  удовлетворяет уравнению

$$(i\tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu + m)\bar{\psi}(x) = 0$$

или

$$\bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) = 0 \quad (2.4.21)$$

(здесь производная  $\bar{\partial}_\mu$  действует на функцию, стоящую слева от  $\bar{\partial}_\mu$ ). Биспинор  $\bar{\psi}(x)$  мы будем называть сопряженным биспинором.

**2.4.2. Преобразование зарядового сопряжения.** Если дираковская частица обладает электрическим зарядом, то она взаимодействует с электромагнитным полем. Подробно мы изучим это взаимодействие в гл. 3. Здесь же используем только тот факт, что уравнение дираковской частицы с зарядом  $e$  в электромагнитном поле  $A_\mu(x)$  имеет следующий вид:

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu(x)) - m)\psi(x) = 0. \quad (2.4.22)$$

Включение взаимодействия заряженного поля  $\psi(x)$  с электромагнитным полем происходит путем замены производных  $\partial_\mu$  на  $\partial_\mu - ieA_\mu(x)$  (принцип минимального электромагнитного взаимодействия; общий вопрос о включении взаимодействия частиц с калибровочными полями будет рассмотрен в гл. 4).

Легко видеть, что сопряженный биспинор  $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^*(x) \gamma^0$  удовлетворяет уравнению

$$(i\tilde{\gamma}^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu(x)) + m)\bar{\psi}(x) = 0. \quad (2.4.23)$$

Уравнения (2.4.22), (2.4.23) описывают одновременно электроны и позитроны, отличающиеся только знаком своего заряда. Поэтому уравнение Дирака (2.4.22) должно быть инвариантно по отношению к изменению знака заряда  $e \rightarrow -e$ , или, что тоже самое, по отношению к преобразованию

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^c(x) = -A_\mu(x). \quad (2.4.24)$$

При этом должно производиться также преобразование дираковского биспинора

$$\psi(x) \rightarrow \psi^c(x), \quad (2.4.25)$$

где биспинор  $\psi^c(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu^c(x)) - m)\psi^c(x) = 0. \quad (2.4.26)$$

Покажем, что биспинор  $\psi^c(x)$  связан с  $\psi(x)$  соотношением

$$\psi^c(x) = C\bar{\psi}(x), \quad (2.4.27)$$

где  $C$  — некоторая матрица.

Уравнение (2.4.23) при учете уравнения (2.4.27) примет вид

$$(iC\tilde{\gamma}^\mu C^{-1} (\partial_\mu - ieA_\mu^c(x)) + m)\psi^c(x) = 0.$$

Для совпадения этого уравнения с (2.4.26) необходимо, чтобы матрица  $C$  удовлетворяла уравнениям

$$C\tilde{\gamma}^\mu C^{-1} = -\gamma^\mu. \quad (2.4.28)$$

Такая матрица, очевидно, существует, поскольку матрицы  $\gamma^\mu$  и  $\tilde{\gamma}^\mu \equiv -\gamma^\mu$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям (2.4.10) (см. раздел 2.4.1).

Можно показать [3], что матрица  $C$  антисимметрична. Ее также можно считать унитарной

$$\tilde{C} = -C, \quad CC^+ = 1. \quad (2.2.28')$$

Преобразование (2.4.25) называется преобразованием зарядового сопряжения, а величина  $\psi^c(x)$  зарядово-сопряженным биспинором. Заметим, что при преобразовании зарядового сопряжения биспинор  $\bar{\psi}(x)$  преобразуется согласно формуле

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^c(x) = C^{-1}\psi(x). \quad (2.4.29)$$

Действительно,  $\bar{\psi}^c(x) = \psi^{c^0} \gamma^0 = \bar{\psi}^* C^{-1} \gamma^0$ . Так как  $\bar{\psi}^* = \bar{\psi} \gamma^0$ , то, используя формулу (2.4.28), мы и приходим к (2.4.29).

**2.4.3. Лагранжиан дираковского поля.** Уравнения (2.4.7), (2.4.21) могут быть получены из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) \psi. \quad (2.4.30)$$

Дираковское поле описывает частицы со спином 1/2. Поэтому величины  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  в классической теории должны трактоваться как грассманы функции (так как  $\gamma^0 (\gamma^{\mu+}) \gamma^0 = \gamma^\mu$ , то лагранжиан (2.4.30) является вещественным,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ ).

Уравнения Дирака (2.4.7), (2.4.21), как и лагранжиан, инвариантны относительно преобразований группы Пуанкаре (1.1.6). Легко видеть, что если величины  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  преобразуются по закону

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(a) \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}(a), \quad (2.4.31)$$

$$x' = ax + d,$$

где

$$S^{-1}(a) \gamma^\mu S(a) = a^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \quad (2.4.32)$$

то

$$\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)) = \mathcal{L}(\psi'(x'), \partial'_\mu \psi'(x')).$$

Это соотношение и доказывает релятивистскую инвариантность лагранжиана, а следовательно, и уравнений Дирака (2.4.7), (2.4.21).

Матрица  $S(a)$  определяется соотношением (2.4.32) с точностью до численного множителя. Чтобы фиксировать этот множитель, наложим условие

$$\det S(a) = 1. \quad (2.4.33)$$

С учетом этого условия матрица  $S$  определяется с точностью до множителей  $\pm 1$ ,  $\pm i$ .

Из соотношений (2.4.32), (2.4.33) следует, что

$$S \gamma^0 S^+ = \gamma^0 \text{Sgn } a^0_0. \quad (2.4.34)$$

Поэтому из (2.4.31), (2.4.20) имеем для ортохронной группы Лоренца ( $a^0_0 \geq 1$ )

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}^+(x') \gamma^0,$$

т. е. связь между биспинорами  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  является релятивистски инвариантной.

Покажем наконец, что при преобразованиях Лоренца  $x \rightarrow x' = ax$  зарядово-сопряженные биспиноры  $\psi^c$ ,  $\bar{\psi}^c$  преобразуются

зуются согласно формулам

$$\psi^c(x) \rightarrow \psi^c(x') = S \psi^c(x) \text{Sgn } a^0_0, \quad \bar{\psi}^c(x) \rightarrow \bar{\psi}^c(x') = \bar{\psi}^c(x) S^{-1}. \quad (2.4.35)$$

Предварительно заметим, что матрица  $S(a)$  удовлетворяет соотношению

$$S C \bar{S} C^{-1} = 1. \quad (2.4.36)$$

Действительно, из формулы (2.4.32) следует, что

$$\bar{S} \gamma^\mu \bar{S}^{-1} = a^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

Поэтому, учитывая (2.4.28), получаем  $S C \bar{S} C^{-1} \gamma^\mu = \gamma^\mu S C \bar{S} C^{-1}$ , следовательно,  $S C \bar{S} C^{-1} = \lambda$  ( $\lambda$  — некоторое число). Так как  $\det S = 1$ , то  $\lambda = \pm 1, \pm i$ . Ясно, что для собственных преобразований Лоренца  $\lambda = 1$ , а для пространственного отражения  $\lambda = 1$ , если  $S = i\gamma^0$ , и  $\lambda = -1$ , если  $S = \gamma^0$ . Для пространственно-временного отражения  $\lambda = 1$  для  $S = \gamma^0$  и  $\lambda = -1$  для  $S = i\gamma^0$ . Доопределив матрицу  $S$  (которая ранее определялась с точностью до множителей  $\pm 1, \pm i$ ) условием  $\lambda = 1$ , придем к соотношению (2.4.36); при этом для простого отражения  $S = \gamma^0$ , а для пространственно-временного отражения  $S = \gamma^5$ .

Так как связь биспиноров  $\psi^{c^0}(x')$ ,  $\bar{\psi}^{c^0}(x')$  с биспинорами  $\bar{\psi}'(x')$ ,  $\psi'(x')$  должна быть такой же, как и связь биспиноров  $\psi^c(x)$ ,  $\bar{\psi}^c(x)$  с биспинорами  $\bar{\psi}(x)$ ,  $\psi(x)$ , то, используя закон преобразования биспиноров  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  при преобразованиях Лоренца (см. (2.4.31), (1.5.32)), а также соотношение (2.4.36), приходим к формулам (2.4.35).

Для бесконечно малых преобразований собственной группы Лоренца  $a^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu + \varepsilon^\nu{}_\mu$  матрица  $S(a)$  определяется формулой

$$S(a) = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu}, \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (2.4.37)$$

В соответствии с общими результатами разделов 1.1.4, 1.4.1 мы можем теперь определить канонический тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\nu \partial^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\nu \bar{\partial}^\mu \bar{\psi}), \quad (2.4.38)$$

связанный с инвариантностью лагранжиана относительно 4-смещений, канонический тензор моментов количества движения

$$M^{\mu\nu\rho}(x) = x^\mu T^{\nu\rho} - x^\nu T^{\mu\rho} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \{ \gamma^\rho, \Sigma^{\mu\nu} \} \psi, \quad (2.4.39)$$

связанный с инвариантностью лагранжиана относительно 4-поворотов, и вектор тока

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad (2.4.40)$$

связанный с инвариантностью лагранжиана относительно фазовых преобразований.

**2.4.4. Квантование дираковского поля.** В квантовой теории дираковского поля грассманы биспиноры  $\psi, \bar{\psi}$  являются операторами, удовлетворяющими уравнениям Дирака. Используя выражение для классического лагранжиана (2.4.30) и результаты раздела 1.5.2, можно получить следующие одновременные перестановочные соотношения для дираковских биспиноров  $\psi, \bar{\psi}$ :

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}_{t=t'} &= \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(x-x'), \\ \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\}_{t=t'} &= \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}_{t=t'} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

Получим теперь разновременные перестановочные соотношения для операторов поля. Заметим, что решение уравнения Дирака  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$  при заданном значении поля  $\psi(x)$  в некоторый момент времени  $t = t'$  имеет вид

$$\psi(x) = -i \int d^3x' S(x-x') \gamma^0 \psi(x'), \quad (2.4.42)$$

где матричная функция  $S(x)$  удовлетворяет уравнению Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S(x) = 0 \quad (2.4.43)$$

и начальному условию

$$S(x)|_{t=0} = i\gamma^0 \delta(\mathbf{x}). \quad (2.4.43')$$

Действительно, так как уравнение Дирака является уравнением первого порядка, то его решение однозначно определяется заданием поля  $\psi$  в начальный момент времени. Поэтому формула (2.4.42) непосредственно следует из (2.4.43), (2.4.43').

Легко видеть, что функция  $S(x)$  имеет вид

$$S(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta(x), \quad (2.4.44)$$

где  $\Delta(x)$  определяется формулой (2.1.13). Действительно, поскольку

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = -\partial^\mu \partial_\mu - m^2,$$

то в силу (2.1.10) функция (2.4.44) удовлетворяет уравнению (2.4.43). Кроме того, из (2.1.10') следует, что функция  $S(x)$  удовлетворяет условию (2.4.43').

Используя теперь формулу (2.4.42) и одновременные перестановочные соотношения (2.4.41), легко получить разнове-

менные перестановочные соотношения для операторов  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ :

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = -iS_{\alpha\beta}(x-x'), \quad (2.4.45)$$

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = 0.$$

Эти перестановочные соотношения являются релятивистски инвариантными.

Введем теперь операторы заряда  $Q$ , вектора энергии-импульса  $P^\mu$  и тензора момента количества движения  $M^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3x : \mathcal{J}^0(x) :, \quad P^\mu = \int d^3x : T^{\mu 0}(x) :, \\ M^{\mu\nu} &= \int d^3x : M^{\mu\nu 0}(x) :, \end{aligned} \quad (2.4.46)$$

где операторы  $\mathcal{J}^\mu, T^{\mu\nu}, M^{\mu\nu\rho}$  определяются формулами (2.4.40), (2.4.38), (2.4.39), в которых под  $\psi, \bar{\psi}$  подразумеваются операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям (2.4.41). Так как операторы  $Q, P^\mu, M^{\mu\nu}$  являются генераторами фазовых преобразований, пространственно-временных сдвигов и пространственно-временных поворотов, то справедливы соотношения (см. (1.4.18), (1.4.34), (1.4.29))

$$[Q, \psi] = -\psi, \quad [Q, \bar{\psi}] = \bar{\psi},$$

$$i[P^\mu, \psi] = \partial^\mu \psi, \quad i[P^\mu, \bar{\psi}] = \partial^\mu \bar{\psi}, \quad (2.4.47)$$

$$[M^{\mu\nu}, \psi] = (-\Sigma^{\mu\nu} + i(x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu)) \psi,$$

$$[M^{\mu\nu}, \bar{\psi}] = (\bar{\Sigma}^{\mu\nu} + i(x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu)) \bar{\psi}.$$

**2.4.5. Операторы рождения и уничтожения частиц со спином 1/2.** Легко найти полную систему решений уравнения Дирака в виде плоских волн (см. [3])

$$\psi(x) = u^{q\mu}(\mathbf{p}) e^{iqpx}, \quad (2.4.48)$$

где  $px = p_0 t - \mathbf{p}\mathbf{x}$ ,  $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Биспинор  $u^{q\mu}(\mathbf{p})$  удовлетворяет уравнениям

$$(\hat{p} - m)u^{q\mu}(\mathbf{p}) = 0, \quad \hat{p} = p_\mu \gamma^\mu, \quad q = \pm 1, \quad (2.4.49)$$

$$\Sigma \mathbf{n} u^{q\mu}(\mathbf{p}) = \mu u^{q\mu}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|, \quad \mu = \pm \frac{1}{2},$$

где  $\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu$  и  $\Sigma^i$  — матрицы спина

$$\Sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \Sigma_{kl},$$

удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[\Sigma^i, \Sigma^j] = i\epsilon^{ijk} \Sigma^k.$$

Биспиноры  $u^{q\mu}(\mathbf{p})$  и  $\bar{u}^{q\mu}(\mathbf{p}) \equiv u^{q\mu}(\mathbf{p})^* \gamma^0$  удовлетворяют соотношениям ортонормировки

$$\bar{u}^{q'\mu'}(\mathbf{p}) u^{q\mu}(\mathbf{p}) = 2m q \delta_{qq'} \delta_{\mu\mu'} \quad (2.4.50)$$

и соотношениям полноты

$$\frac{1}{2m} \sum_{q\mu} q u_{\alpha}^{q\mu}(\mathbf{p}) \bar{u}_{\beta}^{q\mu}(\mathbf{p}) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.4.51)$$

В приложениях играет важную роль матрица проектирования  $\Lambda^{q\mu}(\mathbf{p})$

$$\Lambda^{q\mu}(\mathbf{p}) u^{q'\mu'}(\mathbf{p}) = \delta_{qq'} \delta_{\mu\mu'} u^{q\mu}(\mathbf{p}). \quad (2.4.52)$$

Из этой формулы и формул (2.4.49) следует, что

$$\Lambda^{q\mu}(\mathbf{p}) = \frac{(m + \hat{q}\mathbf{p})(\Sigma\mathbf{n} + \mu)}{4m\mu}. \quad (2.4.53)$$

Легко убедиться в справедливости формул

$$u_{\alpha}^{q\mu}(\mathbf{p}) \bar{u}_{\alpha}^{q\mu}(\mathbf{p}) = 2mq \Lambda_{\alpha\beta}^{q\mu}(\mathbf{p}), \quad (2.4.54)$$

$$\sum_{\mu} u_{\alpha}^{q\mu}(\mathbf{p}) \bar{u}_{\beta}^{q\mu}(\mathbf{p}) = q(m + \hat{q}\mathbf{p})_{\alpha\beta}.$$

Операторы  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , удовлетворяющие уравнениям Дирака, могут быть разложены на плоские волны (см. (1.6.19))

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p\mu} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} a_{p\mu} u^{q\mu}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p\mu} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} a_{p\mu}^+ \bar{u}^{q\mu}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (2.4.55)$$

где коэффициенты разложения  $a_{p\mu}$ ,  $a_{p\mu}^+$  являются операторами.

Легко видеть, что из (2.4.55), (2.4.45) вытекают перестановочные соотношения для операторов  $a_{p\mu}$ ,  $a_{p\mu}^+$ :

$$\begin{aligned} \{a_{p\mu}, a_{p'\mu'}\} &= 0, \quad \{a_{p\mu}^+, a_{p'\mu'}^+\} = 0, \\ \{a_{p\mu}, a_{p'\mu'}^+\} &= \delta_{pp'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\mu\mu'} \end{aligned} \quad (2.4.56)$$

(в этом проще всего убедиться, вычисляя  $\{\psi(x), \bar{\psi}(x')\}$  с помощью разложений (2.4.55) и формул (2.4.56)). Дальнейшая задача заключается в построении векторов состояний дираковского поля и операторов уничтожения и рождения частиц, связанных с этим полем. Для этого воспользуемся формулами (2.4.46) и будем предполагать, что в состоянии вакуума заряд, 4-импульс и 4-момент равны нулю

$$Q\Phi_0 = 0, \quad P_{\mu}\Phi_0 = 0, \quad M_{\mu\nu}\Phi_0 = 0. \quad (2.4.57)$$

Первые два из этих соотношений вместе с формулами (2.4.47) дают

$$\begin{aligned} P_{\mu}\psi(x)\Phi_0 &= -i\partial_{\mu}\psi(x)\Phi_0, \quad P_{\mu}\bar{\psi}(x)\Phi_0 = -i\partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\Phi_0, \\ Q\psi(x)\Phi_0 &= -\psi(x)\Phi_0, \quad Q\bar{\psi}(x)\Phi_0 = \bar{\psi}(x)\Phi_0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда разложения (2.4.55), получаем

$$\begin{aligned} P_{\nu} a_{p\mu} \Phi_0 &= -q p_{\nu} a_{p\mu} \Phi_0, \quad P_{\nu} a_{p\mu}^+ \Phi_0 = q p_{\nu} a_{p\mu}^+ \Phi_0, \\ Q a_{p\mu} \Phi_0 &= -a_{p\mu} \Phi_0, \quad Q a_{p\mu}^+ \Phi_0 = a_{p\mu}^+ \Phi_0. \end{aligned} \quad (2.4.58)$$

Мы должны потребовать теперь, чтобы спектр оператора был положительно определенным (см. § 1.6). Отсюда следует, что вектор состояния вакуума должен удовлетворять соотношениям

$$a_{p1\mu}\Phi_0 = 0, \quad a_{p-1\mu}^+\Phi_0 = 0. \quad (2.4.59)$$

Поэтому нетривиальными из (2.4.58) будут соотношения

$$\begin{aligned} P_{\nu} a_{p-1\mu} \Phi_0 &= p_{\nu} a_{p-1\mu} \Phi_0, \quad P_{\nu} a_{p1\mu}^+ \Phi_0 = p_{\nu} a_{p1\mu}^+ \Phi_0, \\ Q a_{p-1\mu} \Phi_0 &= -a_{p-1\mu} \Phi_0, \quad Q a_{p1\mu}^+ \Phi_0 = a_{p1\mu}^+ \Phi_0. \end{aligned} \quad (2.4.60)$$

Из соотношений (2.4.59), (2.4.60) следует, что операторы  $a_{p1\mu}^+$ ,  $a_{p1\mu}$  являются операторами рождения и уничтожения частиц с импульсом  $\vec{p}$  и зарядом  $+1$ , а операторы  $a_{p-1\mu}$ ,  $a_{p-1\mu}^+$  — операторами рождения и уничтожения частиц с импульсом  $\vec{p}$  и зарядом  $-1$ .

Заметим, что в отличие от бозонов любой из операторов  $a_{p\mu}$ ,  $a_{p\mu}^+$  можно формально интерпретировать как оператор уничтожения, так как  $a$  и  $a^+$  входят симметрично в перестановочные соотношения (2.4.56). В случае бозонов, когда перестановочные соотношения имеют вид  $[a, a^+] = 1$ , оператор  $a^+$  можно интерпретировать как оператор уничтожения только ценой введения индефинитной метрики в гильбертовом пространстве (см. § 2.3).

Покажем, наконец, что индекс  $\mu$  следует интерпретировать как спиральность, т. е. проекцию момента количества движения частицы на ее импульс. Обратимся для этого к соотношениям (2.4.47), (2.4.57), из которых следует, что

$$M_{ik}\psi(x)\Phi_0 = (-\Sigma_{ik} + i(x_k\partial_i - x_i\partial_k))\psi(x)\Phi_0,$$

$$M_{ik}\bar{\psi}(x)\Phi_0 = (\bar{\Sigma}_{ik} + i(x_k\partial_i - x_i\partial_k))\bar{\psi}(x)\Phi_0.$$

Подставляя сюда разложение (2.4.55)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p\mu} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \sum_{\mu} u^{q\mu}(\mathbf{p}) a_{p\mu}$$

и замечая, что

$$\int d^3 p f(p) (x_k \partial_i - x_i \partial_k) e^{-i q p x} = \\ = \int d^3 p e^{-i q p x} \left( p_k \frac{\partial}{\partial p^i} - p_i \frac{\partial}{\partial p^k} \right) f(p)$$

( $f(p)$  — произвольная функция  $p$ ), находим

$$M^i \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sum_{\mu} u^{q\mu}(p) a_{p q \mu} \Phi_0 = - \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sum_{\mu} (\Sigma^i u^{q\mu}(p)) a_{p q \mu} \Phi_0 + \\ + i \epsilon^{i k} p_k \frac{\partial}{\partial p^i} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sum_{\mu} u^{q\mu}(p) a_{p q \mu} \Phi_0,$$

$$M^i \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sum_{\mu} \bar{u}^{q\mu}(p) a_{p q \mu}^+ \Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sum_{\mu} (\tilde{\Sigma}^i \bar{u}^{q\mu}(p)) a_{p q \mu}^+ \Phi_0 + \\ + i \epsilon^{i k} p_k \frac{\partial}{\partial p^i} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \sum_{\mu} \bar{u}^{q\mu}(p) a_{p q \mu}^+ \Phi_0,$$

где  $M^i = \frac{1}{2} \epsilon^{i k} M_{i k}$  — вектор момента количества движения поля ( $\Sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon^{i k} \Sigma_{i k}$ ; см. (1.1.34)).

Умножая эти уравнения скалярно на  $n_i = p_i / |p|$  и используя формулы (2.4.49)

$$(n \Sigma) u^{q\mu}(p) = \mu u^{q\mu}(p), \quad (n \tilde{\Sigma}) \bar{u}^{q\mu}(p) = \mu \bar{u}^{q\mu}(p),$$

получаем

$$(n M) a_{p+1-\mu}^+ \Phi_0 = \mu a_{p+1-\mu}^+ \Phi_0, \\ (n M) a_{p-1-\mu} \Phi_0 = \mu a_{p-1-\mu} \Phi_0. \quad (2.4.61)$$

Эти соотношения показывают, что в состояниях  $a_{p+1-\mu}^+ \Phi_0$ ,  $a_{p-1-\mu} \Phi_0$  проекция момента количества движения на направление импульса равна  $\mu$ . Поскольку проекция орбитального момента на направление импульса равна нулю, то можно сказать, что величина  $\mu$  представляет собой проекцию спинового момента частицы на ее импульс, т. е. спиральность частицы.

Таким образом, операторы  $a_{p\mu} \equiv a_{p\mu}$ ,  $a_{p+1-\mu}^+ \equiv a_{p+1-\mu}^+$  мы должны интерпретировать как операторы уничтожения и рождения фермиона с импульсом  $\vec{p}$ , спиральностью  $\mu$  и зарядом  $+1$ . Операторы  $a_{p-1-\mu}^+ \equiv b_{p\mu}$ ,  $a_{p-1-\mu} \equiv b_{p+1-\mu}^+$  мы должны интерпретировать как операторы уничтожения и рождения фермиона с импульсом  $\vec{p}$ , спиральностью  $\mu$  и зарядом  $-1$ . Этот фермион будем называть античастицей.

Операторы  $a_{p\mu}$ ,  $b_{p\mu}$  удовлетворяют, согласно (2.4.56), перестановочным соотношениям

$$\{a_{p\mu}, a_{p'+\mu'}^+\} = \delta_{pp'} \delta_{\mu\mu'}, \quad \{b_{p\mu}, b_{p'+\mu'}^+\} = \delta_{pp'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (2.4.62)$$

Антикоммутаторы для всех других пар операторов  $a$ ,  $a^+$ ,  $b$ ,  $b^+$  равны нулю.

Приведем теперь разложения операторов полей  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  по операторам уничтожения и рождения частиц и античастиц в состояниях  $p$ ,  $\mu$ . Используя формулы (2.4.55), имеем

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p\mu} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \{a_{p\mu} u^{\mu}(p) e^{-i p x} + b_{p\mu}^+ u^{\mu}(p)^c e^{i p x}\}, \quad (2.4.63)$$

где  $u^{\mu}(p) \equiv u^{\mu}(p)$ . Из этой формулы следует, что

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p\mu} \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}} \{a_{p\mu}^+ \bar{u}^{\mu}(p) e^{i p x} + b_{p\mu} \bar{u}^{\mu}(p)^c e^{-i p x}\}. \quad (2.4.64)$$

Мы учли при этом, что

$$u^{-q-\mu}(p) = C \bar{u}^{q\mu}(p) \equiv u^{q\mu}(p)^c. \quad (2.4.65)$$

Эта формула вытекает из того, что, согласно (2.4.49), биспинор  $u^{q\mu}(p)^c$  удовлетворяет уравнениям

$$(q\hat{p} + m) u^{q\mu}(p)^c = 0, \quad \Sigma n u^{q\mu}(p)^c = -\mu u^{q\mu}(p)^c$$

и, следовательно, согласно (2.4.49),

$$u^{q\mu}(p)^c = \lambda_{q\mu} u^{-q-\mu}(p).$$

Из условий нормировки (2.4.50) следует, что  $\bar{u}^{q\mu}(p)^c u^{q\mu}(p)^c = 2m q$ . Поэтому множитель  $\lambda_{q\mu}$  по модулю равен единице. Так как биспиноры  $u^{q\mu}(p)$  определены условием нормировки с точностью до фазового множителя, то последний можно выбрать так, чтобы выполнялось условие  $\lambda_{q\mu} = 1$ .

**2.4.6. Связи операторов дираковского поля.** Найдем теперь связи между операторами дираковского поля. Согласно (1.6.42), имеем

$$\chi(x_1) \chi(x_2) = \begin{cases} \{\chi^{(+)}(x_1), \chi^{(-)}(x_2)\}, & t_1 > t_2, \\ -\{\chi^{(-)}(x_1), \chi^{(+)}(x_2)\}, & t_1 < t_2. \end{cases}$$

С другой стороны, из перестановочных соотношений (2.4.45) следует, что

$$\{\psi^{(+)}(x_1), \psi^{(-)}(x_2)\} = \{\bar{\psi}^{(+)}(x_1), \bar{\psi}^{(-)}(x_2)\} = 0,$$

поэтому

$$\psi(x_1) \psi(x_2) = \bar{\psi}(x_1) \bar{\psi}(x_2) = 0. \quad (2.4.66)$$

Далее, согласно (2.4.45),

$$\{\psi^{(+)}(x_1), \bar{\psi}^{(-)}(x_2)\} = -i S^{(+)}(x_1 - x_2), \\ \{\psi^{(-)}(x_1), \bar{\psi}^{(+)}(x_2)\} = -i S^{(-)}(x_1 - x_2),$$

где  $S^{(+)}(x)$ ,  $S^{(-)}(x)$  — положительно и отрицательно частотные части функции  $S(x)$ . Поэтому

$$\underline{\Psi(x_1)} \bar{\Psi}(x_2) = -iS^c(x_1 - x_2), \quad (2.4.67)$$

где

$$S^c(x) = \theta(t) S^{(+)}(x) - \theta(-t) S^{(-)}(x)$$

( $\theta(t) = 1$  при  $t > 0$  и  $\theta(t) = -1$  при  $t < 0$ ). Так как

$$S^{(\pm)}(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^{(\pm)}(x), \quad (2.4.68)$$

то

$$S^c(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) (\theta(t) \Delta^{(+)}(x) - \theta(-t) \Delta^{(-)}(x)) + i\gamma^0 \delta(t) (\Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x)).$$

Замечая, что  $\Delta^{(+)}(x) + \Delta^{(-)}(x) = \Delta(x)$  и  $\Delta(x, 0) = 0$ , имеем

$$S^c(x) = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \Delta^c(x), \quad (2.4.69)$$

где функция  $\Delta^c(x)$  определяется формулой (2.1.25)

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4 p e^{-ipx} \frac{1}{m^2 - p^2}.$$

Поскольку функцию  $\Delta^c(x)$  можно представить в виде

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx} \Delta^c(p), \quad \Delta^c(p) = \frac{1}{m^2 - p^2 - i0},$$

то фурье-компонента функции  $S^c(x)$

$$S^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx} S^c(p) \quad (2.4.70)$$

будет определяться формулой

$$S^c(p) = \frac{\hat{p} + m}{m^2 - p^2 - i0} = \frac{1}{m - \hat{p} - i0}. \quad (2.4.71)$$

## § 2.5. Квантование двухкомпонентного спинорного поля

**2.5.1. Структура матрицы преобразования дираковского поля.** При преобразовании Лоренца биспинор  $\psi$  преобразуется согласно формуле (2.4.31). Покажем, что для собственной группы Лоренца, представление этой группы, реализуемое 4-рядными матрицами  $S(a)$ , является приводимым, т. е. в некотором базисе матрица  $S(a)$  имеет структуру

$$S(a) = \begin{pmatrix} T(a) & 0 \\ 0 & T'(a) \end{pmatrix}, \quad (2.5.1)$$

где  $T(a)$  и  $T'(a)$  — двухрядные матрицы. При этом, заметим, было справедливо соотношение (см. раздел 2.4.3)

$$S^{-1} \gamma^5 S = \gamma^5 \det a. \quad (2.5.2)$$

Для собственных преобразований Лоренца  $\det a = 1$  и, следовательно, все матрицы  $S(a)$  коммутируют с  $\gamma^5$ , а так как  $\gamma^5$  не единичная матрица, то это значит, что представление осуществляемое матрицами  $S(a)$ , приводимо.

Рассмотрим теперь базис, в котором матрицы  $\gamma^\mu$  имеют вид (2.4.6) (это представление матриц  $\gamma^\mu$  называется представлением Вейля). В этом базисе

$$\underline{\gamma}^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (2.5.3)$$

где  $I$  — двухрядная единичная матрица. Отсюда следует, что четырехрядная матрица  $S(a)$ , коммутирующая с  $\gamma^5$ , должна иметь структуру (2.5.1).

Так как для собственной группы Лоренца  $S\gamma^0 S^+ = \gamma^0$  (см. (2.4.34)), то, используя формулы (2.4.6), имеем

$$T' = T^{+-1}$$

и, следовательно,

$$S(a) = \begin{pmatrix} T(a) & 0 \\ 0 & T^+(a)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.5.4)$$

В вейлевском представлении матриц  $\gamma^\mu$  биспинор  $\psi$  записываем в виде  $\psi = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}$  (см. п. 2.4.1). Поэтому при собственных преобразованиях Лоренца двухкомпонентные функции  $\Phi$  и  $\chi$  преобразуются независимо согласно формулам

$$\Phi \rightarrow \Phi' = T\Phi, \quad \chi \rightarrow \chi' = T^{+-1}\chi. \quad (2.5.5)$$

Величины, преобразующиеся по этим формулам, носят название спиноров (см. раздел 2.5.3).

Уравнение, которому удовлетворяет матрица  $T(a)$ , получается из уравнения (2.4.32) в результате подстановки в (2.4.32) выражений (2.5.4), (2.4.6) для матриц  $S(a)$  и  $\gamma^\mu$ :

$$T^+ \sigma^\mu T = a^\mu_\nu \sigma^\nu; \quad (2.5.6)$$

$$T^{-1} \bar{\sigma}^\mu T^{+-1} = a^\mu_\nu \bar{\sigma}^\nu. \quad (2.5.7)$$

Покажем, что уравнение (2.5.7) является следствием (2.5.6). Докажем с этой целью, что

$$(\gamma^\mu_\nu \sigma^\nu)^{-1} = a_{\mu\nu} \bar{\sigma}^\nu, \quad (2.5.8)$$

Согласно (2.4.9), (1.1.7), имеем

$$a_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\nu}a^{\mu}_{\lambda}\sigma^{\lambda} = \frac{1}{2}a_{\mu\nu}a^{\mu}_{\lambda}(\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\lambda} + \bar{\sigma}^{\lambda}\sigma^{\nu}) = a_{\mu\nu}a^{\mu\nu} = 1$$

(по  $\mu$  суммирование не производится). Написав далее уравнение (2.5.6) для обратных матриц и используя (2.5.8), мы и придем к (2.5.7).

Уравнение (2.5.6) определяет матрицу  $T(a)$  с точностью до фазового множителя, который может быть сведен к  $\pm 1$ , при условии наложения на  $T(a)$  условия

$$\det T(a) = 1. \quad (2.5.9)$$

Действительно, из определения матриц  $\sigma^{\mu}$  следует, что

$$\det(a^{\mu}_{\nu}\sigma^{\nu}) = g^{\mu\mu}.$$

Поэтому  $|\det T|^2 = 1$ , и, следовательно, фазовый множитель можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение (2.5.9).

Итак, каждому собственному преобразованию Лоренца  $a^{\mu}_{\nu}$  соответствуют две двухрядные матрицы  $\pm T(a)$  с  $\det T(a) = 1$  (если коэффициенты  $a^{\mu}_{\nu}$  соответствуют пространственному отражению или обращению времени, то уравнение (2.5.6) для  $T$  не имеет решений).

Покажем, что справедливо и обратное утверждение: если  $T$  — произвольная двухрядная матрица с  $\det T = 1$ , то коэффициенты  $a^{\mu}_{\nu}$ , определяемые формулой (2.5.6), соответствуют некоторому собственному преобразованию Лоренца. Так как  $\sigma^{\mu+} = \sigma^{\mu}$ , то из формулы (2.5.6) следует, что  $a^{\mu*}_{\nu}\sigma^{\nu} = a^{\mu}_{\nu}\sigma^{\nu}$ .

Поэтому коэффициенты  $a^{\mu}_{\nu}$  вещественны.

Убедимся теперь, что выполняется условие ортогональности  $a^{\mu}_{\lambda}g^{\lambda\rho}a^{\nu}_{\rho} = g^{\mu\nu}$ . Поскольку  $\det T = 1$ , то  $\det T^{+}\sigma^{\mu}T = g^{\mu\mu}$  и, следовательно, согласно (2.5.6),  $\det(a^{\mu}_{\nu}\sigma^{\nu}) = g^{\mu\mu}$ . Используя явный вид матриц Паули, получаем  $a^{\mu}_{\nu}a^{\mu}_{\rho}g^{\nu\rho} = g^{\mu\mu}$ . Из этого соотношения и из (2.4.9) следует, что

$$a^{\mu}_{\nu}\bar{\sigma}^{\nu}a^{\mu}_{\lambda}\sigma^{\lambda} = \frac{1}{2}a^{\mu}_{\nu}a^{\mu}_{\lambda}(\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\lambda} + \bar{\sigma}^{\lambda}\sigma^{\nu}) = a^{\mu}_{\nu}a^{\mu}_{\lambda}g^{\nu\lambda} = g^{\mu\mu}.$$

Поэтому  $(a_{\mu\lambda}\sigma^{\lambda})^{-1} = a^{\mu}_{\nu}\bar{\sigma}^{\nu}$  (см. (2.5.8)) и, следовательно, согласно (2.5.6), справедливы соотношения

$$T^{-1}\bar{\sigma}^{\mu}T^{+1} = a^{\mu}_{\nu}\bar{\sigma}^{\nu},$$

$$T^{-1}\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu}T = a^{\mu}_{\rho}a^{\nu}_{\lambda}\bar{\sigma}^{\rho}\sigma^{\lambda}.$$

Замечая, что  $\frac{1}{2}\text{Sp } \bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} = g^{\mu\nu}$ , получаем из последнего уравнения  $a^{\mu}_{\rho}g^{\rho\lambda}a^{\nu}_{\lambda} = g^{\mu\nu}$ .

Таким образом, каждой двухрядной матрице  $T$  с  $\det T = 1$  соответствует некоторое преобразование Лоренца и каждому преобразованию Лоренца соответствуют две матрицы  $T$  (с детерминантом, равным единице), отличающиеся только знаком. Заметим, что двухрядные матрицы  $T$  с  $\det T = 1$  определяются шестью вещественными параметрами ( $2 \cdot 4 - 2 = 6$ ) и таким же количеством параметров определяются произвольные преобразования Лоренца.

Двухрядные матрицы  $T(a)$  с  $\det T = 1$  осуществляют неприводимое представление собственной группы Лоренца. Действительно, пусть  $T(a)$  и  $T(a')$  — две матрицы, удовлетворяющие соотношениям (2.5.6) с коэффициентами преобразования Лоренца  $a$  и  $a'$ . Тогда из (2.5.6) следует, что

$$(T(a')T(a))^{+}\sigma^{\mu}(T(a')T(a)) = a'^{\mu}_{\lambda}a^{\lambda}_{\nu}\sigma^{\nu},$$

поэтому  $T(a')T(a) = \pm T(a')$ .

**2.5.2. Матрицы преобразования спиноров при бесконечно малых преобразованиях Лоренца.** Рассмотрим теперь бесконечно малое преобразование Лоренца  $a^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \varepsilon^{\mu}_{\nu}$ . Соответствующую ему матрицу  $T(a)$  можно записать в виде

$$\bar{T}(a) = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad (2.5.10)$$

где  $\sigma^{\mu\nu}$  — некоторые двухрядные матрицы, антисимметричные по индексам  $\mu$  и  $\nu$ . Подставляя (2.5.10) в (2.5.6), получаем

$$-i\varepsilon^{\mu\nu}(\sigma^{\lambda}\sigma_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\lambda}) = \varepsilon^{\mu\nu}(\delta_{\mu}^{\lambda}\sigma_{\nu} - \delta_{\nu}^{\lambda}\sigma_{\mu}),$$

откуда следует соотношение

$$\sigma^{\lambda}\sigma_{\mu\nu} - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\lambda} = -i(\delta_{\nu}^{\lambda}\sigma_{\mu} - \delta_{\mu}^{\lambda}\sigma_{\nu}).$$

Учитывая, что  $\text{Sp } \sigma_{\mu\nu} = 0$  (так как  $\det T = 1$ ), получаем отсюда

$$\sigma^{ik} = \bar{\sigma}_{ik} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}\sigma_l, \quad \sigma_{0k} = -\frac{i}{2}\sigma^k = \sigma^{k0}. \quad (2.5.11)$$

Эти формулы можно записать в 4-мерном виде

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}). \quad (2.5.11')$$

Из (2.5.10), (2.5.11') следует, что матрица  $T^{+1}$  (с помощью которой преобразуются величины  $\chi$  (см. (2.5.4)) для бесконечно малых преобразований Лоренца имеет вид

$$T^{+1} = 1 - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}, \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}). \quad (2.5.12)$$

Учитывая (1.1.14), (2.5.10), (2.5.12), можно представить матрицу  $\Sigma^{\mu\nu}$ , осуществляющую собственное преобразование



Лоренца биспиноров  $\psi$ , в виде

$$\Sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (2.5.13)$$

Рассмотрим теперь подгруппу собственной группы Лоренца, соответствующую пространственным поворотам. Для нее  $a^0_0 = 1$ ,  $a^k_0 = a^0_k = 0$ , поэтому уравнения (2.5.6) принимают вид

$$T^+ \sigma^k T = a^k_l \sigma^l, \quad T^+ T = 1. \quad (2.5.14)$$

Таким образом, пространственным вращениям соответствует двухрядная унитарная матрица  $T$  с  $\det T = 1$ .

Двухрядные унитарные матрицы  $T$  с  $\det T = 1$  образуют группу  $SU(2)$ . Эти матрицы осуществляют неприводимое представление группы пространственных вращений, причем коэффициентам преобразований поворота  $a^k_l$  соответствует матрица  $T(a)$ , определяемая (2.5.14).

Рассмотрим, в частности, вращение на угол  $\varphi$  вокруг оси  $z \equiv z$ :

$$x'^1 = x^1 \cos \varphi - x^2 \sin \varphi, \quad x'^2 = x^1 \sin \varphi + x^2 \cos \varphi, \quad x'^3 = x^3, \quad (2.5.15)$$

которому соответствует матрица  $T(\varphi)$ . Из группового закона умножения (см. (1.1.13)) следует, что

$$T(\varphi + \delta\varphi) T(-\varphi) = T(\delta\varphi).$$

Учитывая, что  $T(-\varphi) = T^{-1}(\varphi)$ ,  $T(0) = 1$ , имеем

$$\frac{dT(\varphi)}{d\varphi} = \frac{T(\delta\varphi) - 1}{\delta\varphi} \Big|_{\delta\varphi \rightarrow 0} T(\varphi).$$

Согласно (2.5.15),  $\varepsilon^1_2 = -\delta\varphi$ ,  $\varepsilon^2_1 = \delta\varphi$ , следовательно (см. (2.5.10)),

$$T(\delta\varphi) - 1 = i\sigma^{12}\delta\varphi = \frac{i}{2}\sigma^3\delta\varphi.$$

Поэтому

$$\frac{dT(\varphi)}{d\varphi} = \frac{i}{2}\sigma^3 T(\varphi)$$

и, следовательно,

$$T(\varphi) = e^{\frac{i}{2}\sigma^3\varphi}$$

или

$$T(\varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} + i\sigma^3 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (2.5.16)$$

Мы видим, что  $T(2\pi) = -1$ . Таким образом, тождественному преобразованию ( $\varphi = 0, 2\pi$ ) соответствуют две матрицы

$T = \pm 1$ . Это находится в согласии с тем, что каждому преобразованию  $a_{\mu\nu}$  соответствует две матрицы, отличающиеся знаком.

**2.5.3. Спинорная алгебра.** Вернемся теперь к закону преобразования двухкомпонентных величин  $\varphi$

$$\varphi_\alpha \rightarrow \varphi'_\alpha = T_{\alpha\beta}(a) \varphi_\beta.$$

Если двухкомпонентные величины  $\varphi^\rho$  ( $\rho = 1, 2$ ) преобразуются по закону

$$\varphi^\rho \rightarrow \varphi'^\rho = T^\rho_\sigma \varphi^\sigma, \quad (2.5.17)$$

где  $T^\rho_\sigma$  — произвольная двухрядная матрица с  $\det T = 1$ ,

$$\det T \equiv T^1_1 T^2_2 - T^1_2 T^2_1 = 1, \quad (2.5.18)$$

то такие величины называются контравариантным спинором первого ранга. Преобразования (2.5.17) образуют, очевидно, группу, так как два последовательных преобразования с матрицами  $T$  и  $T'$  ( $\det T = \det T' = 1$ ) эквивалентны одному преобразованию с матрицей  $T'' = T'T$ , детерминант которой также равен единице. Эта группа имеет название группы  $SL(2)$ .

Таким образом, величины  $\varphi_\alpha$  в уравнении Дирака образуют контравариантный спинор первого ранга  $\varphi^\alpha$ , причем  $T^\alpha_\beta \equiv T_{\alpha\beta}$ .

Введем далее ковариантный спинор первого ранга  $\chi_\rho$  с законом преобразования

$$\chi_\rho \rightarrow \chi'_\rho = \chi_\lambda (T^{-1})^\lambda_\rho, \quad (2.5.19)$$

где  $(T^{-1})^\lambda_\rho \equiv (T^{-1})_{\lambda\rho}$  — матрица, обратная по отношению к матрице  $T^\lambda_\rho$ :

$$(T^{-1})^\lambda_\rho T^\rho_\sigma = \delta^\lambda_\sigma$$

( $\delta^\lambda_\sigma \equiv \delta_{\lambda\sigma}$ ). Легко видеть, что

$$\varphi'^\rho \chi'_\rho = \varphi^\rho \chi_\rho. \quad (2.5.20)$$

Эта формула разъясняет целесообразность введения наряду с контравариантными ковариантными спинорами: благодаря этому достигается возможность просто строить инварианты преобразований (2.5.17), (2.5.19).

Рассмотрим двухкомпонентные величины, преобразующиеся с помощью комплексно сопряженной матрицы  $T^*$ , которые будем называть пунктирными спинорами и обозначать через  $\varphi^\mu$  и  $\chi_\mu$ . Эти величины (по определению) преобразуются как  $\varphi^{\mu*}$  и  $\chi^*_\mu$ :

$$\varphi^{\dot{\mu}} \rightarrow \varphi^{\dot{\mu}'} = T^{\dot{\mu}}_{\dot{\sigma}} \varphi^{\dot{\sigma}}, \quad T^{\dot{\mu}}_{\dot{\sigma}} \equiv T^{\mu*}_{\sigma}, \quad (2.5.21)$$

$$\chi_{\dot{\mu}} \rightarrow \chi_{\dot{\mu}'} = \chi_{\dot{\sigma}} (T^{-1})^{\dot{\sigma}}_{\dot{\mu}}, \quad (T^{-1})^{\dot{\sigma}}_{\dot{\mu}} \equiv (T^{-1})^{\sigma*}_{\mu}$$

и называются соответственно контравариантным и ковариантным пунктирным спинором первого ранга.

Введем далее спиноры высших рангов  $\varphi_{\sigma_1 \dots \sigma_n \dot{\xi}_1 \dots \dot{\xi}_n}^{\lambda_1 \dots \lambda_n \dot{\nu}_1 \dots \dot{\nu}_n}$ , которые преобразуются как произведения соответствующих спиноров первого ранга  $\varphi^{\lambda \dots \lambda} \chi_{\dot{\xi}}$ . Например,

$$\begin{aligned} \varphi^{\lambda \dot{\rho}} &\rightarrow \varphi'^{\lambda \dot{\rho}} = T^{\lambda}_{\alpha} T^{\dot{\rho}}_{\dot{\beta}} \varphi^{\alpha \dot{\beta}} \\ \varphi^{\lambda}_{\dot{\rho}} &\rightarrow \varphi'^{\lambda}_{\dot{\rho}} = T^{\lambda}_{\alpha} \varphi^{\alpha}_{\dot{\beta}} (T^{-1})^{\dot{\beta}}_{\dot{\rho}}. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Для спиноров высших рангов можно ввести операцию свертки, при которой ранг спинора уменьшается на две единицы. Свертка производится по верхнему и нижнему индексу одинаковой природы. Например, из спинора третьего ранга  $\varphi^{\alpha\beta}_{\dot{\rho}}$  можно построить спинор первого ранга  $\varphi^{\alpha} \equiv \varphi^{\alpha\beta}_{\dot{\rho}}$  (по дважды встречающемуся индексу производится суммирование). Путем перемножения спиноров можно образовывать спиноры высших рангов, например,  $\varphi^{\alpha}_{\dot{\beta}} = \varphi^{\alpha\lambda\mu}_{\dot{\rho}\dot{\sigma}\dot{\tau}} \chi_{\lambda\mu}^{\rho\sigma}$  (путем свертки по  $\alpha$  и  $\beta$  мы получаем инвариант (2.5.20)).

Рассмотрим теперь величины  $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$ , где  $\varepsilon^{12} = 1$  ( $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$ ,  $\varepsilon^{21} = -1$ ). Если считать их компонентами некоторого контравариантного спинора, то он не будет изменяться при спинорном преобразовании. Действительно,

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \rightarrow \varepsilon'^{\alpha\beta} = T^{\alpha}_{\rho} T^{\beta}_{\lambda} \varepsilon^{\rho\lambda},$$

а так как  $\det T = 1$ , то  $\varepsilon'^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta}$ . Поэтому спинор  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  можно назвать универсальным спинором.

С помощью спинора  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  можно переходить от ковариантных к контравариантным компонентам спиноров. Например, если  $\varphi_{\rho}$  — ковариантный спинор первого ранга, то  $\varepsilon^{\alpha\rho} \varphi_{\rho}$  — спинор третьего ранга, а  $\varphi^{\alpha} \equiv \varepsilon^{\alpha\beta} \varphi_{\beta}$  — контравариантный спинор первого ранга.

Аналогично можно ввести универсальный контравариантный пунктирный спинор  $\varepsilon^{\alpha\dot{\beta}} \equiv \varepsilon^{\alpha\beta}$ , с помощью которого можно связать ковариантные и контравариантные компоненты пунктирных спиноров.

Универсальный ковариантный спинор  $\varepsilon_{\alpha\dot{\beta}}$  ( $\varepsilon_{\alpha\dot{\beta}}$ ) определяется с помощью соотношения  $\varepsilon_{\alpha\dot{\beta}} \varepsilon^{\beta\rho} = \delta_{\alpha}^{\rho}$  ( $\varepsilon_{\alpha\dot{\beta}} \varepsilon^{\dot{\beta}\rho} = \delta_{\alpha}^{\rho}$ ). При этом, очевидно,  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -1$ . С помощью спиноров  $\varepsilon_{\alpha\dot{\beta}}$ ,  $\varepsilon_{\dot{\alpha}\beta}$  можно опускать спинорные индексы.

Как мы видели, величины  $\chi_{\dot{\alpha}}$  преобразуются по закону

$$\chi_{\dot{\alpha}} \rightarrow \chi'_{\dot{\alpha}} = \chi_{\dot{\beta}} (T^{-1})^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}},$$

который, отвлекаясь от спинорных обозначений, можно написать в виде

$$\chi_{\alpha} \rightarrow \chi'_{\alpha} = (T^{-1})^{-1}_{\alpha\beta} \chi_{\beta}.$$

Но по такому же закону преобразуется, как мы видели (см. (2.5.4)), двухкомпонентная функция  $\chi_{\alpha}$ , образующая вместе с  $\varphi$  четырехкомпонентный биспинор  $\psi$ . Поэтому можно считать, что четырехкомпонентная функция поля  $\psi$  объединяет контравариантный спинор  $\varphi^{\rho}$  и ковариантный пунктирный спинор  $\chi_{\dot{\lambda}}$

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi^{\rho} \\ \chi_{\dot{\lambda}} \end{pmatrix}. \quad (2.5.23)$$

Покажем теперь, что с помощью спиноров можно строить 4-векторы и 4-тензоры. Введем с этой целью величины  $(\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha}$ , преобразующиеся по индексу  $\mu$  как 4-вектор, и по индексам  $\dot{\beta}$ ,  $\alpha$  — как ковариантный спинор

$$(\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha} \rightarrow (\sigma'^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha} = a^{\mu}_{\nu} (\sigma^{\nu})_{\dot{\lambda}\rho} (T^{-1})^{\dot{\lambda}}_{\dot{\beta}} (T^{-1})^{\rho}_{\alpha}. \quad (2.5.24)$$

Ясно, что величины

$$v^{\mu} = \xi^{\alpha\dot{\beta}} (\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha}, \quad (2.5.25)$$

где  $\xi^{\alpha\dot{\beta}}$  — контравариантный спинор второго ранга, образует вектор, так как

$$\begin{aligned} v^{\mu} \rightarrow v'^{\mu} &= \xi'^{\rho\dot{\lambda}} (\sigma'^{\mu})_{\dot{\lambda}\rho} = a^{\mu}_{\nu} T^{\rho}_{\alpha} T^{\dot{\lambda}}_{\dot{\beta}} \xi^{\alpha\dot{\beta}} \times \\ &\times (\sigma^{\nu})_{\dot{\gamma}\delta} (T^{-1})^{\dot{\gamma}}_{\dot{\lambda}} (T^{-1})^{\delta}_{\rho} \end{aligned}$$

или

$$v'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} \xi^{\alpha\dot{\beta}} (\sigma^{\nu})_{\dot{\beta}\alpha} = a^{\mu}_{\nu} v^{\nu}.$$

Мы хотим, чтобы входящий сюда спин-вектор  $(\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha}$  был универсальным, т. е. чтобы выполнялось условие

$$(\sigma'^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha} = (\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha}.$$

Для этого, согласно (2.5.24), нужно связать матрицу спинорных преобразований  $T$  с лоренцевским преобразованием  $a_{\mu\nu}$

$$(\sigma^{\mu})_{\dot{\beta}\alpha} = a^{\mu}_{\nu} (\sigma^{\nu})_{\dot{\lambda}\rho} (T^{-1})^{\dot{\lambda}}_{\dot{\beta}} (T^{-1})^{\rho}_{\alpha}.$$

Отвлекаясь от спинорных обозначений, это соотношение можно переписать в виде

$$\sigma^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} T^{-1} \sigma^{\nu} T^{-1}$$

или

$$T^{-1} \sigma^{\mu} T = a^{\mu}_{\nu} \sigma^{\nu}.$$

Сравнение этой формулы с (2.5.6) показывает, что матрицы Паули  $\sigma^\mu$  можно рассматривать как универсальный спин-вектор, не меняющийся при одновременном лоренцевском и спинорном преобразованиях, если только оба эти преобразования связаны между собой соотношением (2.5.6).

Формула (2.5.7) показывает, что матричные элементы  $(\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}$  можно также рассматривать как универсальный спин-вектор  $(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\beta}$  ( $(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\beta} \equiv (\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta}$ ; заметим, что  $(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\beta} = (\sigma^\mu)^{\beta\alpha}$ , где  $(\sigma^\mu)^{\beta\alpha} = \varepsilon^{\beta\lambda}\varepsilon^{\alpha\rho}(\sigma^\mu)_{\lambda\rho}$ ).

Таким образом, формулу (2.5.25) можно переписать в виде

$$v^\mu = \xi_{\alpha\beta} (\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\beta}.$$

С помощью универсального спин-вектора  $(\sigma^\mu)_{\beta\alpha}$  можно строить 4-тензоры любого ранга. Например,

$$v^{\mu\nu} = \xi^{\alpha\beta\rho\lambda} (\sigma^\mu)_{\beta\alpha} (\sigma^\nu)_{\lambda\rho},$$

где  $\xi^{\alpha\beta\rho\lambda}$  — контравариантный спинор четвертого ранга, будет тензором второго ранга.

**2.5.4. Уравнения Вейля и Майорана.** Пусть  $\varphi^\alpha$  обозначает контравариантное спинорное поле  $\varphi^\alpha(x)$ . Тогда ясно, что  $(\sigma^\mu)_{\beta\alpha} \partial_\mu \varphi^\alpha$  будет ковариантным спинорным полем. Если поэтому  $\chi_{\dot{\beta}}(x)$  также ковариантное спинорное поле, то возможно уравнение вида

$$(\sigma^\mu)_{\beta\alpha} \partial_\mu \varphi^\alpha + im \chi_{\dot{\beta}} = 0, \quad (2.5.26)$$

где  $m$  — константа. Поскольку далее  $(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \chi_{\dot{\beta}}$  — контравариантный спинор, то возможно уравнение

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \chi_{\dot{\beta}} + im \varphi^\alpha = 0, \quad (2.5.27)$$

где  $\varphi^\alpha$  — поле, входящее в (2.5.26). Таким образом мы приходим к уравнениям Дирака (2.4.5).

Если нужно получить релятивистски инвариантное уравнение только для одного поля  $\varphi^\alpha$  (в которое не входит комплексно сопряженный спинор  $\varphi_{\dot{\alpha}}$ ), то мы должны приравнять нулю комбинацию  $(\sigma^\mu)_{\beta\alpha} \partial_\mu \varphi^\alpha$ :

$$(\sigma^\mu)_{\beta\alpha} \partial_\mu \varphi^\alpha = 0 \quad (2.5.28)$$

или, отвлекаясь от спинорных обозначений,

$$\sigma^\mu \partial_\mu \varphi = 0. \quad (2.5.28')$$

Это уравнение, согласно (2.4.5), соответствует уравнению Дирака для частиц с массой, равной нулю. Оно описывает нейтри-

но (если масса нейтрино равна нулю) и называется уравнением Вейля [10].

Если допустить, что в уравнение для спинора  $\varphi^\alpha$  может войти комплексно сопряженный спинор  $\varphi_{\dot{\beta}}$ , то величину  $(\sigma^\mu)_{\beta\alpha} \partial_\mu \varphi^\alpha$  можно приравнять  $im \varphi_{\dot{\beta}} \equiv im \varphi_{\dot{\beta}}^*$ ,

$$(\sigma^\mu)_{\beta\alpha} \partial_\mu \varphi^\alpha - im \varphi_{\dot{\beta}}^* = 0, \quad \varphi_{\dot{\beta}} = \varepsilon_{\beta\rho} \varphi^\rho. \quad (2.5.29)$$

Это уравнение называется уравнением Майорана [11].

Мы рассматривали собственные преобразования Лоренца. Если рассмотреть теперь пространственное отражение ( $a_i^k = -\delta_i^k, a_0^0 = 1, a_0^k = a_k^0 = 0$ ), то, согласно (2.4.32), матрица  $S$  будет совпадать с  $i\gamma^0, S = i\gamma^0$ . Поэтому в вейлевском представлении матриц  $\gamma^\mu$  биспинор  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$  будет преобразовываться по закону

$$\varphi \rightarrow \varphi' = i\chi, \quad \chi \rightarrow \chi' = i\varphi. \quad (2.5.30)$$

Отсюда следует, что четырехмерное представление  $S(a)$  является неприводимым по отношению к полной группе Лоренца, хотя оно и приводимо по отношению к собственной группе Лоренца. Этим объясняется тот факт, что только уравнение Дирака, а не уравнение Вейля и уравнение Майорана, инвариантно по отношению к пространственным отражениям.

Разъясним теперь, как уравнение Майорана может быть получено из уравнения Дирака.

Пусть заряд частицы равен нулю. Тогда, согласно (2.5.22), (2.5.23) уравнение Дирака допускает решение, для которых биспинор  $\psi(x)$  совпадает с зарядово-сопряженным биспинором  $\psi^c(x)$ :

$$\psi(x) = \psi^c(x). \quad (2.5.31)$$

Такой биспинор называется майорановским [11]. Он может служить для описания нейтрино в том случае, если масса нейтрино отлична от нуля.

Дираковский биспинор всегда можно представить в виде

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (2.5.32)$$

где

$$\psi_L = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi, \quad \psi_R = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi$$

(такое разбиение  $\psi$  играет важную роль в теории электрослабого взаимодействия). Для майорановского биспинора

$$\psi_R = \frac{1 - \gamma^5}{2} C \bar{\psi}.$$

Учитывая, что  $C^{-1}\gamma^5 C = \tilde{\gamma}^5$  получаем

$$\psi_R = C\tilde{\gamma}^0 \left( \frac{1+\gamma^5}{2} \psi \right)^* = C\tilde{\gamma}^0 \psi_L^* = C\tilde{\psi}_L$$

или

$$\psi_R = \psi_L^c.$$

Таким образом, майорановский биспинор можно представить в виде

$$\psi = \psi_L + \psi_L^c. \quad (2.5.33)$$

Если использовать вейлевское представление матриц  $\gamma^\mu$ :

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то легко проверить, что матрица  $C$  будет иметь вид

$$C = i \begin{pmatrix} -\sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.34)$$

Поэтому, если записать майорановский биспинор  $\psi$  в виде  $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ , то условие  $\psi^c = \psi$  приводит к соотношению  $\varphi = -i\sigma^2 \chi^*$ , таким образом

$$\psi = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \chi^* \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (2.5.35)$$

Из этой формулы следует, что

$$\psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 \chi^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем спинор  $\chi$  удовлетворяет, согласно (2.5.22), уравнению

$$\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + m\sigma^2 \chi^* = 0. \quad (2.5.36)$$

**2.5.5. Лагранжиан и квантование спинорного поля.** Мы перейдем теперь к квантовой теории майорановского поля. Согласно (2.5.35), майорановский биспинор имеет структуру

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ i\sigma^2 \varphi^* \end{pmatrix}, \quad (2.5.37)$$

причем спинор  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\sigma^\mu \partial_\mu \varphi - m\sigma^2 \varphi^* = 0. \quad (2.5.38)$$

Это уравнение может быть получено из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\varphi^* \sigma^\mu \partial_\mu \varphi + \varphi \sigma^\mu \partial_\mu \varphi^*) - \frac{i}{2} m (\varphi^* \sigma^2 \varphi^* - \varphi \sigma^2 \varphi), \quad (2.5.39)$$

в котором поля  $\varphi(x)$  представляют собой грассмановы функции. Этот лагранжиан релятивистски инвариантен, поскольку поле  $\varphi(x)$  преобразуется как релятивистский контравариантный спинор, а поле  $\varphi^*(x)$  — как контравариантный пунктирный спинор (см. п. 2.5.3). Лагранжиан (2.5.39) (с точностью до несущественного множителя 1/2) совпадает с лагранжианом дираковского поля (2.4.30), если вместо  $\psi$  и матриц  $\gamma^\mu$  использовать формулы (2.5.37), (2.4.6).

Для получения уравнения движения нужно найти вариацию  $\mathcal{L}$  на классе вариаций  $\delta\varphi(x)$ ,  $\delta\varphi^*(x)$ , которые антикоммутируют с полями  $\varphi$ ,  $\varphi^*$ . Легко видеть, что

$$\delta\mathcal{L} = \delta\varphi (i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi^* + im\sigma^2 \varphi) + \delta\varphi^* (i\sigma^\mu \partial_\mu \varphi - im\sigma^2 \varphi^*) + \frac{1}{2} \partial_\mu (i\varphi^* \sigma^\mu \delta\varphi + i\tilde{\varphi} \sigma^\mu \delta\varphi^*).$$

Отсюда следуют уравнения движения

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \varphi - im\sigma^2 \varphi^* = 0, \quad i\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \varphi^* + im\sigma^2 \varphi = 0 \quad (2.5.40)$$

(второе уравнение является эрмитовски сопряженным по отношению к первому).

Вариации  $\delta\varphi$ ,  $\delta\varphi^*$ , не зависящие от функций  $\varphi$ ,  $\varphi^*$ , можно рассматривать как бесконечно малые канонические преобразования, поскольку эти вариации оставляют инвариантной кинематическую часть действия. Генератор этих преобразований в квантовой теории, согласно § 1.5, определяется формулой

$$G = i \int d^3x (\varphi^+ \delta\varphi + \varphi \delta\varphi^+).$$

Учитывая, что

$$\delta\varphi = i[G, \varphi], \quad \delta\varphi^+ = i[G, \varphi^+],$$

находим отсюда одновременные перестановочные соотношения для полей  $\varphi$ ,  $\varphi^+$ :

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\}_{t=t'} = 0, \quad \{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\}_{t=t'} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.5.41)$$

**2.5.6. Разложение на плоские волны и разновременные перестановочные соотношения.** Уравнение Майорана (2.5.38) не имеет, очевидно, решений вида  $e^{ipx}$ , так как в это уравнение наряду с  $\varphi$  входит  $\varphi^+$ . Однако оно имеет решения, представляющие собой суперпозицию волн  $e^{ipx}$  и  $e^{-ipx}$ . Видно, что комбинация

$$A \equiv u(\mathbf{p}) e^{-ipx} a + v(\mathbf{p}) e^{ipx} a^\dagger \quad (2.5.42)$$

удовлетворяет уравнению (2.5.38), если

$$\hat{\sigma}u - im\sigma^2 v^* = 0, \quad -\hat{\sigma}v - im\sigma^2 u^* = 0,$$

где  $\hat{\sigma} = \sigma^\mu p_\mu$ . Из первого уравнения следует, что

$$v = \frac{i}{m} u^* \hat{\sigma} \sigma^2. \quad (2.5.43)$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$\{-\sigma^2 \hat{\sigma} \sigma^2 \hat{\sigma} + m^2\} u^* = 0.$$

Легко видеть, что  $\sigma^2 \hat{\sigma} \sigma^2 \hat{\sigma} = p^2$  (мы учли, что  $\sigma^2 \tilde{\sigma}^k \sigma^2 = -\tilde{\sigma}^k$ ,  $\sigma^2 \sigma^0 \sigma^2 = \tilde{\sigma}^0$ ). Поэтому это уравнение имеет нетривиальное решение, если  $p^2 - m^2 = 0$ . Чтобы фиксировать спинор  $u$  потребуем выполнения условия

$$\sigma n u_\lambda(p) = \lambda u_\lambda(p), \quad n = p/|p|. \quad (2.5.44)$$

Так как  $(\sigma n)^2 = 1$ , то  $\lambda = \pm 1$ . Спинор  $u \equiv u_\lambda(p)$  мы будем нормировать согласно условию

$$u_\lambda^*(p) u_\lambda(p) = 1.$$

Очевидно, спиноры  $u_\lambda(p)$  удовлетворяют следующим условиям ортонормированности и полноты:

$$u_\lambda^*(p) u_{\lambda'}(p) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (2.5.46)$$

$$\sum_\lambda (u_\lambda^*(p))_\alpha (u_\lambda(p))_\beta = \delta_{\alpha\beta}.$$

Произвольное решение уравнения Майорана согласно (2.5.38) может быть представлено в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p\lambda} \frac{m}{\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \lambda\rho)}} \{u_\lambda(p) e^{-ipx} a_{p\lambda} + v_\lambda(p) e^{ipx} a_{p\lambda}^+\}, \quad (2.5.46)$$

где  $a_{p\lambda}$  и  $a_{p\lambda}^+$  — некоторые операторы, зависящие от  $\lambda$  и  $p$ ,  $\rho_0 > 0$ . Множитель  $m/\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \lambda\rho)}$  выбран так, чтобы операторы  $a^+$  и  $a$  были операторами рождения и уничтожения частиц (см. ниже). Согласно (2.5.43), (2.5.44), спинор  $v_\lambda(p)$  может быть представлен в виде

$$v_\lambda(p) = -\frac{i}{m} (\rho_0 - \lambda\rho) \sigma^2 u_\lambda^*(p), \quad p \equiv |p|. \quad (2.5.47)$$

Поэтому замечая, что  $m'(\rho_0 - \lambda\rho) = (\rho_0 + \lambda\rho)/m$ , разложение (2.5.46) можно записать в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p\lambda} \frac{m}{\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \lambda\rho)}} \{u_\lambda(p) e^{-ipx} a_{p\lambda} - i\sigma^2 u_{-\lambda}^*(p) e^{ipx} a_{p-\lambda}^+\}, \quad (2.5.48)$$

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p\lambda} \frac{m}{\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \lambda\rho)}} \{u_\lambda^*(p) e^{ipx} a_{p\lambda}^+ - i\sigma^2 u_{-\lambda}(p) e^{-ipx} a_{p-\lambda}\}.$$

Перестановочные соотношения для операторов  $a$ ,  $a^+$  можно найти, используя перестановочные соотношения (2.5.41) для  $\varphi(x)$  и  $\varphi^+(x)$ . Они имеют следующий вид:

$$\{a_{p\lambda}, a_{p'\lambda'}\} = 0, \quad \{a_{p\lambda}, a_{p'\lambda'}^+\} = \delta_{pp'} \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.5.49)$$

Операторы  $a_{p\lambda}$ ,  $a_{p\lambda}^+$  представляют собой операторы уничтожения и рождения частицы с импульсом  $p$  и спиральностью  $\lambda$ . Покажем, что из этих соотношений вытекают соотношения (2.5.41). С этой целью найдем разновременные антикоммутирующие  $\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\}$ ,  $\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\}$ .

Используя (2.5.48), (2.5.49) и условие полноты (2.5.45), найдем

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\} = m(\sigma^2)_{\alpha\beta} \Delta(x - x'), \quad (2.5.50)$$

где

$$\Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{ipx} \frac{\sin p_0 t}{p_0}$$

(см. раздел 2.1.2). Найдем далее  $\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\}$ . Заметим, что из (2.5.44) и условия полноты (2.5.45) вытекает соотношение

$$(u_\lambda(p)^*)_\beta (u_\lambda(p))_\alpha = (\mathcal{P}_\lambda)_{\alpha\beta}, \quad \mathcal{P}_\lambda = \frac{\sigma n + \lambda}{2\lambda}, \quad (2.5.51)$$

из которого следует

$$\sum_\lambda \frac{m}{\rho_0 \pm \lambda\rho} (u_\lambda(p))_\alpha (u_\lambda(p))^*_\beta = \frac{\rho_0}{m} \delta_{\alpha\beta} \mp \frac{\rho}{m} (\sigma n)_{\alpha\beta}.$$

Используя это соотношение и формулы (2.5.48), (2.5.49), получаем окончательно

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\} = (\bar{\sigma}^u \partial_\mu)_{\alpha\beta} \Delta(x - x'). \quad (2.5.52)$$

Формулы (2.5.50), (2.5.52) и представляют собой разновременные релятивистски-инвариантные перестановочные соотношения для полей  $\varphi$ ,  $\varphi^+$ . Замечая, что  $\Delta(x)|_{t=0} = 0$  и  $\partial_0 \Delta(x)|_{t=0} = \delta(\mathbf{x})$ , из формул (2.5.50), (2.5.52) получаем одновременные перестановочные соотношения (2.5.41).

2.5.7. Связи операторов майорановского поля. Как и в случае дираковского поля, связи между операторами майорановского поля можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta(x') &= \begin{cases} \{\varphi_\alpha^{(+)}(x), \varphi_\beta^{(-)}(x')\}, & t > t', \\ -\{\varphi_\alpha^{(-)}(x), \varphi_\beta^{(+)}(x')\} & t < t'; \end{cases} \\ \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta^+(x') &= \begin{cases} \{\varphi_\alpha^{(+)}(x), \varphi_\beta^{+(-)}(x')\}, & t > t', \\ -\{\varphi_\alpha^{(-)}(x), \varphi_\beta^{+(-)}(x')\}, & t < t'. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя найденные разновременные перестановочные соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta(x') &= m(\sigma^2)_{\alpha\beta} \Delta^c(x-x'), \\ \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta^+(x') &= (\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \Delta^c(x-x'), \end{aligned}$$

где

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{m^2 - p^2} \quad (2.5.53)$$

(определение контура интегрирования см. в п. 2.1.3).  
Определяя фурье-компоненты связей формулами

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta(x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \underline{\varphi_\alpha \varphi_\beta}(p), \\ \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta^+(x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \underline{\varphi_\alpha \varphi_\beta^+}(p), \end{aligned} \quad (2.5.54)$$

получаем

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha \varphi_\beta}(p) &= \frac{m(\sigma^2)_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i0}, \\ \underline{\varphi_\alpha \varphi_\beta^+}(p) &= -i \frac{(\bar{\sigma}^\mu p_\mu)_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i0}. \end{aligned} \quad (2.5.55)$$

Мы считали, что масса частиц, связанных с полем  $\varphi(x)$ , отлична от нуля. В этом случае лагранжиан не инвариантен относительно фазового преобразования

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = e^{-i\alpha} \varphi(x).$$

В случае же  $m=0$  лагранжиан (2.5.39) инвариантен относительно фазовых преобразований, благодаря чему для поля  $\varphi(x)$  возникает закон сохранения «заряда»  $Q = \int d^3x \mathcal{J}_0(x)$  и соответствующий ему дифференциальный закон сохранения  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x) = 0$ , где

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \varphi^+(x) \sigma^\mu \varphi(x). \quad (2.5.56)$$

Безмассовое поле  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению Вейля

$$\sigma^\mu \partial_\mu \varphi(x) = 0$$

и перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} \{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\} &= 0, \quad \{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\} = \\ &= (\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \mathcal{D}(x-x'). \end{aligned} \quad (2.5.57)$$

Связи для безмассового поля  $\varphi(x)$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta(x') &= 0, \\ \underline{\varphi_\alpha(x)} \varphi_\beta^+(x') &= (\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \mathcal{D}^c(x-x') \end{aligned} \quad (2.5.58)$$

(здесь  $\mathcal{D}(x) = \Delta(x)|_{m=0}$ ,  $\mathcal{D}^c(x) = \Delta^c(x)|_{m=0}$ ).

Приведем, наконец, разложение безмассового поля  $\varphi(x)$  на плоские волны. Из (2.5.48) следует, что при  $m \rightarrow 0$  в этом разложении должно отсутствовать слагаемое, соответствующее  $\lambda = -1$ . Так как

$$\frac{m}{\sqrt{2\rho_0(\rho_0 - \rho)}} \xrightarrow{m \rightarrow 0} 1,$$

то разложение (2.5.48) принимает вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \{u_{\mathbf{1}}(\mathbf{p}) e^{-ipx} a_{\mathbf{p}} - i\sigma^2 u_{-1}^*(\mathbf{p}) e^{ipx} b_{\mathbf{p}}^+\}, \quad (2.5.59)$$

где оператор  $a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}\mathbf{1}}$  можно интерпретировать как оператор уничтожения частицы с импульсом  $\mathbf{p}$  и спиральностью  $\lambda = 1$ , а оператор  $b_{\mathbf{p}}^+ \equiv a_{\mathbf{p}-1}^+$  — как оператор рождения античастицы с импульсом  $\mathbf{p}$  и спиральностью  $\lambda = -1$ . Таким образом, в двухкомпонентной безмассовой теории частицы отличаются от античастиц знаком спиральности. Заметим, что у поля  $\varphi(x)$  при  $m \neq 0$  нет закона сохранения заряда  $Q$ . Поэтому в этом случае нельзя отличить частицы от античастиц.

## ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### § 3.1. Лагранжиан и матрица рассеяния электромагнитного и электронно- позитронного полей

**3.1.1. Основные уравнения квантовой электродинамики.** Ранее рассматривалось квантование различных свободных полей, теперь же перейдем к рассмотрению квантовой теории взаимодействующих полей и начнем с изучения взаимодействия электромагнитного и электронно-позитронного (дираковского) полей\*. Лагранжиан электромагнитного и электронно-позитронного полей должен быть выбран в виде (см. (2.4.30), (2.3.6))

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_M + \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m) \psi + \\ &+ \frac{1}{2} \psi (i\tilde{\gamma}^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m) \bar{\psi}, \\ \mathcal{L}_M &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Так как дираковские поля  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  являются ферми-полями, то они представляют собой грассмановы функции. Взаимодействие между электронно-позитронным и электромагнитным полями включается, как известно, заменой производной  $\partial_\mu$  в лагранжиане свободного дираковского поля на  $\partial_\mu - ieA_\mu$  (см. § 2.4). Лагранжиан (3.1.1) приводит к калибровочно инвариантным уравнениям движения. В силу калибровочной инвариантности нельзя выразить поле  $A_\mu$  через динамически независимые переменные. Для решения данного вопроса необходимо нарушить калибровочную инвариантность, наложив на поле  $A_\mu$  некоторое дополнительное условие. Если поля  $A_k$  удовлетворяют условию пространственной поперечности [1, 4],  $\partial^k A_k = 0$ , то говорят о кулоновской (или радиационной)

\* В этой главе многие результаты будут формулироваться без приведения доказательств, так как последние содержатся в ряде известных монографий по квантовой электродинамике [1-3].

калибровке электромагнитного поля. Преимуществом этой калибровки является то, что в ней не возникает духовых состояний, т. е. состояний, соответствующих скалярным и продольным фотонам. Однако в кулоновской калибровке отсутствует явная релятивистская инвариантность теории. Поэтому мы будем пользоваться не кулоновской калибровкой, а лоренцевской, в которой нарушение калибровочной инвариантности производится релятивистски инвариантным образом. С этой целью к лагранжиану (3.1.1) добавляется калибровочно инвариантное, но релятивистски инвариантное слагаемое

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2\xi} (2\varphi \partial_\nu A^\nu - \varphi^2),$$

где  $\xi$  — произвольная константа;  $-\frac{1}{\xi} \varphi$  — новое поле, сопряженное с полем  $A_0$ ,  $-\xi^{-1} \varphi = \partial \mathcal{L}' / \partial_0 A_0$  (см. раздел 2.3.1).

Таким образом, будем исходить из лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \frac{1}{2\xi} (2\varphi \partial_\nu A^\nu - \varphi^2) + \\ &+ \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m) \psi + \frac{1}{2} \psi (i\tilde{\gamma}^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m) \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

В этом случае говорят, что лагранжиан задан в лоренцевской калибровке.

Этот лагранжиан можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = F_{k0} \partial_0 A^k - \frac{1}{\xi} \varphi \partial_0 A_0 + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi + \frac{i}{2} \psi \tilde{\gamma}^0 \partial_0 \bar{\psi} - \omega, \quad (3.1.3)$$

где явно выписанные слагаемые определяют кинематическую часть лагранжиана и величина  $\omega$ , согласно общей формуле (1.3.27), представляет собой плотность энергии взаимодействующих полей

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \omega_{int}, \\ \omega_0 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F^{kl} (\partial_k A_l - \partial_l A_k) + F^{k0} \partial_k A_0 + \\ &+ \frac{1}{2\xi} (2\varphi \partial_k A^k - \varphi^2) - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^k \partial_k - m) \psi - \frac{1}{2} \psi (i\tilde{\gamma}^k \partial_k + m) \bar{\psi}, \\ \omega_{int} &= j_\mu A^\mu, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

где  $j_\mu$  — плотность 4-тока электронно-позитронного поля

$$j_\mu = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (3.1.4')$$

Здесь  $\omega_0$  — оператор плотности энергии свободных полей,  $\omega_{int}$  — оператор плотности энергии взаимодействия.

Гамильтониан взаимодействия в гейзенберговском представлении определяется формулой

$$V(t) = \int d^3x w_{int}(x). \quad (3.1.5)$$

Исходя из лагранжиана (3.1.3) можно, согласно разделу 1.5.2, получить одновременные перестановочные соотношения для взаимодействующих полей. Учитывая, что кинематические части лагранжиана  $L$  и лагранжианов (2.4.30), (2.3.21) для свободных полей совпадают, можно утверждать, что одновременные перестановочные соотношения для взаимодействующих полей совпадают с перестановочными соотношениями (2.3.29), (2.4.41) для свободных полей

$$\begin{aligned} [F^{0k}(x), A_l(x')]_{t=t'} &= i\delta_l^k \delta(x-x'), \quad [\varphi(x), A_0(x')]_{t=t'} = \\ &= i\xi \delta(x-x'), \quad \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}_{t=t'} = (\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Здесь выписаны только отличные от нуля коммутаторы и антикоммутаторы (бозевские и фермиевские поля коммутируют друг с другом).

Используя принцип стационарного действия, можно получить уравнения движения взаимодействующих полей. Для электромагнитного поля они имеют вид

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = \varphi, \\ \partial^\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} \partial_\mu \varphi &= j_\mu, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

а для электронно-позитронного поля —

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi = 0, \quad (i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m)\bar{\psi} = 0. \quad (3.1.8)$$

Заметим, что из последних уравнений и определения тока  $j_\mu$  следует закон сохранения 4-тока:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.1.9)$$

Отсюда и из уравнений (3.1.7) вытекают уравнения второго порядка для полей  $A_\mu$ ,  $\varphi$ :

$$\partial^\nu \partial_\nu A_\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \varphi = -j_\mu, \quad \varphi = \partial_\nu A^\nu, \quad \partial_\mu \partial^\mu \varphi = 0 \quad (3.1.10)$$

Из перестановочных соотношений (3.1.6) вытекают одновременные перестановочные соотношения для полей  $\partial_0 A_\mu$ ,  $A_\mu$ :

$$\begin{aligned} [A_l(x'), \partial_0 A^k(x)]_{t=t'} &= -i\delta_l^k \delta(x-x'), \\ [A_0(x'), \partial_0 A_0(x)]_{t=t'} &= -i\xi \delta(x-x') \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

(остальные коммутаторы равны нулю).

Заметим, что в классической теории можно было считать, что  $\varphi = 0$  (см. § 2.3). Это приводило к ограничению на потенциалы  $\partial_\mu A^\mu = 0$  и, следовательно, к уравнению поля  $\partial^\nu \partial_\nu A_\mu = -j_\mu$ . Условие  $\varphi = 0$  соответствует лоренцевой калибровке в классической электродинамике. В квантовой теории нельзя считать, что  $\varphi = 0$ , поскольку такое предположение противоречит второму из перестановочных соотношений (3.1.11).

Поэтому на операторы  $A_\mu(x)$  не может быть наложено условие Лоренца  $\partial^\mu A_\mu = 0$ . Вместо него возникает ограничение на векторы состояний  $\Psi$ .

Так как мы рассматриваем гейзенберговское представление операторов, то векторы состояний полей  $\Psi$  не зависят от времени. Реальным физическим состояниям соответствуют такие векторы  $\Psi$ , которые удовлетворяют дополнительному условию Лоренца — Ферми [5]

$$\varphi^{(+)}(x)\Psi = 0, \quad (3.1.12)$$

где  $\varphi^{(+)}(x)$  — положительно частотная часть оператора  $\varphi(x)$ . Заметим, что так как  $\partial^\mu \partial_\mu \varphi = 0$ , то это условие совместно с уравнениями поля.

**3.1.2. Представление взаимодействия и  $S$ -матрица.** В предыдущем разделе мы пользовались гейзенберговским представлением квантовой механики, в котором векторы состояний не зависят от времени. Однако в квантовой электродинамике при конкретных расчетах целесообразно использовать представление взаимодействия, которое было введено в разделе 1.5.1. Это связано с тем, что безразмерная константа взаимодействия электронно-позитронного и электромагнитного полей  $e^2/4\pi\hbar c$  мала ( $e^2/4\pi\hbar c = 1/137$ ). Построение теории возмущений по этому параметру наиболее просто проводится в представлении взаимодействия.

Согласно (1.5.5), (1.5.3), векторы состояния  $\Phi(t)$  и операторы  $R(t)$  в представлении взаимодействия связаны с векторами состояния  $\Psi$  и операторами  $R(t)$  в гейзенберговском представлении соотношениями

$$\Phi(t) = S(t, 0)\Psi, \quad R(t) = S(t, 0)R(t)S(t, 0)^+,$$

где оператор преобразования  $S(t, 0)$  удовлетворяет уравнению (1.5.7)

$$i \frac{\partial S(t, 0)}{\partial t} = \underline{V}(t)S(t, 0), \quad S(0, 0) = 1.$$

Гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия  $\underline{V}(t)$  определяется формулой

$$\underline{V}(t) = - \int d^3x \underline{j}_\mu(x) \underline{A}^\mu(x), \quad (3.1.13)$$



где плотность 4-тока  $\underline{j}_\mu(x)$  в представлении взаимодействия равна

$$\underline{j}_\mu(x) = e \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \quad (3.1.14)$$

Вектор состояния полей  $\Phi(t)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \underline{V}(t) \Phi(t). \quad (3.1.15)$$

Операторы полей  $\underline{A}_\mu$ ,  $\underline{\psi}$ ,  $\bar{\underline{\psi}}$  в представлении взаимодействия удовлетворяют уравнениям (см. [4])

$$\begin{aligned} \partial^\nu \partial_\nu \underline{A}_\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu \partial^\nu \underline{A}_\nu &= 0, \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \underline{\psi} &= 0, \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) \bar{\underline{\psi}} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Так как уравнения поля и одновременные перестановочные соотношения в представлении взаимодействия совпадают с уравнениями поля и одновременными перестановочными соотношениями для свободных полей в лоренцевской калибровке, то будут совпадать также и разновременные перестановочные соотношения для взаимодействующих полей в представлении взаимодействия и для свободных полей

$$\begin{aligned} [\underline{A}_\mu(x), \underline{A}_\nu(x')] &= i \mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x'; \xi), \\ \{\underline{\psi}_\alpha(x), \bar{\underline{\psi}}_\beta(x')\} &= -i S_{\alpha\beta}(x - x') \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

(мы не выписываем перестановочные соотношения, соответствующие операторам, для которых обращаются в нуль коммутаторы или антикоммутаторы).

Не останавливаясь на доказательстве, заметим, что условие Лоренца — Ферми в представлении взаимодействия может быть сформулировано в виде (см. [6])

$$\{\underline{\varphi}^{(+)}(x) - \xi \int d^3x' \mathcal{D}^{(+)}(x - x') \underline{j}_0(x')\} \Phi(t') = 0. \quad (3.1.18)$$

Заметим также, что справедливо соотношение (см. [4])

$$[S, \underline{\varphi}(x)] = 0, \quad (3.1.19)$$

где  $S = S(-\infty, \infty)$  — матрица рассеяния в лоренцевой калибровке

$$S = T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{V}(t) \right\} \quad (3.1.20)$$

и  $\underline{V}(t)$  определяется формулой (3.1.13). Условие (3.1.19) мы будем называть свойством калибровочной инвариантности

матрицы рассеяния (см. раздел 2.3.4). Матрица рассеяния (3.1.20) имеет, согласно (3.1.13), явно релятивистски инвариантный вид

$$S = T \exp i \int d^4x \underline{j}_\mu(x) \underline{A}^\mu(x). \quad (3.1.21)$$

Операторы полей в представлении взаимодействия могут быть разложены (так же как и в теории свободного поля) на плоские волны (см. (2.3.35), (2.4.36)). Отсюда следует, что положительно частотные части полевых операторов мы должны по-прежнему интерпретировать как операторы уничтожения частиц, а отрицательно частотные части полевых операторов — как операторы рождения частиц. Связи между полевыми операторами в представлении взаимодействия мы определим по-прежнему как разность  $T$  и  $N$  — произведений двух полевых операторов в представлении взаимодействия. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \underline{A}_\mu(x) \underline{A}_\nu(x') &= i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi), \\ \underline{\psi}_\alpha(x) \bar{\underline{\psi}}_\beta(x') &= -i S_{\alpha\beta}^c(x - x') \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

(остальные связи между полевыми операторами равны нулю).

Зная связи между операторами в лоренцевой калибровке, можно вычислить в теории возмущений по заряду матричные элементы  $S$  — матрицы (3.1.21) (см. разд. 3.2.2).

Заметим, что оператор плотности тока в представлении взаимодействия можно записать в виде нормального произведения полевых операторов:

$$\underline{j}_\mu(x) = e : \bar{\underline{\psi}}(x) \gamma_\mu \underline{\psi}(x) :. \quad (3.1.23)$$

Как мы видели, матрица рассеяния в лоренцевской калибровке имеет явно релятивистски-инвариантный вид. Однако это представление матрицы рассеяния обладает тем недостатком, что для формального обеспечения релятивистской инвариантности в ней требуется введение нефизических частиц (духов) — скалярных и продольных фотонов. Наличие духов затрагивает физическую интерпретацию условия унитарности, которому удовлетворяет матрица рассеяния

$$S^+ S = 1. \quad (3.1.24)$$

Учитывая условие полноты векторов состояний

$$\sum_m |m\rangle \langle m| = 1, \quad \langle m|m\rangle = \pm 1, \quad (3.1.25)$$

имеем

$$\sum_m \langle a | S^+ | m \rangle \langle m | m \rangle \langle m | S | b \rangle = \delta_{ab} \langle a | a \rangle. \quad (3.1.26)$$

Векторы  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$ ,  $|m\rangle$  определяют состояния, в которых присутствуют частицы с определенными импульсами и поляризациями. Обычно  $\langle m | m \rangle = 1$ . Однако в квантовой электродинамике при использовании лоренцевой калибровки метрика в полном гильбертовом пространстве является индефинитной, поэтому величина  $\langle m | m \rangle = \pm 1$  (именно  $\langle m | m \rangle = (-1)^{N_0}$ , где  $N_0$  — суммарное число скалярных фотонов в состоянии  $|m\rangle$ ). Полагая в (3.1.26)  $|a\rangle = |b\rangle$  и замечая, что  $\langle m | S | b \rangle^* = \langle b | S^+ | m \rangle$ , получаем

$$\sum_m |\langle m | S | a \rangle|^2 \langle m | m \rangle = 1 \quad (3.1.27)$$

(предполагается, что  $|a\rangle$  — физическое состояние, в котором не содержится скалярных и продольных фотонов).

Если бы все состояния  $|m\rangle$  были физическими, то имело бы место равенство  $\langle m | m \rangle = 1$  и последнее условие выражало бы тот факт, что вероятность перехода из состояния  $|a\rangle$  во все другие состояния  $|m\rangle$  равна единице. Именно такая интерпретация условия унитарности имеет место при использовании кулоновской калибровки, в которой отсутствуют духи, т. е. скалярные и продольные фотоны. Однако при использовании лоренцевой калибровки возникают духи и, кроме того, применяется индефинитная метрика, т. е.  $\langle m | m \rangle = \pm 1$ . Тем не менее именно благодаря индефинитности метрики в уравнении (3.1.27) происходит сокращение вкладов от продольных и скалярных фотонов, так что условие унитарности (3.1.27) по-прежнему можно интерпретировать как равенство единице суммы вероятностей переходов во все возможные физические состояния. Доказательства этого утверждения мы здесь приводить не будем (см. [4]), заметим лишь, что оно основывается на соотношении (3.1.9), выражающем калибровочную инвариантность  $S$ -матрицы (см. также п. 2.3.4).

**3.1.3. Свойства симметрии электромагнитного взаимодействия.** Электромагнитное взаимодействие обладает рядом свойств симметрии, проявляющихся в инвариантности уравнений квантовой электродинамики относительно соответствующих преобразований координат и операторов полей: эти уравнения инвариантны по отношению к непрерывным преобразованиям пространства—времени, преобразованиям отражения пространственных координат и обращения времени, преобразованию зарядового сопряжения и калибровочным преобразованиям.

Релятивистская инвариантность основных уравнений квантовой электродинамики приводит к тому, что  $S$ -матрица коммутирует с операторами 4-импульса  $P_\mu$  и 4-момента количества движения  $M_{\mu\nu}$  свободных полей:

$$[P_\mu, S] = [M_{\mu\nu}, S] = 0.$$

Коммутативность  $S$  и  $P_\mu$  обеспечивает выполнение закона сохранения 4-импульса в процессах столкновений, поэтому матричные элементы  $\langle f | S | i \rangle$  содержат  $\delta$ -функцию  $\delta(\sum p_i - \sum p_f)$ . Коммутативность  $S$  и  $M_{\mu\nu}$  обеспечивает релятивистскую инвариантность амплитуды  $A_{i \rightarrow f}$  (см. § 1.6).

Уравнения квантовой электродинамики в представлении взаимодействия инвариантны по отношению к одновременному преобразованию отражения пространства и обращения времени  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = -x^\mu$ . Если с этим преобразованием связать преобразования операторов полей

$$A_\mu(x) \rightarrow \underline{A}_\mu^R(x') = -\underline{A}_\mu^T(x),$$

$$\underline{\psi}(x) \rightarrow \underline{\psi}^R(x') = O \underline{\psi}^T(x), \quad \bar{\underline{\psi}}(x) \rightarrow \bar{\underline{\psi}}^R(x') = \bar{\underline{\psi}}^T(x) O, \quad (3.1.28)$$

где  $O = i\gamma^5$ , то, как легко проверить, операторы  $\underline{A}_\mu^R(x)$ ,  $\underline{\psi}^R(x)$ ,  $\bar{\underline{\psi}}^R(x)$  удовлетворяют таким же уравнениям движения (см. (3.1.16)) и таким же перестановочным соотношениям (см. (3.1.7)), что и операторы  $\underline{A}_\mu(x)$ ,  $\underline{\psi}(x)$ ,  $\bar{\underline{\psi}}(x)$  ( $T$  — оператор транспонирования в гильбертовом пространстве). Поэтому эти системы операторов связаны между собой некоторым унитарным преобразованием  $U_R$ , не зависящим от  $x$ :

$$\underline{A}_\mu^R(x) = U_R \underline{A}_\mu(x) U_R^\dagger, \quad (3.1.29)$$

$$\underline{\psi}^R(x) = U_R \underline{\psi}(x) U_R^\dagger, \quad \bar{\underline{\psi}}^R(x) = U_R \bar{\underline{\psi}}(x) U_R^\dagger.$$

Это преобразование носит название сильного отражения или  $R$ -преобразования.  $S$ -матрица удовлетворяет соотношению (см. [3])

$$U_R S U_R^\dagger = S^T. \quad (3.1.30)$$

Из формулы (3.1.30) вытекает общее соотношение

$$\langle p_f, e_f, \mu_f | S | p_i, e_i, \mu_i \rangle = (-1)^{N_i + N_f} \langle p_i, -e_i, -\mu_i | S | p_f, -e_f, -\mu_f \rangle, \quad (3.1.31)$$

где  $|p, e, \mu\rangle$  — вектор состояния частиц с импульсами  $p$ , зарядами  $e$  и спиральностями  $\mu$  (индексы  $i$  и  $f$  служат для

обозначения начального и конечного [состояния;  $N_i, N_f$  — суммарные числа фотонов в состояниях  $i$  и  $f$ ].

Уравнения квантовой электродинамики инвариантны по отношению к преобразованию зарядового сопряжения

$$\begin{aligned} \underline{A}_\mu(x) \rightarrow \underline{A}_\mu^c(x) &= -\underline{A}_\mu(x) = U_c \underline{A}_\mu(x) U_c^+, \quad \underline{\psi}(x) \rightarrow \underline{\psi}^c(x) = \\ &= \underline{c}\bar{\psi}(x) = U_c \underline{\psi}(x) U_c^+, \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^c(x) = C^{-1} \bar{\psi}(x) = U_c \bar{\psi}(x) U_c^+. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Матрица рассеяния  $S$  удовлетворяет соотношению

$$U_c S U_c^+ = S, \quad (3.1.33)$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} \langle p_f, e_f, \mu_f | S | p_i, e_i, \mu_i \rangle &= \\ &= (-1)^{N_i + N_f} \langle p_f, -e_f, \mu_f | S | p_i, -e_i, \mu_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Мы видим, что если в состояниях  $i$  и  $f$  нет электронов и позитронов и суммарное число фотонов в начальном и конечном состоянии  $N_i + N_f$  нечетно, то матричный элемент равен нулю (теорема Ферри).

Из формул (3.1.32) следует, что  $U_c^2 = 1$ . Поэтому собственные значения оператора  $U_c$  равны  $\Lambda_c = \pm 1$ . Так как, согласно (3.1.32),  $U_c Q U_c^+ = -Q$  ( $Q$  — оператор заряда системы), то система, обладающая ненулевым зарядом, не может находиться в состоянии, являющемся собственным состоянием оператора  $U_c$ . Напротив, зарядово нейтральная система может находиться в состоянии, являющемся собственным состоянием оператора  $U_c$ . В этом случае говорят, что система обладает определенной зарядовой четностью,  $\Lambda_c = \pm 1$ . Так как  $U_c C_{kl}^+ | 0 \rangle = -C_{kl}^+ | 0 \rangle$ , то зарядовая четность фотона равна  $-1$ . В частности, определенной зарядовой четностью обладает  $\rho$ -мезон ( $\Lambda_c = +1$ ), позитроний ( $\Lambda_c = (-1)^{l+s}$ ,  $l$  — орбитальный момент,  $s$  — спин позитрония) и т. д. Нейтрон, являясь нейтральной системой, не обладает определенной зарядовой четностью (антинейтрон не совпадает с нейтроном). Так как уравнения квантовой электродинамики инвариантны относительно преобразований сильного отражения и зарядового сопряжения, то они инвариантны также и относительно произведения  $R$ - и  $C$ -преобразований. Такое преобразование мы будем называть преобразованием слабого отражения и обозначать через  $R_W = CR$ .

Выделим из преобразования слабого отражения преобразование отражения пространственных координат ( $P$ -преобра-

зование):

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x) \rightarrow \underline{\psi}^p(x') &= i\gamma^0 \underline{\psi}(x) = U_p \underline{\psi}(x') U_p^+, \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^p(x') &= -i\bar{\psi}(x) \gamma^0 = U_p \bar{\psi}(x') U_p^+, \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

$$\underline{A}_\mu(x) \rightarrow \underline{A}_\mu^p(x') = \begin{cases} -\underline{A}_i(x), & \mu = i \\ \underline{A}_0(x), & \mu = 0 \end{cases} = U_p \underline{A}_\mu(x') U_p^+$$

( $x \equiv (x, t)$ ,  $x' \equiv (-x, t)$ ). Здесь  $U_p$  — унитарный оператор, соответствующий пространственной инверсии. Представив преобразование слабого отражения в виде  $R_W = PT$ , мы тем самым определим преобразование обращения времени  $T$ ; которое называется преобразованием слабого обращения времени. Унитарный оператор  $U_T$ , соответствующий этому преобразованию, определяется формулой

$$U_p U_T = U_w. \quad (3.1.36)$$

Таким образом, сильное отражение пространства — времени представляет собой произведения  $C$ -,  $P$ - и  $T$ -преобразований

$$R = CPT. \quad (3.1.37)$$

Уравнения квантовой электродинамики инвариантны относительно каждого из преобразований  $R$ ,  $C$ ,  $P$  и  $T$ . Эта инвариантность является, как мы уже говорили, математическим выражением симметрии электромагнитного взаимодействия электронов и фотонов относительно отражений пространства и времени и замены электрона позитроном.

Другие взаимодействия, в принципе, могут не обладать всеми свойствами симметрии, присущими электромагнитному взаимодействию. Поэтому от уравнений, описывающих эти взаимодействия, нельзя требовать, чтобы они были инвариантными относительно тех же преобразований, которые оставляют инвариантными уравнения квантовой электродинамики. Исключение представляют непрерывные преобразования Лоренца — Пуанкаре, по отношению к которым должны быть инвариантны уравнения любой физической теории.

Укажем в качестве примера на слабое взаимодействие, в котором нарушается порознь  $C$ ,  $P$ ,  $T$  инвариантность (см. ниже).

Несмотря, однако, на возможные нарушения инвариантности уравнений, описывающих те или иные волновые поля, относительно одного из преобразований  $C$ ,  $P$  или  $T$ , любая релятивистски-инвариантная теория с локальным взаимодействием должна быть инвариантной относительно  $R$ -преобразования, представляющего собой произведение  $C$ -,  $P$ - и  $T$ -преобразований. Эта инвариантность является следствием только теоремы Паули о связи спина со статистикой и составляет

содержание так называемой СРТ-теоремы [7], [8]. В этой связи напомним, что в разделе 1.5.4 было доказано следующее утверждение: если локальная теория релятивистски инвариантна, а также инвариантна по отношению к  $R$ -преобразованию, то поля с целым спином должны подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна, а поля с полуцелым спином — статистике Ферми — Дирака. СРТ теорема представляет собой обратное утверждение: в релятивистской локальной теории с правильной связью между спином и статистикой всегда имеет место инвариантность по отношению к сильному отражению.

Вернемся к  $P$ -преобразованию. Ясно, что двойное его применение эквивалентно тождественному преобразованию, т. е.  $U_p^2 = 1$ . Поэтому оператор  $U_p$  является эрмитовым с собственными значениями  $\pm 1$ . Состояния, относящиеся к собственному значению  $+1$ , называются  $p$ -четными, а состояния, относящиеся к собственному значению  $-1$ , называются  $p$ -нечетными.

Матрица рассеяния  $S$  удовлетворяет соотношению

$$U_p S U_p^+ = S, \quad (3.1.38)$$

из которого следует, что

$$\langle p_f, e_f, \mu_f | S | p_i, e_i, \mu_i \rangle = \langle -p_f, e_f, -\mu_f | S | -p_i, e_i, -\mu_i \rangle. \quad (3.1.39)$$

### § 3.2. Диаграммное представление матрицы рассеяния и электродинамические функции Грина

**3.2.1. Диаграммное представление матрицы рассеяния.** В § 1.6 было показано, что матрицу рассеяния можно представить в виде суммы нормальных произведений операторов полей, соответствующих различным процессам рассеяния частиц. Каждое такое нормальное произведение, а следовательно, и любой процесс рассеяния, можно изображать графически [9], если условиться сопоставлять 4-векторам,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , по которым производится интегрирование в матрице  $S_n$ , точки диаграммы (они называются вершинами диаграммы), а операторам полей, входящим под знак нормального произведения — линии, проходящие через эти вершины. В случае квантовой электродинамики матрица рассеяния  $S$  определяется формулой

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n, \quad S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T \{ \omega_{\text{int}}(x_1) \dots \dots \omega_{\text{int}}(x_n) \}, \quad (3.2.1)$$

$$\omega_{\text{int}}(x) = -e : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : \quad (3.2.1')$$

и  $\hat{A}(x) = \gamma^\mu A_\mu(x)$ . При графическом представлении этой матрицы рассеяния оператор  $A_\mu(x)$  будем изображать пунктирной линией (без определенного направления) с началом в вершине  $x$ ; оператор  $\psi(x)$  — направленным сплошным лучом, идущим к вершине  $x$ ; оператор  $\bar{\psi}(x)$  — направленным сплошным лучом, идущим из вершины  $x$ . Все эти линии, называемые внешними линиями, предполагаются уходящими за пределы диаграммы.

Так как  $A_\mu(x)$  представляет собой сумму операторов уничтожения и рождения фотонов, то пунктирной внешней линией будет изображаться фотон испущенный или поглощенный в результате процесса рассеяния.

Аналогичным образом, поскольку  $\psi(x)$  представляет собой сумму операторов уничтожения электронов и рождения позитронов, сплошная внешняя линия, направленная к вершине, будет служить для изображения электрона, существовавшего до процесса рассеяния, или позитрона, образовавшегося в результате процесса рассеяния. Наконец, так как  $\bar{\psi}(x)$  представляет собой сумму операторов рождения электронов и уничтожения позитронов, то сплошная внешняя линия, направленная от вершины, будет служить для изображения позитрона, существовавшего до процесса рассеяния, или электрона, образовавшегося в результате процесса рассеяния.

Кроме операторов полей, мы должны графически изображать также связи между операторами. Условимся сопоставлять связям между операторами внутренние линии диаграммы, соединяющие её вершины: будем изображать связь между фотонными операторами  $A_\mu(x_i)$  и  $A_\nu(x_j)$  пунктирной линией (не имеющей определенного направления), соединяющей вершины  $x_i$  и  $x_j$ , и связь между электронными операторами  $\psi(x_i)$  и  $\bar{\psi}(x_j)$  — сплошной линией, соединяющей вершины  $x_i$  и  $x_j$  и имеющей направление от вершины  $x_j$  к вершине  $x_i$ .

В выражении для  $S_n$  каждая точка  $x$  является аргументом трех операторов: одного фотонного  $A_\mu(x)$  и двух электронных  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ . Оператору  $:\bar{\psi}\hat{A}\psi:$  соответствует трехлучевая вершина, через которую проходит одна фотонная и две электронные линии, причем одна электронная линия входит в вершину, а другая выходит из неё.

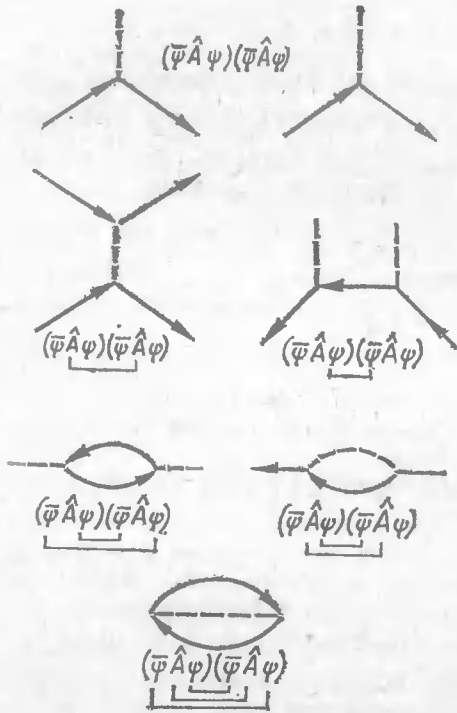


Рис. 2.

ряд процессов. Эти операторы представляют собой суммы операторов испускания и поглощения частиц в различных состояниях, поэтому нормальное произведение, отвечающее какому-либо конкретному физическому процессу, может быть представлено в виде суммы нескольких слагаемых, которые содержат произведения операторов испускания и поглощения частиц, участвующих в рассматриваемом процессе, и отличаются друг от друга только порядком расположения операторов. Эти слагаемые можно изображать диаграммами, которые топологически эквивалентны и отличаются друг от друга только порядком расположения электронных и фотонных линий.

Таким образом, матричный элемент, соответствующий какому-либо физическому процессу, всегда можно представить в виде

$$\langle f | S_n | i \rangle \equiv (S_n)_{i \rightarrow f} = \Sigma \mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}, \quad (3.2.2)$$

где отдельные слагаемые  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$  соответствуют конкретным диаграммам  $n$ -го порядка для рассматриваемого процесса и

Диаграммы, изображающие отдельные нормальные произведения, входящие в матрицу  $S_n$  и содержащие  $n$  трехлучевых вершин, будем называть диаграммами  $n$ -го порядка. Они могут служить для изображения эффектов  $n$ -го приближения теории возмущений.

В  $S$ -матрице могут встречаться несколько нормальных произведений, отличающихся только местами наложения связей между операторами полей и вносящих поэтому одинаковый вклад в элемент матрицы рассеяния. Такие нормальные произведения называются эквивалентными.

Приведенные на рис. 2 диаграммы изображают нормальные произведения операторов полей и описывают одновременно

конкретному расположению внешних линий (суммирование распространяется по всем диаграммам  $n$ -го порядка для изучаемого процесса и по всем перестановкам внешних линий). Диаграммы, служащие для изображения различных процессов рассеяния, называются диаграммами Фейнмана.

**3.2.2. Импульсное представление.** Чтобы найти величины  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$ , удобно перейти к импульсному пространству. Представим для этого связи между операторами полей  $i\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi)$ ,  $-iS_{\alpha\beta}^c(x)$  в виде интегралов Фурье (см. (2.3.53), (2.4.70)) и подставим эти интегралы вместе с выражениями для матричных элементов операторов полей

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu(x) | 1_{k\lambda} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx}, & \langle 1_{k\lambda} | A_\mu(x) | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_{k\mu}^{(\lambda)*} e^{ikx}, \\ \langle 0 | \psi(x) | 1_{p\mu} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} u^\mu(\vec{p}) e^{-ipx}, & \langle 1_{p\mu}^+ | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} u^\mu(p)^c e^{ipx}, & (3.2.3) \\ \langle 1_{p\mu}^- | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} \bar{u}^\mu(p) e^{ipx}, & \langle 0 | \bar{\psi}(x) | 1_{p\mu}^+ \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} \bar{u}^\mu(p)^c e^{-ipx} \end{aligned}$$

в то из нормальных произведений под знаком интеграла для  $S_n$ , которое соответствует  $\mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$  (здесь  $u^\mu(p) = u^{1\mu}(p)$ ,  $u^\mu(p)^c \equiv cu^\mu(p)$ ). В результате получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{i \rightarrow f}^{(n)} &= \delta_{\mathcal{D}}(-1)^l (ie)^n \xi^{(2\pi)^{4(n-F)}} \int d^4 p_1 \dots d^4 p_F \times \\ &\times \int d^4 k_1 \dots d^4 k_{F_\gamma} \times \\ &\times \prod_1^n \delta(\Sigma p) 0 \left( \prod_i \left( \frac{u^\mu(p)}{\sqrt{2p_0 V}} \cdot \frac{\bar{u}^\mu(p)^c}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{\hat{e}_k^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega V}} \right) \times \right. \\ &\times \left. \prod_f \left( \frac{\bar{u}^\mu(p)}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{u^\mu(p)^c}{\sqrt{2p_0 V}} \frac{\hat{e}_k^{(\lambda)*}}{\sqrt{2\omega V}} \right) \times \right. \\ &\times \prod_1^{F_e} (-iS^c(p)) \prod_1^{F_\gamma} (\gamma^\nu i\mathcal{D}_{\nu\lambda}^c(ki\xi) \gamma^\lambda), & \hat{e}_k^{(\lambda)} &= e_{k\mu}^{(\lambda)} \gamma^\mu. \quad (3.2.4) \end{aligned}$$

Здесь интегрирование производится по четырехмерным импульсам виртуальных частиц, т. е. по  $4F_e$  переменным  $p_1, \dots$

...,  $pF_e$ , происходящим от множителей типа  $-iS^c(p)$  и  $4F_\gamma$  переменным  $k_1, \dots, k_{F_\gamma}$ , происходящим от множителей типа  $i\mathcal{D}^c(k; \xi)$  ( $F_e$  и  $F_\gamma$  — числа внутренних электронных и фотонных линий, т. е. числа виртуальных электронов и фотонов,  $F = F_e + F_\gamma$ ;  $l$  — число замкнутых электронных петель с четным числом электронных линий;  $\delta_{\mathcal{D}}$  — четность перестановки электронных операторов (см. ниже),  $\xi = r/n!$  ( $r$  — число эквивалентных диаграмм)).

Кроме интегрирования, в этой формуле производится суммирование по четырем значениям индексов  $\nu, \lambda$ , обозначающим различные поляризации виртуальных фотонов, причем каждому виртуальному фотону соответствует свой индекс  $\nu$ , принимающий значения  $\nu = 1, 2, 3, 4$ .

Отдельные множители в формуле имеют следующее значение.

Произведение  $\prod_i \left( \frac{u^\mu(p)}{\sqrt{2p_0V}} \frac{\bar{u}^\mu(p)^c}{\sqrt{2p_0V}} \frac{\hat{e}_k^{(\lambda)}}{\sqrt{2\omega V}} \right)$  представляет собой произведение биспиноров  $u^\mu(p)/\sqrt{2p_0V}$ ,  $\bar{u}^\mu(p)^c/\sqrt{2p_0V}$  и величин  $\hat{e}_k^{(\lambda)}/\sqrt{2\omega V}$ , описывающих электроны, позитроны и фотоны

в начальном состоянии  $i$ ; произведение  $\prod_f \left( \frac{\bar{u}^\mu(p)}{\sqrt{2p_0V}} \frac{u^\mu(p)^c}{\sqrt{2p_0V}} \times \frac{\hat{e}_k^{(\lambda)*}}{\sqrt{2\omega V}} \right)$  обозначает аналогичное произведение для конечного

состояния  $f$ . Множители  $-iS^c(p)$  и  $i\mathcal{D}^c(k; \xi)$  происходят от связей электронных и фотонных операторов, причем число первых равно  $F_e$ , а вторых —  $F_\gamma$ . Наконец, символ 0 служит для обозначения определенного порядка в расположении спиновых матриц: матрицы  $\gamma^\mu$  и  $S^c$ , действующие на спинорные индексы, должны быть расположены, считая справа налево, в такой последовательности, в какой они встречаются, если двигаться по направлению электронной линии диаграммы.

Специфическая особенность возникает в том случае, если диаграмма содержит замкнутые электронные петли с четным числом электронных линий (при нечетном числе электронных линий матричный элемент равен нулю). В этом случае каждой электронной петле соответствует в выражении  $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$  взятый со знаком минус шпур произведения матриц  $\gamma^\mu$  и  $-iS^c$ , относящихся к петле. Наличие знака минус связано с тем, что при расстановке связей, соответствующих петле, возникает последняя связь типа  $\bar{\psi}\psi = -\psi\bar{\psi}$ , которой не было в диаграммах без петель.

Если диаграмма содержит  $l$  замкнутых электронных петель с четным числом линий, то  $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$  приобретает множитель  $(-1)^l$ , который входит в (3.2.4) наряду с множителем  $\delta_{\mathcal{D}}$ , где  $\delta_{\mathcal{D}}$  определяет относительный знак  $\mathcal{M}_{i \rightarrow f}^{(n)}$  в том случае, если в процессе участвует несколько электронов. Величина  $\delta_{\mathcal{D}}$  представляет собой четность перестановки индексов начальных и конечных электронов (или позитронов) по отношению к некоторому фиксированному расположению индексов начальных и конечных электронов (позитронов).

Диаграммам, содержащим замкнутые внутренние электронные петли, состоящие из нечетного числа электронных линий, соответствует суммарный матричный элемент, равный нулю (теорема Фарри). Эта теорема непосредственно следует из закона сохранения зарядовой четности, если учесть, что зарядовая четность фотона равна  $-1$ .

В заключение этого пункта покажем, как следует производить суммирование по конечным и усреднение по начальным поляризационным состояниям квадрата модуля амплитуды  $M_{i \rightarrow f}$ . Заметим, что амплитуда  $M_{i \rightarrow f}$  процесса, в котором участвуют электроны и позитроны, может быть представлена в виде

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{u}^{q\mu}(p) Q, \quad (3.2.5)$$

где  $Q$  — некоторый биспинор (включающий в себя биспиноры других частиц). Замечая, что

$$M_{i \rightarrow f}^* = \bar{Q} u^{q\mu}(p)$$

и используя формулу (см. (2.4.54))

$$u_{\alpha}^{q\mu}(p) \bar{u}_{\beta}^{q\mu}(p) = 2mq \Lambda_{\alpha\beta}^{q\mu}(p),$$

получаем

$$|M_{i \rightarrow f}|^2 = 2mq \bar{Q} \Lambda^{q\mu}(p) Q, \quad (3.2.6)$$

где (см. (2.4.53))

$$\Lambda^{q\mu}(p) = \frac{(q\hat{p} + m)(\Sigma n + \mu)}{4m\mu} \quad (3.2.7)$$

оператор проектирования. Если  $Q = A u^{q'\mu'}(p')$ , где  $A$  — некоторая матрица (возможно зависящая от биспиноров других частиц), то, используя (2.4.54), можно свести вычисление  $|M_{i \rightarrow f}|^2$  к вычислению шпуров от произведений матриц  $\gamma^\mu$  (см. раздел 2.4.1). С помощью (3.2.6) легко производить суммирование по поляризациям конечных состояний и усреднение по поляризациям начальных состояний фермионов, так как

$$\sum_{\mu} \Lambda^{q\mu}(p) = \frac{1}{2m} (q\hat{p} + m). \quad (3.2.8)$$

Покажем теперь как производить суммирование и усреднение по поляризациям фотонов. Пусть, например, в конечном состоянии имеется фотон с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ). Элемент матрицы рассеяния, соответствующий переходу  $i \rightarrow f$ , можно в этом случае записать в виде

$$(\Phi_f, S\Phi_i) = (C_{k\lambda}^+ \Phi_f', S\Phi_i), \quad (3.2.9)$$

где  $\Phi_i, \Phi_f$  — векторы начального и конечного состояний и  $\Phi_f'$  — вектор состояния, не содержащий фотон с импульсом  $k$  и поляризацией  $\lambda$ . Состояния  $\Phi_i, \Phi_f$  мы будем считать физическими, поэтому

$$(C_{k3} - C_{k0}) \Phi_{i,f} = 0.$$

Поскольку (см. (3.1.19))

$$(C_{k3} - C_{k0}) S = S (C_{k3} - C_{k0}^*),$$

легко заключить, что

$$(C_{k3}^+ \Phi_f', S\Phi_i) = (C_{k0}^+ \Phi_f', S\Phi_i).$$

Поэтому интересующая нас величина

$$\sum_{\lambda=1}^2 |(\Phi_f, S\Phi_i)|^2 = \sum_{\lambda=1}^2 |(C_{k\lambda}^+ \Phi_f', S\Phi_i)|^2$$

может быть представлена в виде

$$\sum_{\lambda=1}^2 |(\Phi_f, S\Phi_i)|^2 = \sum_{\lambda=1}^3 |(C_{k\lambda}^+ \Phi_f', S\Phi_i)|^2 - |(C_{k0}^+ \Phi_f', S\Phi_i)|^2. \quad (3.2.10)$$

Если в состояниях  $i$  и  $f$  имеется электрон, то величину  $M_{i \rightarrow f}$ , соответствующую элементу матрицы рассеяния  $(\Phi_f, S\Phi_i)$ , можно представить в виде

$$M_{i \rightarrow f} = \bar{u}_f \hat{Q} \hat{e}_k^{(\lambda)*} Q' u_i,$$

где  $u_i, u_f$  — спинорные амплитуды электрона в начальном и конечном состояниях;  $Q$  и  $Q'$  — некоторые матрицы и  $\hat{e}_k^{(\lambda)*} = e_{k\mu}^{(\lambda)*} \gamma^\mu$  ( $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  — единичный вектор поляризации фотона).

Так как

$$M_{i \rightarrow f}^* = \bar{u}_i \bar{Q}' \hat{e}_k^{(\lambda)} Q u_f,$$

где  $\bar{Q} = \gamma^0 Q^\dagger \gamma^0$ , то согласно (3.4.18),

$$\sum_{\lambda=1}^2 |M_{i \rightarrow f}|^2 = - \sum_{\lambda=0}^3 (\bar{u}_i \hat{Q} \hat{e}_k^{(\lambda)*} Q' u_i) (\bar{u}_i \bar{Q}' \hat{e}_k^{(\lambda)} Q u_f) \zeta_\lambda.$$

При этом мы учли, что

$$\widehat{e}_k^{(\lambda)*} = \hat{e}_k^{(\lambda)}, \quad \zeta_\lambda = -1, \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad \zeta_0 = 1.$$

Замечая далее, что  $\sum_{\lambda=0}^3 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_{k\nu}^{(\lambda)*} \zeta_\lambda = g_{\mu\nu}$ , получаем окончательно

$$\sum_{\lambda=1}^2 |M_{i \rightarrow f}|^2 = - (\bar{u}_i \hat{Q} \gamma^\mu Q' u_i) (\bar{u}_i \bar{Q}' \gamma_\mu Q u_f). \quad (3.2.11)$$

**3.2.3. Структура диаграмм матрицы рассеяния.** Диаграммы матрицы рассеяния в высших приближениях имеют сложную структуру. Изучение их облегчается благодаря тому, что диаграммы, соответствующие самым различным процессам, содержат общие структурные блоки, которые могут быть предельно выделены и исследованы [3].

Наибольшее значение имеют три типа структурных блоков: электронные — собственно энергетические диаграммы (ЭСЭД), фотонные — собственно энергетические диаграммы (ФСЭД) и

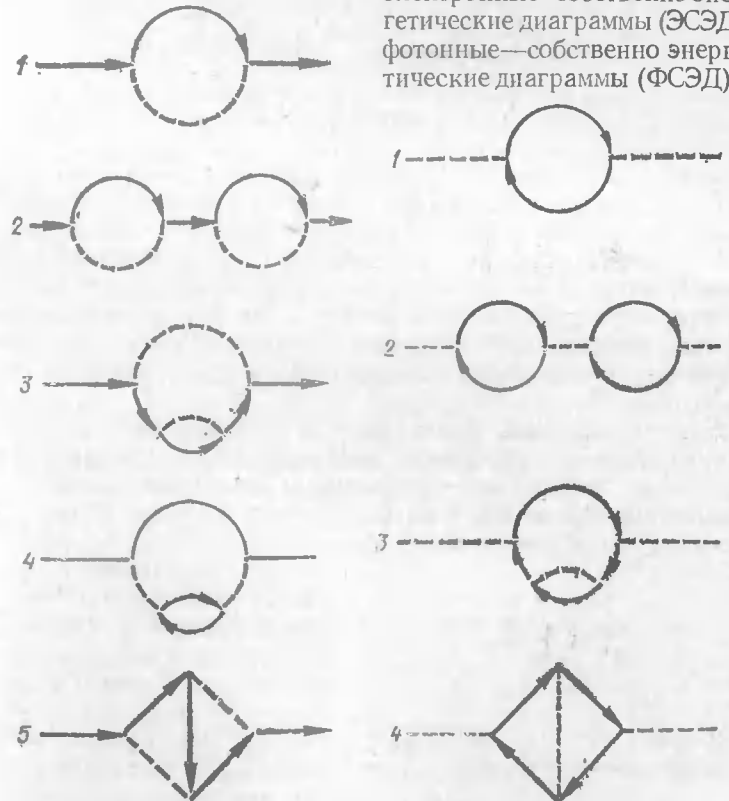


Рис. 3.

Рис. 4.

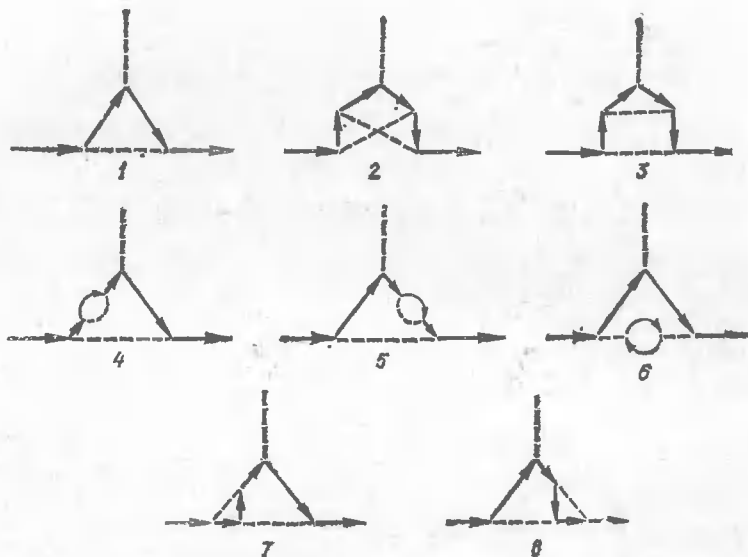


Рис. 5.

вершинные диаграммы (ВД). ЭСЭД называется такая часть произвольной диаграммы, которая связана с другими её частями только двумя электронными линиями (рис. 3). Аналогично ФСЭД называется такая часть некоторой произвольной диаграммы, которая связана с её остальными частями только двумя фотонными линиями (рис. 4). Наконец, ВД называется такая часть произвольной диаграммы, которая связана с другими её частями только двумя электронными и одной фотонной линиями (рис. 5).

Следует различать компактные и некомпактные, а также неприводимые и приводимые диаграммы. Под компактными или сильно связанными диаграммами понимают такие диаграммы, которые не могут быть разделены на части путем пересечения одной электронной или фотонной линии. В противном случае диаграмма называется некомпактной или слабо связанной (рис. 6).

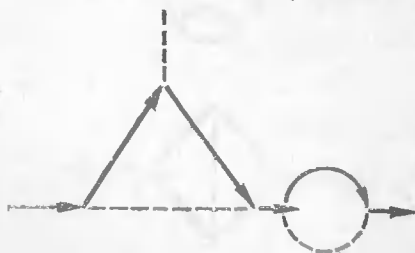


Рис. 6.

Диаграмма называется неприводимой (скелетной), если она не содержит ЭСЭД, ФСЭД, ВД внутри себя (рис. 7). В противном случае диаграмма называется приводимой (рис. 8).

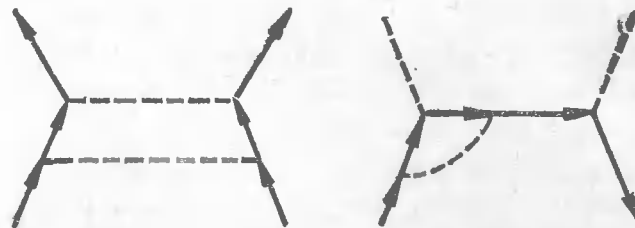


Рис. 7.

Рис. 8.

Существует, очевидно, только две неприводимых ЭСЭД — ЭСЭД второго порядка (см. рис. 3). Аналогично существует только одна неприводимая ФСЭД — ФСЭД второго порядка (см. рис. 4). Неприводимых ВД существует бесконечное множество. Из диаграмм, приведенных на рис. 5, неприводимыми являются диаграммы 1 и 2. Рассмотрим какую-либо диаграмму, содержащую внутреннюю электронную линию. В высших приближениях появятся, очевидно, диаграммы со всевозможными ЭСЭД, включенными в эту линию. Всю совокупность таких диаграмм (вместе с исходной электронной линией) мы будем графически изображать в виде сплошной жирной линии и называть её эффективной электронной линией. Величина, соответствующая этой линии, называется электронной функцией Грина и обозначается через  $-iG_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$ , где  $p$  — 4-импульс электронной линии (величина  $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$  содержит, так же как и  $S_{\alpha\beta}^c(p)$ , два спинорных индекса —  $\alpha, \beta$ , которые мы обычно будем опускать). Функцию Грина  $G^{(e)}(p)$ , как легко видеть, можно выразить через сумму величин, соответствующих всем компактным ЭСЭД с данным импульсом  $p$  (без внешних линий). Эту сумму мы будем называть массовым оператором и обозначать через  $i\Sigma_{\alpha\beta}(p)$ . Графически связь между  $G_{\alpha\beta}^{(e)}(p)$  и  $\Sigma_{\alpha\beta}(p)$  изображена на рис. 9 (прямоугольник служит для обозначения массового оператора). Мы видим, что

$$\frac{1}{i} G^{(e)} = \frac{1}{i} S^c + \frac{1}{i} S^c i \Sigma \frac{1}{i} S^c + \frac{1}{i} S^c i \Sigma \frac{1}{i} S^c i \Sigma \times \frac{1}{i} S^c + \dots$$

Суммируя этот бесконечный ряд, мы, очевидно, получим

$$G^{(e)}(p) = S^c(p) + S^c(p) \Sigma(p) G^{(e)}(p). \quad (3.2.12)$$



Рис. 9.





Рис. 10.

Это уравнение, связывающее электронную функцию Грина с массовым оператором, называется уравнением Дайсона для электронной функции Грина [10]. Из этой формулы следует, что

$$G^{(e)}(p)^{-1} = S^c(p)^{-1} - \Sigma(p) = m - \hat{p} - \Sigma(p). \quad (3.2.13)$$

Аналогично можно определить эффективную фотонную линию со всевозможными включенными в неё ФСЭД. Мы будем графически изображать её в виде жирной пунктирной линии. Соответствующая этой линии величина называется фотонной функцией Грина и обозначается через  $iG_{\mu\nu}^{(v)}(k)$ , где  $k$  — 4-импульс фотонной линии (величина  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k) \equiv \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi)$ , также как и  $G_{\mu\nu}^{(v)}(k)$ , содержит два тензорных индекса  $\mu, \nu$ , которые мы будем часто опускать).

Функцию Грина  $G_{\mu\nu}^{(v)}(k)$ , как легко видеть, можно выразить через сумму величин, соответствующих всем компактным ФСЭД с данным импульсом  $k$  без внешних линий. Эту сумму мы будем называть поляризационным оператором и обозначать через  $\frac{1}{i} \Pi_{\mu\nu}(k)$ . Графически связь между  $G^{(v)}(k)$  и  $\Pi(k)$  изображена на рис. 10, из которого следует, что

$$iG^{(v)} = i\mathcal{D}^c + i\mathcal{D}^c \frac{1}{i} \Pi i\mathcal{D}^c + i\mathcal{D}^c \frac{1}{i} \Pi i\mathcal{D}^c \frac{1}{i} \Pi i\mathcal{D}^c + \dots$$

Суммируя этот бесконечный ряд, получаем

$$G^{(v)}(k) = \mathcal{D}^c(k) + \mathcal{D}^c(k) \Pi(k) G^{(v)}(k). \quad (3.2.14)$$

Это уравнение, называемое уравнением Дайсона для фотонной функции Грина, связывает фотонную функцию Грина с поляризационным оператором так же, как уравнение (3.2.12) связывает электронную функцию Грина с массовым оператором.

Введение эффективных электронных и фотонных линий позволяет, очевидно, не рассматривать некомпактные вершинные диаграммы. Действительно, некомпактные вершинные диаграммы представляют собой совокупности компактных вершинных диаграмм и эффективных электронных и фотонных линий. Поэтому в дальнейшем под вершинными диаграммами всегда будут подразумеваться компактные вершинные диаграммы (без внешних линий).

Если образовать сумму величин, соответствующих всем возможным компактным вершинным диаграммам с заданными



Рис. 11.

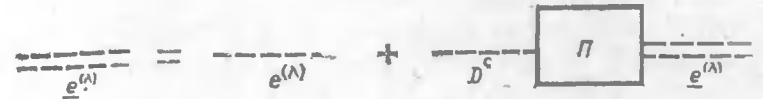


Рис. 12.

импульсами  $p_1, p_2$  и  $k$  электронных и фотонных линий, то мы получим вершинную функцию, которую будем обозначать через  $\Gamma_{\mu, \alpha\beta}(p_1, p_2)$ , где  $\mu$  — векторный и  $\alpha, \beta$  — спинорные индексы. На диаграммах вершинная функция изображается в виде жирной точки, называемой эффективной вершиной. Поскольку в силу законов сохранения 4-импульса  $k = p_1 - p_2$ , то в числе аргументов мы не выписываем импульс  $k$ , будем обычно также опускать спинорные индексы  $\alpha, \beta$ .

Наряду с эффективными внутренними электронными и фотонными линиями мы должны ввести в рассмотрение также эффективные внешние электронные и фотонные линии, представляющие собой внешние электронные и фотонные линии со включенными в них всеми возможными собственно энергетическими диаграммами.

Величину, соответствующую внешней эффективной электронной линии с импульсом  $p$ , будем обозначать через  $\underline{u}_\alpha(p)$ . Эта величина, так же как и  $u_\alpha(p)$ , является биспинором и может быть, согласно рис. 11, представлена в виде

$$\underline{u}(p) = u(p) + S^c(p) \Sigma(p) \underline{u}(p) \quad (3.2.15)$$

(спинорные индексы опущены).

Аналогичное равенство может быть написано (рис. 12) для величины  $\underline{e}^{(\lambda)}(k)$ , соответствующей эффективной внешней фотонной линии с импульсом  $k$

$$\underline{e}^{(\lambda)}(k) = e_k^{(\lambda)} + \mathcal{D}^c(k) \Pi(k) \underline{e}^{(\lambda)}(k). \quad (3.2.16)$$

Внешние линии служат, как мы знаем, для изображения свободных частиц. Так как величины  $\underline{u}(p)$  и  $\underline{e}(k)$  должны быть определены на массовой оболочке частиц ( $p^2 - m^2 = 0, k^2 = 0$ ), то из релятивистской инвариантности следует, что

$$\underline{u}(p) = \sqrt{Z_2} u(p), \quad \underline{\bar{u}}(p) = \sqrt{Z_2} \bar{u}(p), \quad \underline{e}_\mu(k) = \sqrt{Z_3} e_{k\mu}, \quad (3.2.17)$$

где  $Z_2$  и  $Z_3$  — некоторые универсальные множители, называемые перенормировочными константами.

Эти важные соотношения, к которым мы еще вернёмся в п. 3.2.5, показывают, что вместо эффективных внешних линий достаточно рассматривать обычные внешние линии (без собственно энергетических вставок), вводя при этом в элемент матрицы рассеяния на каждую внешнюю электронную линию множитель  $\sqrt{Z_2}$  и на каждую внешнюю фотонную линию — множитель  $\sqrt{Z_3}$ .

Используя понятия эффективных линий и эффективных вершин, можно заменить сложные диаграммы, встречающиеся при рассмотрении высших приближений, эффективными — скелетными диаграммами, которые представляют собой неприводимые диаграммы с эффективными линиями и эффективными вершинами вместо обычных линий и обычных вершин.

**3.2.4. Электродинамические функции Грина и тождества Уорда.** Функции Грина  $G^{(n)}(k)$ ,  $G^{(e)}(p)$ , определенные в предыдущем пункте с помощью диаграмм, можно, очевидно, представить в виде

$$G_{\mu\nu}^{(n)}(x_1 - x_2) = -\frac{i}{S_0} (\Phi_0, T \{ \bar{A}_\mu(x_1) \bar{A}_\nu(x_2) S \} \Phi_0),$$

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x_1 - x_2) = \frac{i}{S_0} (\Phi_0, T \{ \bar{\psi}_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) S \} \Phi_0),$$
(3.2.18)

где  $S_0 = (\Phi_0, S\Phi_0)$  и  $\Phi_0$  — вектор состояния вакуума свободных полей. Это следует из того, что применение правил Вика для вычисления среднего по вакууму свободных полей в правой части (3.2.18) приводит к диаграммному определению функций Грина. Согласно § 1.6, эти функции можно представить в виде средних по вакуумному состоянию  $\Psi_0$  взаимодействующих полей от  $T$ -произведения операторов поля в гейзенберговском представлении:

$$G_{\mu\nu}^{(n)}(x_1 - x_2) = -i (\Psi_0, T \{ A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \} \Psi_0),$$

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x_1 - x_2) = i (\Psi_0, T \{ \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) \} \Psi_0).$$
(3.2.19)

Аналогично можно дать определение вершинной функции. Введем для этого функцию Грина

$$G_{\alpha\beta,\mu}^{(e,\nu)}(x_1 - x, x_2 - x) = (\Psi_0, T \{ \psi_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) A_\mu(x) \} \Psi_0).$$
(3.2.20)

Очевидно, функция  $G^{(e,\nu)}$  зависит только от разностей аргументов,  $x_1 - x$ ,  $x_2 - x$ . Используя общее выражение (1.6.52) для функций Грина, связывающее их с операторами полей в представлении взаимодействия и замечая, что вершинная функ-

ция  $\Gamma_\mu$  представляет собой сумму всех возможных компактных вершинных диаграмм без внешних линий, имеем

$$G_\mu^{(e,\nu)}(x_1 - x, x_2 - x) = e \int d^4x'_1 d^4x'_2 d^4x'_3 G^{(e)}(x_1 - x'_1) \times$$

$$\times \Gamma^\nu(x'_1 - x'_3, x'_2 - x'_3) G^{(e)}(x'_2 - x_2) G_{\nu\mu}^{(\nu)}(x'_3 - x).$$
(3.2.21)

В этой формуле мы выделили множитель  $e$ , поскольку по определению вершинная диаграмма  $n$ -го порядка пропорциональна  $e^{n-1}$ . Переходя в этой формуле к импульсному представлению, получаем

$$G_\mu^{(e,\nu)}(p, p') = e G^{(e)}(p) \Gamma^\nu(p, p') G^{(e)}(p') G_{\nu\mu}^{(\nu)}(p - p'),$$
(3.2.22)

где фурье-компоненты соответствуют разностям  $x_1 - x$ ,  $x_2 - x$  и  $x'_1 - x'_3$ ,  $x'_2 - x'_3$ .

Можно показать, что взаимодействие между полями не оказывает влияния на продольную часть фотонной функции Грина (3.2.19), т. е. имеет место соотношение (см. [4])

$$\partial^\mu G_{\mu\nu}^{(\nu)}(x - x') = \xi \partial_\nu \mathcal{D}(x - x').$$
(3.2.23)

В импульсном представлении соотношение (3.2.23) имеет вид

$$k^\mu G_{\mu\nu}^{(\nu)}(k) = \xi k_\nu \mathcal{D}(k).$$
(3.2.24)

Отсюда вытекает свойство поперечности поляризованного оператора

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0,$$
(3.2.25)

означающее в свою очередь, что  $\Pi_{\mu\nu}(k)$  имеет вид

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$
(3.2.26)

где  $\Pi(k)$  — некоторая скалярная функция от  $k^2$ .

Так как продольная часть фотонной функции Грина не затрагивается взаимодействием между полями, то ее можно не рассматривать, а ограничиться рассмотрением только поперечной части фотонной функции Грина. Эта часть, которую будем обозначать через  $G_{\mu\nu}^{(\nu)'}(k)$ , удовлетворяет условию  $k^\mu G_{\mu\nu}^{(\nu)'}(k) = 0$  и имеет, очевидно, вид

$$G_{\mu\nu}^{(\nu)'}(k) = G^{(\nu)}(k) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$
(3.2.27)

где  $G^{(\nu)}(k)$  — некоторая скалярная функция  $k^2$ , связанная с поляризованным оператором  $\Pi(k)$  соотношением

$$G^{(\nu)}(k) = -(k^2 + \Pi(k))^{-1}.$$
(3.2.28)

Справедливо также соотношение (см. [12, 13])

$$\partial^\mu G_\mu^{(e,\gamma)}(x_1 - x, x_2 - x) = ie\xi(\mathcal{D}^c(x - x_2) - \mathcal{D}^c(x - x_1)) G^{(e)}(x_1 - x_2). \quad (3.2.29)$$

Из этого соотношения и формулы (3.2.22) следует, что

$$G^{(e)}(p') - G^{(e)}(p) = -(p - p')^\mu G^{(e)}(p) \Gamma_\mu(p, p') G^{(e)}(p') \quad (3.2.30)$$

или

$$G^{(e)}(p)^{-1} - G^{(e)}(p')^{-1} = -(p - p')^\mu \Gamma_\mu(p, p').$$

Из этой формулы вытекает, в частности, соотношение Уорда [11]

$$\Gamma_\mu(p, p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} G^{(e)}(p)^{-1}. \quad (3.2.31)$$

Вводя функцию  $\Lambda_\mu$

$$\Gamma_\mu(p, p') = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, p')$$

и используя уравнение (3.2.13), получаем

$$\Lambda_\mu(p, p) = \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}. \quad (3.2.32)$$

**3.2.5. Спектральное представление функций Грина.** Функции Грина взаимодействующих полей можно представить в виде суперпозиции функций Грина свободных полей с различными массами частиц.

Рассмотрим вначале электронную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x - x') = i \langle 0 | T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') \} | 0 \rangle, \quad | 0 \rangle \equiv \Psi_0.$$

Замечая, что

$$\psi(x) = e^{iPx} \psi(0) e^{-iPx}, \quad \bar{\psi}(x) = e^{iPx} \bar{\psi}(0) e^{-iPx},$$

эту функцию можно представить в виде

$$G_{\alpha\beta}^{(e)}(x) = i\theta(t) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \rho_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) e^{-iqx} - i\theta(-t) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q \bar{\rho}_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) e^{iqx}, \quad (3.2.33)$$

где

$$\rho_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) = (2\pi)^3 \langle 0 | \psi_\alpha(0) \delta(q - P) \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle, \quad (3.2.34)$$

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta}(q) \theta(q_0) = (2\pi)^3 \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(0) \delta(q - P) \psi_\alpha(0) | 0 \rangle.$$

Здесь учитывается, что спектр оператора  $P_0$  является положительно определенным. Из соображений релятивистской

инвариантности и инвариантности теории по отношению к отражению пространственных координат следует, что

$$\rho(q) = \rho_1(q^2) \hat{q} + \rho_2(q^2), \quad \hat{q} = \gamma^\mu q_\mu, \quad (3.2.25)$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — некоторые функции  $q^2$ , обращающиеся в нуль при  $q^2 < m^2$  (это следует из того, что в правые части соотношений (3.2.34) дают вклад только промежуточные состояния с энергией, большей  $m$ ).

Из ТСР инвариантности (сильного отражения) теории следует, что

$$\bar{\rho}(q) = -\gamma^5 \rho(q) \gamma^5.$$

Поэтому

$$\bar{\rho}(q) = \rho_1(q^2) \hat{\gamma} - \rho_2(q^2). \quad (3.2.36)$$

Легко видеть, что из этих формул вытекает следующее представление для фурье-компоненты электронной функции Грина:

$$G^{(e)}(p) = \int_0^\infty dM \left( \frac{\rho_+(M)}{M - \hat{p} - i0} + \frac{\rho_-(M)}{M + \hat{p} - i0} \right), \quad (3.2.37)$$

где  $\rho_\pm(M) = \rho_2(M^2) \pm M\rho_1(M^2)$ . Эта формула и показывает, что функция Грина электронно-позитронного поля может быть представлена в виде суперпозиции функций Грина свободных электронно-позитронных полей с различными массами. Эта суперпозиция носит название спектрального представления функции Грина  $G^{(e)}(p)$  [14, [15] (представление Челлена — Леммана). Функции  $\rho_\pm(M)$  называются спектральными функциями. Замечая, что

$$\langle 0 | \{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} | 0 \rangle = -i \int_0^\infty dM^2 (\rho_1(M^2) S(x - x', M) + (\rho_2(M^2) - M\rho_1(M^2)) \Delta(x - x', M^2))$$

и используя перестановочное соотношение  $\{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \}_{t=t'} = \gamma_{\alpha\beta}^0 \delta(x - x')$ , имеем

$$\int_0^\infty dM^2 \rho_1(M^2) = 0. \quad (3.2.38)$$

В случае свободных полей

$$\rho_-(M) = 0, \quad \rho_+(M) = \delta(M - \underline{m}). \quad (3.2.39)$$

В случае взаимодействующих полей  $\rho_-(M) \neq 0$ ,  $\rho_+(M)$  не совпадает с  $\delta(M - \underline{m})$  (в этих формулах  $\underline{m}$  — масса реального (а не голого) электрона, взаимодействующего с собственным

полем излучения (см. п. 3.3.4)). Однако спектральная функция  $\rho_+(M)$  по-прежнему будет иметь  $\delta$ -образную особенность, а функция  $\rho_-(M)$  такой особенности не имеет. Это связано с тем, что в теории взаимодействующих полей среди однозарядовых состояний  $|r\rangle$  только одноэлектронное состояние приводит к полюсу функции  $G^{(e)}(p)$  или к  $\delta$ -образной особенности спектральной функции  $\rho_+(M)$ . Таким образом,

$$\rho_+(M) = Z_2 \delta(M - \underline{m}) + \bar{\rho}_+(M), \quad \rho_-(M) = \bar{\rho}_-(M), \quad (3.2.40)$$

где  $Z_2$  — некоторая константа и  $\bar{\rho}_\pm(M)$  — некоторые функции, не имеющие  $\delta$ -образных особенностей. Поэтому, учитывая, что функции  $\rho_1(M^2)$ ,  $\rho_2(M^2)$  обращаются в нуль при  $M^2 < \underline{m}^2$ , формулу (3.2.37) можно переписать в виде

$$G^{(e)}(p) = \frac{Z_2}{\underline{m} - \hat{p} - i0} + \int_{\underline{m}}^{\infty} dM \left( \frac{\bar{\rho}_+(M)}{M - \hat{p} - i0} + \frac{\bar{\rho}_-(M)}{M + \hat{p} - i0} \right), \quad (3.2.41)$$

где постоянная  $Z_2$  связана, согласно (3.2.38), со спектральными функциями  $\bar{\rho}_\pm$  формулой

$$Z_2 = 1 - \int_0^{\infty} dM (\bar{\rho}_+(M) - \bar{\rho}_-(M)). \quad (3.2.42)$$

Константа  $Z_2$  должна быть положительной. Действительно, матричный элемент  $\langle 0 | \psi(x) | r \rangle$ , соответствующий одноэлектронным состояниям  $|r\rangle \equiv |\rho\mu\rangle$  взаимодействующих полей, можно считать, очевидно, равным

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) | \rho\mu \rangle = \frac{\xi}{\sqrt{2\rho_0 V}} u_\alpha^{1\mu}(p) e^{-ipx}, \quad p_0 = \sqrt{p^2 + \underline{m}^2},$$

где  $\xi$  — положительная постоянная (фазовый множитель в величине  $\xi$  можно включить в вектор состояния  $|\rho\mu\rangle$ ). Эти одноэлектронные состояния приводят к следующему полюсному вкладу в функцию  $G^{(e)}(p)$ :

$$G^{(e)}(p) \approx \frac{\xi^2}{\underline{m} - \hat{p}}. \quad (3.2.43)$$

Поэтому  $Z_2 = \xi^2 > 0$  и

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) | \rho\mu \rangle = \sqrt{\frac{Z_2}{2\rho_0 V}} u_\alpha^{1\mu}(p) e^{-ipx}. \quad (3.2.44)$$

Так как, согласно (1.6.64),

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) | \rho\mu \rangle = \frac{1}{S_0} (\Phi_0, T \{ \psi_\alpha(x) S \} \Phi_{\rho\mu}),$$

где  $\Phi_{\rho\mu} = a_{\rho\mu}^+ \Phi_0$ , то

$$\frac{1}{S_0} (\Phi_0, T \{ \psi_\alpha(x) S \} \Phi_{\rho\mu}) = \frac{\sqrt{Z_2}}{\sqrt{2\rho_0 V}} u_\alpha^{1\mu}(p) e^{-ipx} \quad (3.2.45)$$

и, следовательно, мы приходим к формуле (3.2.17), определяющей перенормировку внешних электронных линий фейнмановских диаграмм. Таким образом, константа  $Z_2$  совпадает с перенормировочной константой, введенной в разделе 3.2.3.

Подчеркнем также, что величина  $Z_2 = \xi^2$  определяет полюсную часть функции Грина электрона (см. (3.2.41)).

Рассмотрим теперь фотонную функцию Грина

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(x - x') = -i \langle 0 | T (A_\mu(x) A_\nu(x')) | 0 \rangle.$$

Можно показать, что фурье-компонента этой функции имеет следующее спектральное представление (см. [4]; мы выбрали калибровку  $\xi = 1$ ):

$$G_{\mu\nu}^{(\gamma)}(q) = -\frac{1}{q^2} \frac{g_{\mu\nu} g_\nu}{q^2} + \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) G^{(\gamma)}(q), \quad (3.2.46)$$

$$G^{(\gamma)}(q) = -\frac{Z_3}{q^2} + \int_{\underline{4m^2}}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2} \Delta^c(q, M^2),$$

где

$$Z_3 = 1 - \int_{\underline{4m^2}}^{\infty} dM^2 \frac{\rho(M^2)}{M^2} \quad (3.2.47)$$

и  $\rho(M^2) > 0$ . Можно также показать (см. [4]), что

$$0 \leq Z_3 < 1, \quad (3.2.48)$$

причем  $Z_3$  совпадает с перенормировочной константой  $Z_3$ , введенной в разделе 3.2.3 так, что

$$\frac{1}{S_0} (\Phi_0, T (A_\mu(x) S) \Phi_{k\lambda}) = \frac{\sqrt{Z_3}}{\sqrt{2\omega V}} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{-ikx},$$

где  $\Phi_{k\lambda} = C_{k\lambda}^+ \Phi_0$ ,  $\lambda = 1, 2$ .

### § 3.3. Теория перенормировок

**3.3.1. Расходимость неприводимых диаграмм матрицы рассеяния.** При вычислении элементов матрицы рассеяния в высших приближениях мы встречаемся с принципиальной трудностью, вследствие которой длительное время считалось, что применимость квантовой электродинамики ограничена первым приближением. Эта трудность заключается в том, что выражения

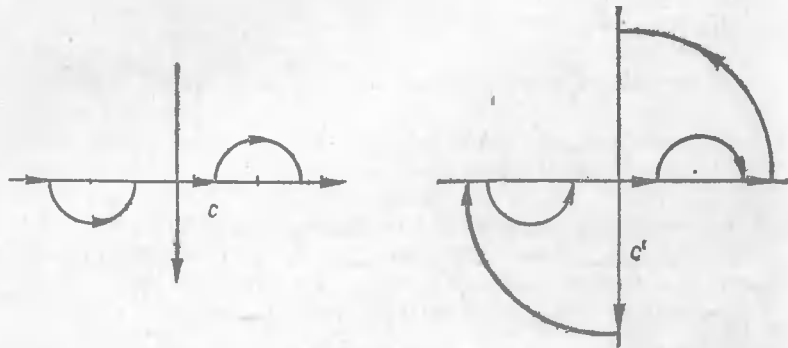


Рис. 13.

для матричных элементов в высших приближениях содержат интегралы, расходящиеся в области больших импульсов виртуальных частиц.

В данном параграфе рассмотрим вопрос об этих расходимостях и о методах их устранения. При этом не будем рассматривать встречающиеся в ряде случаев расходимости в области малых импульсов («инфракрасная катастрофа»). Они связаны с неприменимостью теории возмущений при малых частотах фотонов.

Для разъяснения причины возникновения расходимостей рассмотрим некоторую неприводимую диаграмму. В общем случае ей соответствует многократный интеграл по импульсам виртуальных частиц

$$\mathcal{I}(p_1, \dots, p_m) = \int_{p_1, \dots, p_m} d^4 p'_1 \dots d^4 p'_n \mathcal{F}(p'_1, \dots, p'_n), \quad (3.3.1)$$

где  $\mathcal{F}(p'; p)$  — некоторая рациональная функция, представляющая собой отношение двух полиномов; переменные  $p_1, p_2, \dots, p_m$  представляют собой 4-импульсы свободных частиц.

В простейшем случае мы имеем дело с интегралом вида

$$\mathcal{I} = \int d^4 p \frac{f(p)}{(p^2 + i)^n}, \quad (3.3.2)$$

где  $f(p)$  — некоторый полином от  $p^2$ . В этом интеграле в соответствии с определением фурье-компонент функций распространения величина  $p^2$  должна быть заменена на  $p^2 + i0$ . Согласно разделу 2.1.3, можно поступить иначе: вместо введения бесконечно малой мнимой добавки в знаменателе производить интегрирование по  $p_0$  вдоль контура  $C$  (рис. 13). Интеграл (3.3.2), однако, даже при достаточно большом  $n$  и указанном правиле обхода полюсов не будет абсолютно сходящимся. Это

связано с тем, что 4-пространство импульсов является псевдоэвклидовым. Поэтому, если сперва производить интегрирование по поверхности гиперboloида  $p^2 = \text{const}$ , то в силу бесконечной площади последнего этот интеграл будет расходиться. При определении интеграла  $\mathcal{I}$  будем всегда выполнять интегрирование вначале по  $p_0$ . При этом очевидно, что интеграл по контуру  $C'$  (см. рис. 13) в комплексной плоскости будет равен нулю. Поэтому вместо интегрирования по контуру  $C$  мы можем интегрировать вдоль мнимой оси

$$\int_C d p_0 \frac{f(p)}{(p^2 + i)^n} = i \int_{-\infty}^{\infty} d p_0 \frac{f(p)}{(p^2 + i)^n} \Big|_{p_0 \rightarrow i p_0}$$

(мы учли при этом, что подынтегральная функция в (3.3.2) убывает при  $p_0 \rightarrow \infty$  быстрее чем  $p_0^{-1}$ ). Таким образом,

$$\mathcal{I} = i \int d^4 p \frac{f(p)}{(p^2 + i)^n} \Big|_{p_0 \rightarrow i p_0}.$$

В этом интеграле мы имеем дело не с псевдоэвклидовой, а с эвклидовой метрикой ( $p^2|_{p_0 \rightarrow i p_0} = -p^2 - p_0^2 = \text{const}$  является сферической поверхностью).

В общем случае интеграл (3.3.1) приобретает, очевидно, вид

$$\mathcal{I}(p_1, \dots, p_m) \Big|_{p_0 \rightarrow i p_0} = i^n \int d^4 p'_1 \dots d^4 p'_n \times \mathcal{F}(p'; p') \Big|_{p_0 \rightarrow i p_0, p'_0 \rightarrow i p'_0}. \quad (3.3.3)$$

После вычисления этого интеграла по переменным  $p'_{i0}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) должно быть произведено аналитическое продолжение по переменным  $p_{i0}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) в псевдоэвклидово пространство. Переход к эвклидовому пространству позволяет произвести классификацию расходимостей по разности степеней полиномов, стоящих в числителе и знаменателе функции  $\mathcal{F}$ . Так как каждой внутренней электронной линии диаграммы соответствует множитель  $-iS^c(p)$ , содержащий импульс в степени  $-1$ , в каждой внутренней фотонной линии — множитель  $i\mathcal{D}^c(p)$ , содержащий импульс в степени  $-2$ , то разность степеней полиномов, стоящих в числителе и знаменателе  $\mathcal{F}$ , будет равна  $-(F_e + 2F_\gamma)$ , где  $F_e$  и  $F_\gamma$  — числа внутренних электронных и фотонных линий.

Подсчитаем теперь число переменных интегрирования. Число различных импульсов равно числу внутренних линий, т. е.  $F_e + F_\gamma$ . Но они не независимы, так как три импульса линий, сходящихся в каждой из  $n$  вершин диаграммы, связаны законом сохранения. Один из законов сохранения можно отнести к внешним линиям, поэтому число независимых

импульсов, по которым производится интегрирование, равно  $F_e + F_\nu - n + 1$ . Учтем теперь, что с каждой вершиной связано две электронные и одна фотонная линия. С каждым концом электронной линии связана одна вершина. Поэтому

$$n = F_e + \frac{1}{2} N_e, \quad (3.3.4)$$

где  $N_e$  — число внешних электронных линий (при подсчете числа вершин выходящие внешние электронные линии учитывать не надо). С каждой внутренней фотонной линией связаны две вершины, а с каждой внешней фотонной линией — одна вершина. Поэтому

$$n = 2F_\nu + N_\nu, \quad (3.3.5)$$

где  $N_\nu$  — число внешних фотонных линий.

Если записать интеграл  $\mathcal{I}$  схематически в виде

$$\mathcal{I} = \int d^{4\omega_1} p \cdot (p)^{-\omega_2},$$

где  $\omega_1 = F_e + F_\nu - n + 1$ ,  $\omega_2 = F_e + 2F_\nu$ , то, используя приведенный подсчет, имеем

$$\omega_1 = \frac{1}{2} n - 1 - \frac{1}{2} N_e - \frac{1}{2} N_\nu, \quad \omega_2 = 2n - \frac{1}{2} N_e - N_\nu.$$

Поскольку мы рассматриваем связанную неприводимую диаграмму, то подынтегральная функция не распадается на множители, содержащие независимые переменные. Поэтому сходимость интеграла определяется разностью  $4\omega_1 - \omega_2$  (она называется индексом расходимости диаграммы)

$$\omega = 4\omega_1 - \omega_2 = 4 - N_\nu - \frac{3}{2} N_e. \quad (3.3.6)$$

При  $\omega < 0$  интеграл сходится, при  $\omega \geq 0$  — расходится. Степень расходимости определяется величиной  $\omega$ : при  $\omega = 0$  интеграл расходится логарифмически в области больших импульсов (как  $\ln p$ ), а при  $\omega > 0$  в области больших импульсов интеграл расходится как  $p^\omega$ . Замечательно, что величина  $\omega$  зависит только от числа внешних линий и не зависит от числа вершин  $n$ .

Из (3.3.6) следует, что имеется ограниченное число типов расходящихся интегралов, соответствующих следующим значениям чисел  $N_e$  и  $N_\nu$ :

1.  $N_e = 2, N_\nu = 1, \omega = 0$ , 2.  $N_e = 2, N_\nu = 0, \omega = 1$ ,
  3.  $N_e = 0, N_\nu = 3, \omega = 1$ , 4.  $N_e = 0, N_\nu = 4, \omega = 0$ ,
  5.  $N_e = 0, N_\nu = 2, \omega = 2$ , 6.  $N_e = 0, N_\nu = 1, \omega = 3$ ,
  7.  $N_e = 0, N_\nu = 0, \omega = 4$ .
- (3.3.7)

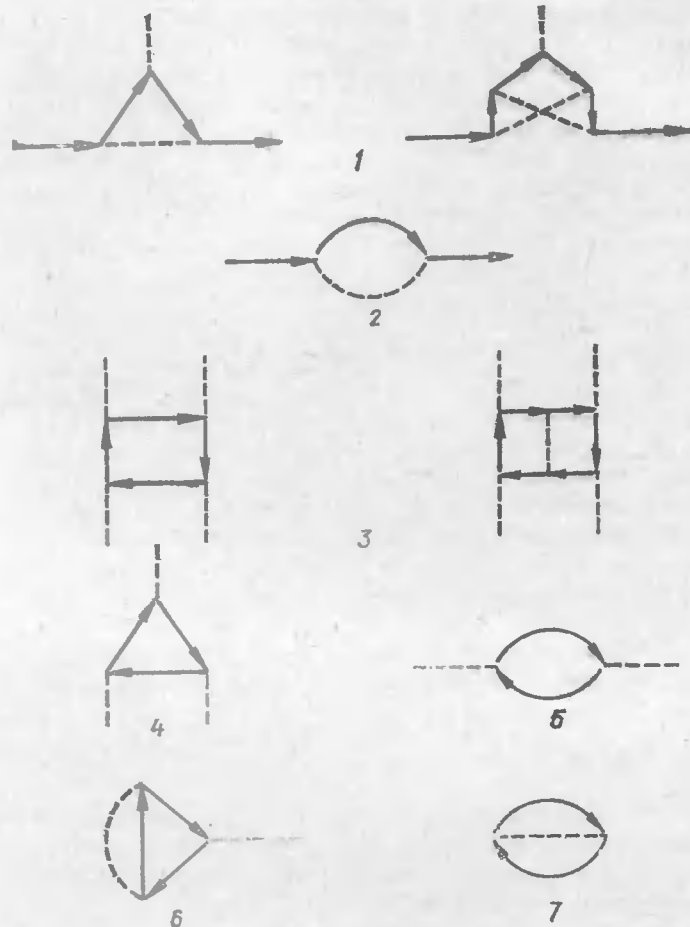


Рис. 14.

На рис. 14 изображены простейшие неприводимые диаграммы, соответствующие этим расходимостям. Не все из них, однако, вносят вклад в матричные элементы. Ясно, что диаграмму 7, представляющую собой вакуумную петлю, можно не учитывать (она приводит только к фазовому множителю в матричном элементе). Можно также, согласно теореме Фарри, не рассматривать диаграммы 4 и 6, представляющие собой замкнутые электронные петли с нечетным числом вершин.

Таким образом, основными неприводимыми диаграммами, приводящими к расходимостям в матрице рассеяния, являются ЭСЭД ( $\omega = 1$ ) и ФСЭД ( $\omega = 2$ ) второго порядка, неприводимая

ВД любого порядка ( $\omega = 0$ ) и диаграмма рассеяния света светом ( $\omega = 0$ ; диаграмма 3 на рис. 14).

Мы покажем теперь, что к формуле (3.3.6), определяющей индекс расходимости диаграммы, можно прийти другим способом, исходя из соображений размерности. При этом мы будем рассматривать несколько более общий случай, когда константа связи, обозначаемая через  $g$ , в отличие от электродинамики, имеет ненулевую размерность. Считая  $\hbar = C = 1$ , можно размерность всех величин выразить через размерность импульса,  $[g] = p^s$ . Предположим, что функции распространения в области больших импульсов зависят только от импульсов и не зависят от других размерных параметров (таким свойством обладает функция распространения скалярного, электромагнитного, спинорных полей и не обладает функция распространения векторных полей (см. формулы (2.2.25')). Так как матрица рассеяния безразмерна, то безразмерны и все ее матричные элементы  $S_{i \rightarrow f}$ ,  $[S_{i \rightarrow f}] = p^0$ . С другой стороны, размерность матричного элемента неприводимой диаграммы  $n$ -го порядка теории возмущений определяется формулой

$$[(S_n)_{i \rightarrow f}] = p^{sn - 4 + \omega + \sum_i l_i N_i},$$

где  $p^{sn}$  происходит из-за размерности  $g^n$ ;  $p^{-4}$  представляет собой размерность  $\delta$ -функции, выражающей закон сохранения 4-импульса диаграммы в целом;  $p^\omega$  — размерность фейнмановского интеграла,  $\int dp \cdot p^{\omega-1}$ , с индексом расходимости  $\omega$ ;  $p^{-\sum_i l_i N_i}$  — размерность волновых функций, сопоставляемых внешним линиям диаграммы ( $N_i$  — число внешних линий частиц сорта  $i$  и  $l_i$  — размерность операторов, соответствующих этим линиям). Так как  $[(S_n)_{i \rightarrow f}] = p^0$ , то

$$\omega = 4 - sn - \sum_i l_i N_i. \quad (3.3.8)$$

Эта формула обобщает формулу (3.3.6). В случае квантовой электродинамики  $s = 0$  и размерность операторов поля определяется перестановочными соотношениями (3.1.6), (3.1.11), из которых следует, что  $[\psi] = p^{3/2}$ ,  $[A_\mu] = p^1$ , поэтому  $l_\psi = \frac{3}{2}$ ,  $l_A = 1$ . Таким образом, мы приходим к формуле (3.3.6).

Формула (3.3.8) позволяет выяснить влияние размерности константы связи на степень расходимости неприводимых диаграмм. Если  $s > 0$ , то расходиться может только конечное число неприводимых диаграмм. В этом случае теорию называют суперперенормируемой. Примером такой теории является

теория скалярного поля с лагранжианом взаимодействия  $g\phi^3$ . Так как величина  $g \int d^3x \phi^3$  имеет нулевую размерность и  $[\phi] = p^1$ , то  $s = 1$ . Если  $s = 0$ , то теория называется перенормируемой. В этом случае количество неприводимых расходящихся диаграмм бесконечно, однако конечным является число возможных типов расходящихся диаграмм (каждый тип характеризуется числом внешних линий диаграммы). Примерами перенормируемых теорий является квантовая электродинамика и теория скалярного поля с лагранжианом взаимодействия  $g\phi^4$ . Наконец, если  $s < 0$ , то возникает бесконечное число расходящихся диаграмм с неограниченным числом типов расходимостей. В этом случае теорию называют неперенормируемой. Примером неперенормируемой теории является, например, теория скалярного поля с лагранжианом взаимодействия  $g\phi^m$ ,  $m \geq 5$ ; или теория с лагранжианом  $g\phi \delta_\mu \phi \delta^\mu \phi$ .

**3.3.2. Расходимость фейнмановских диаграмм и проблема определения произведений обобщенных функций.** Мы покажем теперь, что математическая причина возникновения расходимостей связана с тем, что функции  $S^c(x)$ ,  $\mathcal{D}^c(x)$  являются обобщенными функциями, для которых не определена операция произведения, поскольку фурье-образ произведений этих функций, представляющий собой свертку фурье-образов сомножителей, не существует из-за недостаточно быстрого убывания в области больших импульсов функций  $S^c(p)$ ,  $\mathcal{D}^c(k)$ .\* Например, диаграмма 5 на рис. 14, соответствующая второму порядку теории возмущений, определяет так называемый поляризационный оператор (см. § 3.5)

$$\Pi_{\mu\nu}(x - x') = ie^2 \text{Sp } \gamma_\mu S^c(x - x') \gamma_\nu S^c(x' - x). \quad (3.3.9)$$

Мы видим, что в это выражение входит произведение двух обобщенных функций, сумма аргументов которых равна нулю. Такие произведения обобщенных функций не всегда представляют собой даже обобщенную функцию. Для выяснения смысла таких произведений производят регуляризацию обобщенных функций  $S^c$ ,  $\mathcal{D}^c$  (промежуточная регуляризация), в результате эти обобщенные функции становятся обычными функциями, для которых уже имеет смысл операция произведения. После этого в произведении этих регуляризованных обычных функций происходит «снятие» регуляризации и выяснение вопроса: имеет ли это произведение смысл после снятия регуляризации или нет? Эти вопросы будут подробнее рассматриваться в

\* Связь расходимостей с проблемой умножения обобщенных функций была проанализирована в работах Боголюбова Н. Н. и Парасюка О. С. [16] (см. также [17]).

следующем пункте. Здесь же мы разясним возникающие проблемы на простейших примерах произведений обобщенных  $\delta$ -,  $\delta_{\pm}$ -функций.

Обобщенные функции  $\delta$ ,  $\delta_{\pm}$  определяются формулами

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t}, \quad \delta_{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pm\infty} d\omega e^{-i\omega t}. \quad (3.3.10)$$

Таким образом, обобщенные функции  $\delta_{\pm}(t)$  представляют собой положительно и отрицательно частотные части функции  $\delta(t)$ . Фурье-образы этих функций, которые мы будем обозначать через  $\delta(\omega)$ ,  $\delta_{\pm}(\omega)$ , равны, очевидно,  $\delta(\omega) = 1$ ,  $\delta_{\pm}(\omega) = \theta(\pm\omega)$  и не убывают при  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Введем теперь обычные (регуляризованные) функции, соответствующие обобщенным функциям  $\delta(t)$ ,  $\delta_{\pm}(t)$ ,

$$\delta^{\eta}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t - \eta|\omega|}, \quad \delta_{\pm}^{\eta}(t) = \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pm\infty} d\omega e^{-i\omega t \mp \eta\omega},$$

где  $\eta > 0$ . Фурье-образы этих функций, определяемые формулами  $\delta^{\eta}(\omega) = e^{-\eta|\omega|}$ ,  $\delta_{\pm}^{\eta}(\omega) = \theta(\pm\omega) e^{\mp\eta\omega}$ , стремятся к нулю как при  $\omega \rightarrow \infty$ , так и при  $\omega \rightarrow -\infty$ . Регуляризованные обобщенные функции  $\delta^{\eta}(t)$ ,  $\delta_{\pm}^{\eta}(t)$  можно представить в виде

$$\delta_{\pm}^{\eta}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\eta \pm it}, \quad \delta^{\eta}(t) = \delta_{+}^{\eta}(t) + \delta_{-}^{\eta}(t). \quad (3.3.11)$$

Заметим, что обобщенные функции  $\delta(t)$ ,  $\delta_{\pm}(t)$  всегда встречаются под знаком интеграла по переменной  $t$  и фактически определяются соотношениями

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \delta(t) = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \delta^{\eta}(t), \quad (3.3.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \delta_{\pm}(t) = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \delta_{\pm}^{\eta}(t),$$

где  $f(t)$  — достаточно хорошая функция переменной  $t$  (пространство основных функций).

Покажем, что произведение  $\delta_{+}^{\eta_1}(t) \delta_{+}^{\eta_2}(t) = \delta_{+}^{\eta_1}(t) \delta_{-}^{\eta_2}(-t)$  регуляризованных обобщенных функций определяет некоторую обобщенную функцию, которую можно назвать произведением обобщенных функций  $\delta_{+}(t) \delta_{+}(t) \equiv \delta_{+}(t) \delta_{-}(-t)$ . Действи-

тельно, легко видеть, что

$$\lim_{\substack{\eta_1 \rightarrow +0 \\ \eta_2 \rightarrow +0}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \delta_{+}^{\eta_1}(t) \delta_{+}^{\eta_2}(t) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f(t) - f(0) - tf'(0)}{t^2}$$

(интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} dt \dots$  подразумевается в смысле  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A dt \dots$ ). Таким образом, предел при  $\eta_1, \eta_2 \rightarrow +0$  существует и, следовательно, определяет некоторую обобщенную функцию. Заметим далее, что

$$-\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f(t) - f(0) - tf'(0)}{t^2} =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \frac{d}{dt} \frac{1}{\eta + it}. \quad (3.3.13)$$

Формулы (3.3.11), (3.3.12) показывают, что

$$\delta_{+}(t) \delta_{+}(t) = \frac{i}{2\pi} \delta_{+}(t). \quad (3.3.14)$$

Свертка фурье-образов функций  $\delta_{+}(t)$  и  $\delta_{+}(t)$ , представляющая собой фурье-образ произведения  $\delta_{+}(t) \delta_{+}(t)$

$$(\delta_{+}(t) \delta_{+}(t))_{\omega} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \delta_{+}(\omega') \delta_{+}(\omega - \omega'),$$

как легко видеть, существует и равна  $\omega\theta(\omega)$ .

Рассмотрим теперь произведение регуляризованных обобщенных функций  $\delta_{+}^{\eta_1}(t) \delta_{+}^{\eta_2}(-t) \equiv \delta_{+}^{\eta_1}(t) \delta_{-}^{\eta_2}(t)$ . Покажем, что этому произведению не соответствует никакая обобщенная функция. С этой целью рассмотрим поведение интеграла

$$A_{\eta_1 \eta_2}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \delta_{+}^{\eta_1}(t) \delta_{-}^{\eta_2}(t) \quad (3.3.15)$$

при  $\eta_1, \eta_2 \rightarrow +0$ . Легко видеть, что

$$A_{\eta_1 \eta_2}(f) \xrightarrow{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f(t) - f(0) - tf'(0)}{t^2} +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A dt \frac{f(0) + tf'(0)}{(\eta_1 + it)(\eta_2 - it)}.$$



Так как

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-A}^A \frac{dt}{(\eta_1 + it)(\eta_2 - it)} = \frac{(2\pi)^{-1}}{\eta_1 + \eta_2},$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-A}^A \frac{idt}{(\eta_1 + it)(\eta_2 - it)} = \frac{(2\pi)^{-1} i \eta_1}{\eta_1 + \eta_2},$$

то

$$A_{\eta_1 \eta_2}(f) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f(t) - f(0) - tf'(0)}{t^2} + Bf(0) -$$

$$- Cf'(0), \quad B = \frac{(2\pi)^{-1}}{\eta_1 + \eta_2}, \quad C = -i\eta_1 B$$

или символически, учитывая (3.3.13),

$$\delta_+^{\eta_1}(t) \delta_-^{\eta_2}(t) \xrightarrow{\eta \rightarrow +0} -\frac{i}{2\pi} \delta_+'(t) + B\delta(t) + C\delta'(t). \quad (3.3.16)$$

Таким образом, мы видим, что пределы коэффициентов  $B$  и  $C$  при  $\eta \rightarrow +0$  не существуют (в принципе зависят от способа регуляризации); поэтому произведение обобщенных функций  $\delta_+(t) \delta_+(-t)$  также не существует. Свертка фурье-образов функций  $\delta_+(t)$  и  $\delta_-(t)$ , представляющая собой фурье-образ произведения  $\delta_+(t) \delta_-(t)$

$$(\delta_+(t) \delta_-(t))_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \delta_+(\omega') \delta_-(\omega - \omega') =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \theta(\omega') \theta(\omega' - \omega),$$

не существует, так как подынтегральное выражение не убывает в области больших  $\omega' > 0$  (это и является причиной того, что произведение  $\delta_+(t) \delta_-(t)$  не существует).

Аналогичная ситуация имеет место и в квантовой теории поля. Пропагатор  $S^c(x)$  можно представить в виде

$$S^c(x) = \theta(t) S^+(x) - \theta(-t) S^-(x),$$

где  $S^+(x)$ ,  $S^-(x)$  — положительно и отрицательно частотные части перестановочной функции  $S(x)$  (см. (2.4.44)). Можно показать, что величина

$$P_{\mu\nu}(x - x') = ie^2 \text{Sp} \gamma_{\mu} S^-(x - x') \gamma_{\nu} S^+(x' - x)$$

(ср. с (3.3.9)), в которую входит произведение обобщенных функций  $S^-(x)$ ,  $S^+(-x)$ , существует и определяет обобщен-

ную функцию

$$P'_{\mu\nu}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ipx} P_{\mu\nu}(p),$$

$$P_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{2\pi} \theta(p_0) \theta(p^2 - 4m^2) \frac{p^2 + 2m^2}{3} \times$$

$$\times \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{p^2} \right),$$

тогда как величина

$$P''_{\mu\nu}(x - x') = ie^2 \text{Sp} \gamma_{\mu} S^-(x - x') \gamma_{\nu} S^+(x - x'),$$

так же как и величина  $P_{\mu\nu}(x - x')$ , не определяет какой-либо обобщенной функции.

В следующем пункте мы введем процедуру регуляризации обобщенных функций  $S^c(x)$ ,  $\mathcal{D}^c(x)$ , в результате которой они становятся обычными функциями. Эта процедура аналогична процедуре регуляризации функций  $\delta_{\pm}$ ,  $\delta$  в приведенных выше примерах. При этом, как мы увидим далее,

$$P_{\mu\nu}(x - x') = \underline{P}_{\mu\nu}(x - x') + Ag_{\mu\nu} \delta(x - x') +$$

$$+ B \partial_{\mu} \partial_{\nu} \delta(x - x'), \quad (3.3.17)$$

где  $\underline{P}_{\mu\nu}(x - x')$  — некоторая обобщенная функция, которая будет найдена далее, а  $A$  и  $B$  — некоторые постоянные, стремящиеся к бесконечности, если параметр регуляризации  $M^{-1}$  стремится к нулю (величина  $M^{-1}$  аналогична  $\eta$ ). Подчеркнем, что от способа регуляризации зависят только величины  $A$  и  $B$ . Эта формула аналогична формуле (3.3.16).

Как далее будет видно, неопределенные (бесконечные при  $M \rightarrow \infty$ ) величины  $A$ ,  $B$  исчезают из наблюдаемых величин в результате привлечения физической идеи о перенормировке заряда и массы электрона (в применении к (3.2.17) перенормировка сводится к вычитанию первых трех членов ряда Тейлора из фурье-компоненты  $P_{\mu\nu}(p)$  функций  $P_{\mu\nu}(x)$ ).

Существует другой подход к определению произведений обобщенных функций [8]. Рассмотрим этот подход на примере  $\delta_{\pm}$ -функций.

Пусть функционал (3.3.15) определен на классе основных функций, обращающихся в нуль вместе со своей производной при  $t = 0$ . Тогда на этом классе функций определен функционал

$$A(f) = \lim_{\substack{\eta_1 \rightarrow +0 \\ \eta_2 \rightarrow +0}} A_{\eta_1 \eta_2}(f) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \delta_+'(t). \quad (3.3.18)$$

Произведем непрерывное расширение этого функционала, определенного на классе основных функций, для которых  $f(0) = f'(0) = 0$ , на более широкой класс функций, для которых  $f(0) \neq 0$ ,  $f'(0) \neq 0$ . Это расширение должно быть проведено так, чтобы расширенный функционал совпадал с функционалом (3.3.18), если  $f(0) = f'(0) = 0$ . Легко видеть, что такое расширение приводит к функционалу

$$A(f) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \delta'_+(t) + Bf(0) - Cf'(0)$$

(этот функционал мы также обозначаем через  $A(f)$ ). Таким образом, естественно принять обобщенную функцию  $(2\pi i)^{-1} \times \delta'_-(t) + B\delta(t) + C\delta'(t)$ , зависящую от произвольных постоянных  $B, C$ , за определение произведения обобщенных функций  $\delta_+(t) \delta_+(-t)$ :

$$\delta_+(t) \delta_+(-t) = (2\pi i)^{-1} \delta'_-(t) + B\delta(t) + C\delta'(t). \quad (3.3.19)$$

Эта формула фактически совпадает с (3.3.16), однако здесь  $B$  и  $C$  — произвольные конечные (но не бесконечные) постоянные. В теории поля произвол, связанный с постоянными, аналогичными величинам  $B, C$ , также ликвидируется путем привлечения идеи о перенормировке заряда и массы электрона.

**3.3.3. Промежуточная регуляризация.** Появление расходимостей в матрице рассеяния, основанной на уравнениях движения взаимодействующих полей, указывает на неудовлетворительность физической теории. Ясно, что ряд теории возмущений, строго говоря, не имеет смысла, если второй член ряда бесконечен. Между тем результаты применения теории возмущений в первом приближении прекрасно подтверждаются опытом. С другой стороны, чтобы первое приближение имело какой-либо теоретический смысл, следующие приближения должны приводить лишь к малым поправкам.

Идея выхода из этого противоречия подсказывается уже классической электродинамикой. Как известно, классическая электродинамика не является логически замкнутой теорией. Последовательное ее применение приводит к противоречиям, проявляющимся, например, в бесконечной электромагнитной массе электрона. Смысл этих противоречий сводится к неприменимости уравнений классической электродинамики на расстояниях, меньших классического радиуса электрона  $e^2/mc^2$  (фактически классическая электродинамика из-за квантовых эффектов неприменима уже при расстояниях порядка  $\hbar mc$ ).

Квантовая электродинамика правильно описывает взаимодействие между электронами и фотонами в области достаточно больших пространственно-временных интервалов или соответ-

ственно в области достаточно малых импульсов частиц, однако в области малых пространственно-временных интервалов, т. е. больших импульсов, становится неприменимой. Не рассматривая вопрос о том, связано ли это ограничение с пороком основных идей и уравнений квантовой электродинамики или с неприменимостью теории возмущений, можно, однако, утверждать, что, если рассматривать процессы, в которых частицы обмениваются импульсами, малыми по сравнению с некоторым граничным импульсом  $\Lambda$ , то область импульсов виртуальных частиц, превосходящих  $\Lambda$ , не будет играть практически никакой роли. В этих условиях величина граничного импульса не должна входить в выражения для элементов  $S$ -матрицы. Поэтому, хотя мы точно не знаем  $\Lambda$ , тем не менее можем варьировать эту величину и выбрать ее таким образом, чтобы, с одной стороны, выполнялось условие  $\Delta p \ll \Lambda$ , где  $\Delta p$  — величина, характеризующая изменение импульса частиц при столкновениях, а с другой, была применимой теория возмущений.

Введение граничного импульса математически означает, что при вычислении интегральных величин, сопоставляемых диаграммам Фейнмана, будет производиться интегрирование не по бесконечной, а по некоторой конечной области 4-импульсного пространства. Эта область должна быть, естественно, инвариантной относительно преобразования Лоренца.

Вместо интегрирования по конечной области в 4-импульсном пространстве можно пользоваться также другими эквивалентными методами, состоящими в введении в подынтегральные выражения некоторого «обрезающего фактора», т. е. множителя  $f(p, \Lambda)$ , равного единице при  $|p^2| \ll \Lambda^2$  и обращаемого в нуль при  $|p^2| \gg \Lambda^2$ . Введение обрезающего фактора в подынтегральное выражение матричного элемента будем называть промежуточной регуляризацией. Частным случаем промежуточной регуляризации является модификация функций Грина (функций распространения), свободных частиц. Исходные функции распространения  $\mathcal{D}^c, S^c$  могут быть записаны единым образом в виде

$$\mathcal{D}(p) = \mathcal{P}(p) \frac{1}{m^2 - p^2 - i0},$$

где  $\mathcal{P}(p)$  — некоторый полином от 4-импульса  $p$ ;  $m$  — масса частиц (степень полинома в случае фотона равна нулю, в случае электрона — единице, в случае векторной частицы — двум).

Модифицированную функцию распространения можно определить следующим образом [18]:

$$\underline{\mathcal{D}}(p) = \frac{\mathcal{P}(p)}{m^2 - p^2 - i0} - \mathcal{P}(p) \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{\mathcal{M}_i^2 - p^2 - i0}, \quad (3.3.20)$$

где  $M_i$  —  $n$  произвольных вспомогательных масс и коэффициенты  $C_i \equiv C_i(M)$  определяются из соотношений

$$\sum_{i=1}^n C_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n C_i M_i^2 = m^2, \quad \dots, \quad (3.3.21)$$

$$\sum_{i=1}^n C_i M_i^{2(n-2)} = m^{2(n-2)}.$$

При этих условиях модифицированная функция распространения убывает при больших  $p^2$  как  $\mathcal{S}(p) (p^2)^{-n-1}$ . Поэтому при достаточно больших  $n$  матричный элемент не будет содержать расходящихся в области больших  $p^2$ . Эта промежуточная регуляризация носит название регуляризации Паули — Вилларса.

В квантовой электродинамике (если не учитывать вакуумных петель) достаточно регуляризовать только электронную функцию распространения  $S^c(p)$ , используя только одну вспомогательную массу

$$\underline{S}^c(p) = (\hat{p} + m) \left\{ \frac{1}{m^2 - p^2 - i0} - \frac{1}{M^2 - p^2 - i0} \right\}. \quad (3.3.22)$$

Рассмотрим еще один важный тип промежуточной регуляризации — так называемую размерную регуляризацию, связанную с изменением размерности пространства, по которому происходит интегрирование в матричных элементах  $S$ -матрицы.

Как мы знаем, интегралы, сопоставляемые различным диаграммам, имеют следующую структуру:

$$\mathcal{S} = \int d^4 p_1 \dots d^4 p_n \frac{F(p_1, \dots, p_n)}{a_1 \dots a_n}, \quad (3.3.23)$$

где  $F$  — некоторый полином по 4-импульсам  $p$ ;  $a_i$  — полином второй степени относительно  $p$ . С помощью повторного применения формулы типа

$$\frac{1}{a_i a_j} = \int_0^1 du [a_i u + a_j (1-u)]^{-2} \quad (3.3.24)$$

(и формул, получающихся из (3.3.24) путем дифференцирования по  $a_i$ ) вычисление интеграла (3.3.23) сводится к вычислению интегралов типа

$$\mathcal{S}(u_1, \dots, u_{n-1}) = \int d^4 p \frac{F(p)}{[p^2 - 2pk + l]^m}, \quad (3.3.25)$$

где  $k$  и  $l$  — некоторые функции параметров  $u_1, \dots, u_{n-1}$ , по которым далее должно производиться интегрирование. В методе размерной регуляризации вместо этого интеграла рассматри-

вается интеграл [19—21]

$$\mathcal{S} = \int d^d p \frac{F(p)}{(p^2 - 2pk + l)^m},$$

где целые числа  $d, m$  выбираются так, чтобы интеграл существовал. В этом случае, как мы убедимся далее, справедлива формула

$$\int \frac{d^d p}{(p^2 - 2pk + l)^m} = \frac{i\pi^{d/2}}{\Gamma(m)} \frac{\Gamma\left(m - \frac{d}{2}\right)}{(k^2 - l)^{m - \frac{1}{2}d}} (-1)^m. \quad (3.3.26)$$

Для сходимости этого интеграла должно выполняться соотношение  $d < 2m$ . Правая часть формулы имеет смысл при произвольных вещественных значениях параметров  $d, m$ , причем величины  $m, m - \frac{d}{2}$  не должны быть целым отрицательным числом или нулем. В этом случае формула (3.3.26) определяет соответствующие интегралы при произвольном значении  $d$ . При  $d$  целом и  $d \geq 2m$  интеграл (3.3.26) расходится. Идея размерной регуляризации заключается в том, что при вычислении расходящихся интегралов мы переходим от пространства с 4-измерениями к пространству с  $d$  измерениями и считаем в дальнейшем  $d$  произвольным вещественным числом, близким к 4. Таким образом, придается смысл расходящимся интегралам, не прибегая к понятию граничного импульса  $\Lambda$  или вспомогательных масс в методе Паули — Вилларса. В дальнейшем после проведения физической процедуры перенормировки заряда и массы электрона проводится предельный переход  $d \rightarrow 4$ , аналогично тому, как в методе с граничным импульсом производится (после перенормировки) предельный переход  $\Lambda \rightarrow \infty$ , а в методе Паули — Вилларса —  $M_i \rightarrow \infty$ .

Перейдем к более подробному изучению интеграла (3.3.26), причем будем предполагать, что  $m > \frac{d}{2}$ , следовательно, интеграл существует. Производя в этом сходящемся интеграле замену переменных  $p \rightarrow p + k$ , получаем

$$\mathcal{S} = \int \frac{d^d p}{(p^2 + l - k^2)^m}.$$

Так как  $d^d p = ip^{d-1} dp d\Omega$  (множитель  $i$  возникает при переходе к интегрированию в евклидовом пространстве, см. раздел (3.3.1)), где  $d\Omega$  — элемент телесного угла  $d$  — 1-мерной сферы в  $d$ -мерном пространстве, и

$$\int d\Omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)},$$

то

$$g = \frac{2i\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{p^{d-1} dp}{(l - k^2 - p^2)^m}.$$

Замечая, что

$$\int_0^\infty dx \frac{x^\beta}{(x^2 + l)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta + 1)\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}(\beta + 1)\right)}{\Gamma(\alpha)} \times \\ \times (l)^{-\alpha + \frac{1}{2}(\beta + 1)}, \quad (3.3.27)$$

имеем

$$\int \frac{d^d p}{(p^2 - 2pk + l)^m} = \frac{i}{(-1)^m} \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(m)} \frac{\Gamma\left(m - \frac{d}{2}\right)}{(k^2 - l)^{m - \frac{d}{2}}} \quad (3.3.28)$$

(см. (3.3.26)). Рассмотрим далее интеграл

$$\int d^d p \frac{p_\mu}{(p^2 - 2pk + l)^m}.$$

Предполагая, что этот интеграл сходится, представляем его в виде

$$\int d^d p \frac{p_\mu}{(p^2 - 2pk + l)^m} = \frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{1}{2} \frac{1}{m-1} \times \\ \times \int \frac{d^d p}{(p^2 - 2pk + l)^{m-1}},$$

откуда, используя формулу (3.3.28), находим

$$\int \frac{d^d p p_\mu}{(p^2 - 2pk + l)^m} = ik_\mu \frac{\pi^{d/2}}{(-1)^m \Gamma(m)} \frac{\Gamma\left(m - \frac{d}{2}\right)}{(k^2 - l)^{m - \frac{d}{2}}}. \quad (3.3.29)$$

Поступая аналогичным образом, получаем

$$\int \frac{d^d p p_\mu p_\nu}{(p^2 - 2pk + l)^m} = \frac{i\pi^{d/2}}{(-1)^m \Gamma(m)} \left\{ \frac{\Gamma\left(m - \frac{d}{2}\right)}{(k^2 - l)^{m - \frac{d}{2}}} k_\mu k_\nu - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\Gamma\left(m - \frac{d}{2} - 1\right)}{(k^2 - l)^{m - \frac{d}{2} - 1}} \right\},$$

$$\int \frac{d^d p p_\mu p_\nu p_\lambda}{(p^2 - 2pk + l)^m} = \frac{i\pi^{d/2}}{(-1)^m \Gamma(m)} \left\{ \frac{\Gamma\left(m - \frac{d}{2}\right)}{(k^2 - l)^{m - \frac{d}{2}}} k_\mu k_\nu k_\lambda - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} k_\lambda + g_{\mu\lambda} k_\nu + g_{\nu\lambda} k_\mu) \frac{\Gamma\left(m - \frac{d}{2} - 1\right)}{(k^2 - l)^{m - \frac{d}{2} - 1}} \right\}. \quad (3.3.30)$$

В методе размерной регуляризации считается, что формулы (3.3.28), (3.3.29), (3.3.30) справедливы при произвольных  $m$ ,  $d$ , поскольку правые части этих формул имеют смысл при произвольных  $m$ ,  $d$ .

Так как после перенормировки полагается  $d = 4$ , то векторы  $k_\mu$ , входящие в эти формулы, считаются 4-мерными.

В конкретной фейнмановской диаграмме число  $m$  является целым. Однако формально его можно считать произвольным, но таким, чтобы интеграл (3.3.28) существовал при  $d = 4$ . При этом мы приходим к формулам (3.3.28) с  $d = 4$ , но с  $m$ , не совпадающим со значением  $m$ , соответствующим исходной фейнмановской диаграмме. На этом замечании основана идея аналитической регуляризации, в которой пропагаторы  $\mathcal{D}^c$ ,  $S^c$  заменяются функциями

$$\underline{\mathcal{D}}^c = \left(-\frac{1}{k^2}\right)^\lambda, \quad \underline{S}^c = (\hat{p} + m) \left(\frac{1}{m^2 - p^2}\right)^{\lambda'}, \quad (3.3.31)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda'$  — произвольные, но достаточно большие параметры, чтобы все фейнмановские интегралы, содержащие вместо функций  $\mathcal{D}^c$ ,  $S^c$  функции  $\underline{\mathcal{D}}^c$ ,  $\underline{S}^c$ , сходились. После перенормировки (физической регуляризации, см. раздел 3.3.4) величины  $\lambda$  и  $\lambda'$  должны быть положены равными единице. Приведем некоторые формулы, определяющие асимптотику  $\Gamma(x)$ -функции вблизи полюсов  $x = 0, -1, -2, \dots$ . Используя соотношение

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$$

и замечая, что  $\Gamma'(1) = -C$  ( $C = 0,577 \dots$  — постоянная Эйлера), получаем при  $x \ll 1$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - C + \dots, \quad \Gamma(-1 + x) = -\frac{1}{x} + \\ + C - 1 + \dots, \quad \Gamma(-2 + x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}C + \frac{3}{4} + \dots \quad (3.3.32)$$

Отсюда следует, что с точностью до членов, исчезающих при  $d \rightarrow 4$ , справедливы формулы

$$\begin{aligned} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) f(d) &= \frac{f(4)}{2 - \frac{d}{2}} - Cf(4) - 2 \frac{\partial f(4)}{\partial d} + \dots, \\ \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) f(d) &= -\frac{f(4)}{2 - \frac{d}{2}} + (C - 1)f(4) + \\ &\quad + 2 \frac{\partial f(4)}{\partial d} + \dots, \quad (3.3.33) \\ \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) f(d) &= \frac{1}{2} \frac{f(4)}{2 - \frac{d}{2}} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}C\right) f(4) - \\ &\quad - \frac{\partial f(4)}{\partial d} + \dots, \end{aligned}$$

где  $f(d)$  — функция регулярная вблизи точки  $d = 4$ .

При использовании метода размерной регуляризации предполагается, что матрицы Дирака удовлетворяют условиям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu},$$

где  $g_{00} = 1$ ,  $g_{ii} = -1$  ( $i = 1, \dots, d-1$ ) и  $g_{\mu\nu} = 0$  при  $\mu \neq \nu$  ( $d$  предполагается целым). Алгебра таких матриц может быть реализована в пространстве матриц размерности  $2^{d/2}$ . Замечая, что  $\text{Sp } I = 2^{d/2}$ , так же как и в разделе 2.4.1, легко получить следующие формулы, определяющие шпуры от произведения матриц  $\gamma_\mu$ :

$$\text{Sp } \gamma_\mu = 0, \quad \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu = 2^{d/2} g_{\mu\nu}, \quad (3.3.34)$$

$$\text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho = 2^{d/2} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}).$$

Далее, используя перестановочные соотношения для матриц  $\gamma_\mu$ , легко получить формулы

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu &= (2 - d) \gamma_\nu, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma^\mu = 4g_{\nu\lambda} + (d - 4) \gamma_\nu \gamma_\lambda, \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma^\mu &= -2\gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma_\nu + (4 - d) \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho, \dots \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

Подчеркнем, что после вычисления шпуров и проведения процедуры перенормировки должен быть осуществлен предельный переход  $d \rightarrow 4$ .

Заметим, наконец, что при использовании метода размерной регуляризации нужно учитывать тот факт, что заряд должен иметь вполне определенную размерность. Действительно, матричные элементы  $S$ -матрицы должны быть безразмерными, а следовательно, безразмерной должна быть величина  $\int d^d x jA$ .

Из коммутационных соотношений для операторов  $A$  и  $\psi$  следует, что размерности этих операторов равны  $[A] = \mu^{\frac{1}{2}(d-2)}$ ,  $[\psi] = \mu^{\frac{1}{2}(d-1)}$  (величина  $\mu$  имеет размерность импульса). Поэтому размерность тока  $j = e' \psi \gamma \psi$  равна  $[j] = [e'] \mu^{d-1}$  и, следовательно, величина  $e' \mu^{\frac{d}{2}-2}$  имеет размерность, совпадающую с размерностью интеграла  $\int d^d x jA$ . Так как этот интеграл безразмерен, то под зарядом  $e'$ , входящим в выражение для лагранжиана, мы должны понимать величину  $e' = e \mu^{2-d/2}$ , где  $e$  — безразмерный заряд электрона.

Важным свойством метода размерной регуляризации является то, что при его применении не нарушается свойство градиентной инвариантности. Аналогичным свойством обладает метод регуляризации с помощью вспомогательных масс (метод Паули — Вилларса), если применять его не к функциям распространения, а к фейнмановским диаграммам в целом.

**3.3.4. Перенормировка массы электрона.** Промежуточная регуляризация делает элементы матрицы рассеяния конечными. Однако при снятии промежуточной регуляризации, т. е. при  $M_i \rightarrow \infty$  (регуляризация Паули — Вилларса),  $d \rightarrow 4$  (размерная регуляризация), мы снова приходим к расходимостям, поэтому для окончательного устранения необходима еще добавочная физическая идея. Эта идея носит название перенормировки массы и заряда электрона.

При установлении основных уравнений квантовой электродинамики (см. § 3.1) мы исходили из уравнения Дирака для электрона, в которое входили две константы  $m$  и  $e$ . Эти константы мы интерпретировали как массу и заряд электрона. Однако необходимо внести уточнения в эти понятия. Действительно, по самой идее сходных классических уравнений Дирака и Максвелла  $m$  и  $e$  представляют собой массу и заряд «свободного» электрона, т. е. электрона, полностью изолированного от воздействий электромагнитного поля. Иными словами,  $m$  и  $e$  являются характеристиками некоторого гипотетического объекта (будем называть его «голым» электроном), не взаимодействующего с электромагнитным полем.

Взаимодействие между полями должно приводить к отличию энергетического спектра взаимодействующих полей от энергетического спектра свободных полей. Поэтому масса «голового» электрона должна отличаться от массы реального электрона, т. е. минимальной энергии однозарядового состояния взаимодействующих полей.

При построении  $S$ -матрицы в § 3.2 мы не учитывали тот факт, что масса реального электрона  $\underline{m}$  не совпадает с массой

Рис. 15.

«гололого» электрона  $m$ . Для учета этого обстоятельства необходимо в выражении для плотности энергии свободных частиц (см. (3.1.4)) добавить слагаемое  $\delta m \bar{\psi} \psi$ , где  $\delta m = \underline{m} - m$  (величина  $\delta m$  — электромагнитная масса электрона). В результате операторы полей  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  в представлении взаимодействия будут удовлетворять уравнениям Дирака с реальной массой электрона

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - \underline{m}) \psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu + \underline{m}) = 0.$$

Чтобы плотность полной энергии не изменилась, мы должны теперь под  $w_{int}(x)$  в теории  $S$ -матрицы подразумевать не выражение (3.2.1'), а выражение

$$w_{int}(x) = -e : \bar{\psi}(x) \hat{A}(x) \psi(x) : - \delta m : \bar{\psi}(x) \psi(x) :$$

Такая модификация  $S$ -матрицы приводит к тому, что пропагатор  $S^c(p)$ , фигурирующий в диаграммной технике, будет определяться не голой массой электрона, а реальной массой  $\underline{m}$

$$S^c(p) = (\underline{m} - \hat{p} - i0)^{-1},$$

а биспиноры  $u(\vec{p})$ ,  $\bar{u}(\vec{p})$  будут удовлетворять уравнениям Дирака

$$(\hat{p} - \underline{m}) u(p) = 0, \quad \bar{u}(p) (\hat{p} - \underline{m}) = 0,$$

в которых также фигурирует масса реального электрона. Кроме того, при построении теории возмущений наряду с трехлучевыми вершинами, связанными со слагаемым  $-e : \bar{\psi} \hat{A} \psi :$ , возникнут двухлучевые вершины, связанные со слагаемым  $-\delta m : \bar{\psi} \psi :$  (см. рис. 15).

Далее мы увидим, что и заряд гипотетического «гололого» электрона отличается от заряда реального электрона. Поэтому возникает задача выяснения связи между зарядом «гололого» электрона  $e$  и зарядом реального физического электрона, который мы будем обозначать через  $e$ .

Перейдем к нахождению  $\delta m$ . Учитывая, что электронная функция Грина  $G^{(e)}(p)$  (она зависит только от одного аргумента  $\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu$ ) должна иметь полюс при  $\hat{p} = \underline{m}$  (см. (3.2.41), где  $\underline{m}$  — масса реального электрона ( $\underline{m}$  — вещественная величина в силу стабильности электрона)), можно написать со-

отношение

$$G^{(e)}(p) \approx Z_2 S^c(p), \quad S^c(p) = \frac{1}{\underline{m} - \hat{p}}, \quad (3.3.36)$$

справедливое при  $p^2 - m^2 \approx 0$ . Константа  $Z_2$ , входящая в формулу (3.3.36), совпадает с постоянной  $Z_2$  в формуле (3.2.17). Действительно, согласно (3.2.45), (3.2.17),

$$\frac{1}{V 2p_0 V} \int \bar{Z}_2 u^\mu(p) e^{-ipx} = (\Psi_0, \psi(x) \Psi_1).$$

Так как вклад полюсного слагаемого в функцию

$$G^{(e)}(p) = \int d^4x e^{ip(x-x')} i (\Psi_0, T(\psi(x) \bar{\psi}(x') \Psi_0)$$

определяется вкладом в разложение

$$(\Psi_0, \psi(x) \bar{\psi}(x') \Psi_0) = \sum_n (\Psi_0, \psi(x) \Psi_n) (\Psi_n, \bar{\psi}(x') \Psi_0)$$

одночастичного состояния  $\Psi_1$  и, согласно (1.6.44),

$$\sum_i (\Phi_0, \psi(x) \Phi_1) (\Phi_1, \bar{\psi}(x') \Phi_0) = -i S^c(x-x'), \quad t > t',$$

где  $(\Phi_0, \psi(x) \Phi_1) = \frac{1}{V 2p_0 V} u e^{-ipx}$  (это следует из разложения свободной функции Грина;  $\Phi_0, \Phi_1$  — вакуумный и одноэлектронный векторы состояний свободных полей), мы приходим к заключению, что величина  $Z_2$  в формуле (3.2.17) совпадает с величиной  $Z_2$  в формуле (3.3.36).

Вернемся к формуле (3.3.36). Согласно (3.2.13), имеем

$$G^{(e)}(p) = -\hat{p} + \underline{m} - \Sigma(\hat{p}),$$

где  $\Sigma(\hat{p})$  — массовый оператор, который можно рассматривать как функцию матрицы  $\hat{p}$ . Поэтому при  $\hat{p} \approx \underline{m}$

$$G^{(e)}(p) = -\hat{p} + \underline{m} - \Sigma(\underline{m}) - (\hat{p} - \underline{m}) \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} + \dots$$

При сравнении этой формулы с (3.3.36) получаем

$$\Sigma(\underline{m}) = 0, \quad Z_2^{-1} = 1 + \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}}. \quad (3.3.37)$$

Величина  $\Sigma(\hat{p})$ , согласно (3.2.13), определяется формулой

$$\Sigma(\hat{p}) = \delta m + \bar{\Sigma}(\hat{p}),$$

где

$$\bar{\Sigma}(\hat{p}) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \gamma_\mu G^{(e)}(p-k) \gamma^\mu G^{(v)}(k), \quad \xi = 0.$$

Поэтому величина  $\delta m$ , как функция  $\underline{m}$  и  $e$ , определяется из уравнения

$$\delta m + \bar{\Sigma}(\underline{m}) = 0. \quad (3.3.38)$$

Напомним, что разность масс реального и гипотетического «голоого» электрона  $\delta m = \underline{m} - m$ , обусловленную взаимодействием электрона с вакуумом квантованных полей, мы называем электромагнитной массой электрона. Уравнение (3.3.38) и определяет перенормировку массы электрона.

**3.3.5. Физический заряд электрона и перенормировка функций Грина и вершинной функции.** В предыдущем разделе мы разъяснили, что благодаря взаимодействию электрона с электромагнитным полем масса электрона  $\underline{m}$  не совпадает с постоянной  $m$ , входящей в уравнения квантовой электродинамики в представлении Гейзенберга. Аналогичная ситуация имеет место и для постоянной  $e$ , которая в действительности не представляет собой заряда реального электрона  $\underline{e}$ .

Физический заряд электрона можно определить с помощью исследования рассеяния электромагнитных волн малой частоты  $\omega$  на покоящемся электроне. Этот процесс является чисто классическим, и никакие квантовые поправки не должны иметь места в предельном случае  $\omega \rightarrow 0$ . Поэтому естественно определить физический заряд электрона  $\underline{e}$  как коэффициент, входящий в формулу Томсона для эффективного сечения рассеяния фотона при  $\omega = 0$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{\underline{e}^2}{4\pi mc^2} \right)^2. \quad (3.3.39)$$

Точное решение этой задачи в квантовой электродинамике приводит к формуле Томсона со следующим значением заряда  $\underline{e}$ :

$$\underline{e} = Z_3^{1/2} e, \quad (3.3.40)$$

где  $Z_3$  — постоянная, входящая в формулы (3.2.17), (3.2.46).

В предыдущем разделе мы рассмотрели поведение функции Грина электрона на массовой оболочке, т. е. при  $p^2 = \underline{m}^2 = 0$ . Рассмотрим теперь поведение поперечной части фотонной функции Грина на массовой оболочке фотона, т. е. при  $k^2 = 0$ . Согласно формулам (3.2.14),

$$G^{(v)}(k) = -(k^2 + \Pi(k))^{-1}. \quad (3.3.41)$$

Функция  $G^{(v)}(k)$  должна иметь полюс при  $k^2 = 0$  (это соответствует тому, что масса фотона равна нулю), поэтому  $\Pi(0) = 0$  и поведение функции  $G^{(v)}(k)$  при малых  $k^2$  определяется

формулой

$$G^{(v)}(k) \approx Z_3 \mathcal{D}^c(k), \quad \mathcal{D}^c(k) = -\frac{1}{k^2}, \quad (3.3.42)$$

где

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi'(0), \quad \Pi'(0) \equiv \left. \frac{\partial \Pi(k)}{\partial k^2} \right|_{k^2=0} \quad (3.3.43)$$

(постоянная  $Z_3$  совпадает с постоянной  $Z_3$  в формуле (3.2.46) [22]). Заметим, что если пользоваться методом регуляризации, основанным на введении граничного импульса, либо методом Паули — Вилларса, в котором регуляризация функций пространства осуществляется с помощью введения вспомогательных масс, то поляризационный оператор  $\Pi(k)$  не будет обращаться в нуль при  $k^2 = 0$ , т. е. масса фотона не будет равна нулю; кроме того, не будет выполняться условие  $k^\nu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0$ , требуемое калибровочной инвариантностью. Если же пользоваться калибровочно-инвариантной регуляризацией Паули — Вилларса (в которой промежуточной регуляризации подвергаются не функции распространения, а матричные элементы, соответствующие различным процессам) или размерной регуляризацией, то автоматически будет выполняться условие  $k^\nu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0$  и масса фотона также будет равна нулю (см. раздел 3.3.8).

Введем теперь перенормированные функции Грина электрона и фотона

$$\underline{G}^{(e)}(p) = Z_2^{-1} G^{(e)}(p), \quad \underline{G}^{(v)}(k) = Z_3^{-1} G^{(v)}(k). \quad (3.3.44)$$

Эти функции вблизи массовой оболочки частиц, согласно (3.3.36), (3.3.42), ведут себя так же, как и функции Грина свободных частиц:

$$\underline{G}^{(e)}(p) \approx S^c(p), \quad \hat{p} \approx \underline{m}, \quad \underline{G}^{(v)}(k) \approx \mathcal{D}^c(k), \quad k^2 \approx 0. \quad (3.3.45)$$

Из формул (3.3.44), (3.2.12), (2.4.71) следует, что перенормированная функция Грина  $\underline{G}^{(e)}$  удовлетворяет уравнению Дайсона

$$\underline{G}^{(e)}(p) = S^c(p) + S^c(p) \underline{\Sigma}(p) \underline{G}^{(e)}(p), \quad (3.3.46)$$

где  $\underline{\Sigma}$  — перенормированный массовый оператор, определяемый формулой

$$\underline{\Sigma}(\hat{p}) = Z_2 \left\{ \underline{\Sigma}(\hat{p}) - (\hat{p} - \underline{m}) \frac{\partial \underline{\Sigma}(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} \right\}$$

или

$$\underline{\Sigma}(\hat{p}) = Z_2 \left\{ \underline{\Sigma}(\hat{p}) - \underline{\Sigma}(\underline{m}) - (\hat{p} - \underline{m}) \frac{\partial \underline{\Sigma}(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} \right\}. \quad (3.3.47)$$

Аналогичным образом перенормированная поперечная фотонная функция Грина  $\underline{G}^{(v)}$  ( $k$ ) удовлетворяет уравнению

$$\underline{G}^{(v)}(k) = \mathcal{D}^c(k) + \mathcal{D}^c(k) \underline{\Pi}(k) \underline{G}^{(v)}(k), \quad (3.3.48)$$

где  $\underline{\Pi}$  — перенормированный поляризационный оператор, определяемый, согласно (3.3.44), (3.2.14), формулой

$$\underline{\Pi}(k) = Z_3 \{ \Pi(k) - \Pi(0) - k^2 \Pi'(0) \} \quad (3.3.49)$$

(напомним, что  $\Pi(0) = 0$ ).

Так как основными величинами, с помощью которых по скелетным диаграммам определяются элементы матрицы рассеяния  $\mathcal{S}$ , являются функции Грина  $G$  и вершинная функция  $\Gamma$ , то необходимо ввести еще перенормированную вершинную функцию

$$\underline{\Gamma}_\mu = Z_1 \Gamma_\mu, \quad (3.3.50)$$

где константа  $Z_1$  находится из условия

$$\underline{\Gamma}_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} = \gamma_\mu. \quad (3.3.51)$$

При этом предполагается, что величина  $\Gamma_\mu(p, p)$  представлена в виде  $\Gamma_\mu(p, p) = \Sigma A(\hat{p}) \gamma_\mu B(\hat{p})$  (это всегда можно сделать, если заметить, что  $2p_\mu = \{\gamma_\mu, \hat{p}\}$ ), так что

$$\Gamma_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} = \gamma_\mu \Sigma A(\underline{m}) B(\underline{m}) = Z_1^{-1} \gamma_\mu \quad (3.3.52)$$

и, следовательно,  $Z_1^{-1} = \Sigma A(\underline{m}) B(\underline{m})$ .

Наряду с величиной  $\Lambda_\mu = \Gamma_\mu - \gamma_\mu$  введем перенормированную величину  $\underline{\Lambda}_\mu$

$$\underline{\Lambda}_\mu = \gamma_\mu + \Lambda_\mu. \quad (3.3.53)$$

Из этого определения и (3.3.50) следует, что

$$\underline{\Lambda}_\mu = Z_1 (\Lambda_\mu - (Z_1^{-1} - 1) \gamma_\mu).$$

Поэтому, согласно (3.3.51),

$$\underline{\Lambda}_\mu = Z_1 (\Lambda_\mu - \Lambda_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}}), \quad (3.3.54)$$

где

$$\Lambda_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} = (Z_1^{-1} - 1) \gamma_\mu. \quad (3.3.55)$$

Покажем, что из тождества Уорда следует, что

$$Z_1 = Z_2. \quad (3.3.56)$$

Действительно, из тождества (3.2.32) и определения (3.3.52) величин типа  $\Lambda_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}}$  имеем

$$\Lambda_\mu(p, p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} = \gamma_\mu \frac{\partial \underline{\Sigma}(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}}, \quad \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu} \right) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} = \gamma_\mu \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial \hat{p}} \right) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}}$$

и, следовательно,

$$Z_1^{-1} - 1 = \frac{\partial \underline{\Sigma}(\hat{p})}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}},$$

откуда в силу (3.3.37) и вытекает соотношение (3.3.56).

Из (3.3.54), (3.3.47), (3.3.56) следует, что перенормированные величины  $\underline{\Lambda}_\mu(p, p')$  и  $\underline{\Sigma}(p)$  удовлетворяют тождеству Уорда

$$\underline{\Lambda}_\mu(p, p) = \frac{\partial \underline{\Sigma}(p)}{\partial p^\mu}. \quad (3.3.57)$$

**3.3.6. Перенормировка элементов матрицы рассеяния и общих функций Грина.** Наша задача будет состоять теперь в том, чтобы построить теорию возмущений для различных квантово-электродинамических процессов, в которой параметром разложения будет величина  $\underline{e}$ , а не  $e$ .

В § 3.2 показано, что для учета высших приближений теории возмущений внутренним линиям и внутренним вершинам неприводимых диаграмм нужно сопоставлять функции Грина  $G^{(e)}(p)$ ,  $G^{(v)}(k)$  и вершинную функцию  $\Gamma_\mu(p_1, p_2)$ , а внешним линиям — амплитуды  $\underline{e}^{(\lambda)}$  и  $\underline{u}$ . Иными словами, если рассматривается некоторая неприводимая диаграмма  $n$ -го порядка, то соответствующий ей элемент  $\mathcal{S}$ -матрицы может быть схематически представлен в виде

$$\mathfrak{M} = e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^F e (G^{(v)})^F \underline{v} (\underline{u})^N e (e^{(\lambda)})^N \underline{v}, \quad (3.3.58)$$

где  $(K)^m$  служит для обозначения того, что величина типа  $K$  входит под знаком интеграла  $m$  раз.

Матричный элемент  $\mathfrak{M}$  выражен через перенормированные величины. Посмотрим теперь какой вид будет иметь  $\mathfrak{M}$ , если перейти к перенормированным величинам

$$G^{(e)} = Z_2 \underline{G}^{(e)}, \quad G^{(v)} = Z_3 \underline{G}^{(v)}, \quad \Gamma = Z_1^{-1} \underline{\Gamma}, \\ \underline{u} = Z_2^{-1/2} \underline{u}, \quad e^{(\lambda)} = Z_3^{-1/2} \underline{e}^{(\lambda)}, \quad e = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \underline{e} \quad (3.3.59)$$



$(e_{k\mu}^{(\lambda)}, \lambda = 1, 2$  — вектор поляризации реального фотона). Легко видеть, что

$$\mathfrak{M} = Z_2^{-n+N_e+1} Z_3^{-\frac{n}{2}+N_\nu+1} \cdot e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{F_e} \times \\ \times (G^{(\nu)})^{F_\nu} (u)^{N_e} (e^{(\lambda)})^{N_\nu}.$$

Учитывая (3.3.4), (3.3.5), получаем

$$\mathfrak{M} = e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{F_e} (G^{(\nu)})^{F_\nu} (u)^{N_e} (e^{(\lambda)})^{N_\nu}. \quad (3.3.60)$$

Таким образом, матричные элементы выражаются одинаково через неперенормированные  $(e, G^{(e)}, G^{(\lambda)}, \Gamma, u, e^{(\lambda)})$  и перенормированные  $(\underline{e}, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}, u, e^{(\lambda)})$  величины [22]. Это фундаментальное свойство  $S$ -матрицы связано с перенормируемостью квантовой электродинамики. Таким образом, при вычислении матричного элемента  $\mathfrak{M}$  мы можем пользоваться для скелетных диаграмм правилами Фейнмана, в которых используются перенормированный заряд электрона  $\underline{e}$  и перенормированные функции  $\underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}$ . Для последних в свою очередь должна быть построена теория возмущений по степеням  $\underline{e}$ .

Величины  $\underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}$  определяются, согласно (3.3.46), (3.3.48), величинами  $\underline{\Sigma}$  и  $\underline{\Pi}$ , которые в свою очередь (см. (3.3.47), (3.3.49)) связаны с неперенормированными величинами

$$\Sigma \equiv \Sigma(e, \Gamma, G^{(e)}, G^{(\nu)}) = e^2 \int \Gamma G^{(e)} \gamma G^{(\nu)} - \delta m, \quad (3.3.60')$$

$$\Pi \equiv \Pi(e, \Gamma, G^{(e)}) = e^2 \int \Gamma G^{(e)} \gamma G^{(e)}.$$

Используя формулы (3.3.44), (3.3.50), легко видеть, что

$$\Sigma = \Sigma(\underline{e}, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}),$$

$$\Pi = Z_3^{-1} Z_1 \Pi(\underline{e}, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}). \quad (3.3.61)$$

Аналогичным образом можно показать, что неперенормированная величина  $\Lambda$

$$\Lambda \equiv \Lambda(e, \Gamma, G^{(e)}, G^{(\nu)}) = \Sigma e^{n-1} \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{n-1} (G^{(\nu)})^{\frac{n-1}{2}}$$

(см. (3.3.59)) обладает следующим свойством:

$$\Lambda = Z_1^{-1} \Lambda(\underline{e}, \underline{\Gamma}, \underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}). \quad (3.3.62)$$

Используя формулы (3.3.61), (3.3.62), (3.3.46), (3.3.48) и определения величин  $Z_3$  и  $Z_1$

$$Z_3^{-1} = 1 + \Pi'(0), \quad Z_2^{-1} = Z_1^{-1} = 1 + \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\underline{m}}, \quad (3.3.62')$$

можно для величин  $\underline{G}^{(e)}, \underline{G}^{(\nu)}, \underline{\Gamma}$  получить разложения в ряд по степеням истинного заряда электрона  $\underline{e}$ . Таким образом, может быть построена теория возмущений, содержащая ряды по степеням заряда реального, а не «голового» электрона.

Рассмотрим еще вопрос о перенормировке общих функций Грина  $G^c(x_1, \dots, x_n)$ , введенных в разделе 1.6.5.

Ампутированная  $n$ -точечная функция Грина может быть символически представлена в виде

$$\Gamma(x_1, \dots, x_m) = \Sigma e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{F_e} (G^{(\nu)})^{F_\nu},$$

где суммирование распространяется на все неприводимые диаграммы, соответствующие рассматриваемой функции Грина. Используя формулы (3.3.44), а также формулы (3.3.50), получаем

$$\Gamma(x_1, \dots, x_m) = Z_2^{-\frac{N_e}{2}} Z_3^{-\frac{N_\nu}{2}} \underline{\Gamma}(x_1, \dots, x_m), \quad m = N_e + N_\nu, \quad (3.3.63)$$

где

$$\underline{\Gamma}(x_1, \dots, x_m) = \Sigma e^n \int (\Gamma)^n (G^{(e)})^{F_e} (G^{(\nu)})^{F_\nu} -$$

перенормированная ампутированная функция Грина.

Общая  $m$ -точечная функция Грина  $G^c(x_1, \dots, x_m)$  связана с ампутированной функцией Грина  $\Gamma(x_1, \dots, x_m)$  символическим соотношением

$$G^c = \Gamma (G^{(e)})^{N_e} (G^{(\nu)})^{N_\nu}.$$

Поэтому, учитывая (3.3.44), имеем

$$G^c(x_1, \dots, x_m) = Z_2^{\frac{N_e}{2}} Z_3^{\frac{N_\nu}{2}} \underline{G}^c(x_1, \dots, x_m), \quad (3.3.64)$$

где

$$\underline{G}^c = \underline{\Gamma} (G^{(e)})^{N_e} (G^{(\nu)})^{N_\nu} -$$

перенормированная  $m$ -точечная связанная функция Грина.

Из соотношений (3.3.64), (3.3.44) следует, что перенормированные функции Грина можно рассматривать как вакуумные средние произведений перенормированных операторов полей  $\underline{\Psi}, \underline{\bar{\Psi}}, \underline{A}$

$$\underline{G}(x_1, \dots, x_m) = (\Psi_0, T \{ \underline{\Psi}(x_1) \dots \underline{\bar{\Psi}}(x_1) \dots \underline{A}(x_m) \} \Psi_0), \quad (3.3.65)$$

которые связаны с неперенормированными операторами  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $A$  соотношениями

$$\psi(x) = \sqrt{Z_2} \underline{\psi}(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sqrt{Z_2} \underline{\bar{\psi}}(x), \quad A_\mu(x) = \sqrt{Z_3} \underline{A}_\mu(x). \quad (3.3.66)$$

Напомним, что перенормированный заряд  $e$  связан с перенормированным зарядом  $e$  формулой

$$e = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} \underline{e} = Z_3^{-1/2} \underline{e}. \quad (3.3.67)$$

Мы рассматривали перенормировку только поперечной функции Грина  $G^{(\nu)}$ , связанную с полной фотонной функцией Грина соотношением

$$G_{\mu\nu}^{(\nu)}(k) = -\xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} + G^{(\nu)}(k) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right). \quad (3.3.68)$$

При осуществлении связи неперенормированной функции Грина  $G_{\mu\nu}^{(\nu)}$  с перенормированной функцией Грина  $G_{\mu\nu}^{(\nu)}$  с помощью множителя  $Z_3$

$$G_{\mu\nu}^{(\nu)} = Z_3 G_{\mu\nu}^{(\nu)} \quad (3.3.69)$$

необходимо потребовать, согласно (3.3.68), чтобы перенормированная калибровочная постоянная  $\xi$ , определяющая перенормированную функцию Грина

$$\underline{G}_{\mu\nu}^{(\nu)} = -\xi \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} + \underline{G}^{(\nu)}(k) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (3.3.70)$$

была связана с калибровочной постоянной  $\xi$ , входящей в перенормированную функцию Грина, формулой

$$\xi = Z_3 \xi. \quad (3.3.71)$$

Таким образом, формула (3.3.64) в более развернутой записи имеет вид

$$G^c(x_1, \dots, x_m; \xi, e) = Z_2^{\frac{N_e}{2}} Z_3^{\frac{N_\gamma}{2}} \underline{G}^c(x_1, \dots, x_m; \xi, e). \quad (3.3.72)$$

**3.3.7. Отсутствие расходимостей в рядах теории возмущений по перенормированному заряду.** Мы покажем теперь, что ряды теории возмущений по перенормированному заряду электрона  $e$  для элементов матрицы рассеяния  $S$ , перенормированных функций Грина и перенормированной вершинной функции не содержат расходимостей после снятия промежуточной регуляризации, т. е. при  $M_i \rightarrow \infty$  (метод промежуточной регуляризации Паули — Вилларса) или  $d \rightarrow 4$  (метод размерной регуляризации) и др. Рассмотрим расходимости, соответствующие

щине неприводимым ВД. Простейшей неприводимой ВД второго порядка (см. рис. 5 (I)) соответствует функция

$$\Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2) = \int d^4 q R_\mu^{(2)}(p_1, p_2; q),$$

где

$$R_\mu^{(2)}(p_1, p_2; q) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \gamma_\lambda S^c(p_1 - q) \gamma_\mu S^c(p_2 - q) \gamma^\lambda \mathcal{D}^c(q),$$

$$S^c(p) = (\hat{p} + m) \left( \frac{1}{m^2 - p^2} - \frac{1}{M^2 - p^2} \right).$$

При этом учитывалось, что в нулевом приближении теории возмущений по перенормированному заряду функции  $\underline{\Gamma}_\mu$ ,  $\underline{G}^{(e)}$ ,  $\underline{G}^{(\nu)}$  совпадают с  $\gamma_\mu$ ,  $S^c(p)$ ,  $\mathcal{D}^c(q)$  (см. формулы (3.3.61), (3.3.62), (3.3.62')). Поэтому во втором приближении теории возмущений по  $e$  перенормированная вершинная функция  $\Lambda_\mu^{(2)}$  определяется, согласно (3.3.54), (3.3.62'), формулой

$$\underline{\Lambda}_\mu^{(2)}(p_1, p_2) = \{ \Lambda_\mu^{(2)}(p_1, p_2) - \Lambda_\mu^{(2)}(p, p) \Big|_{p=m} \}_{e \rightarrow \underline{e}} \quad (3.3.73)$$

Покажем, что функция  $\underline{\Lambda}_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$  не содержит расходимостей, т. е. что в выражении для  $\underline{\Lambda}_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$  можно произвести предельный переход  $M \rightarrow \infty$ .

Заметим с этой целью, что

$$R^{(2)}(p_1, p_2; q) - R^{(2)}(p_0, p_0; q) = (p_1 - p_0)_\lambda \frac{\partial R^{(2)}}{\partial p_{1\lambda}} \Big|_{p_1=p_1'} + (p_2 - p_0)_\lambda \frac{\partial R^{(2)}}{\partial p_{2\lambda}} \Big|_{p_2=p_2'}$$

где  $p_1'$  и  $p_2'$  — некоторые величины, находящиеся соответственно между  $p_1$  и  $p_0$  и  $p_2$  и  $p_0$ . При  $|q^2| \rightarrow \infty$  функция  $R^{(2)}$  ведёт себя, очевидно, как  $(q^2)^{-2}$  (при  $M = \infty$ ), а так как  $q$  входит в  $R^{(2)}$  только в комбинациях  $p_1 - q$  и  $p_2 - q$ , то  $\partial R^{(2)}/\partial p_{1\lambda}$  и  $\partial R^{(2)}/\partial p_{2\lambda}$  будут вести себя при  $|q^2| \rightarrow \infty$  (и при  $M = \infty$ ) не как  $(q^2)^{-2}$ , а как  $q^{-5}$ , благодаря чему интеграл, определяющий функцию  $\underline{\Lambda}_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$ , будет сходиться при  $M \rightarrow \infty$ .

Ясно, что приведенное доказательство сходимости интеграла, определяющего  $\underline{\Lambda}_\mu^{(2)}(p_1, p_2)$ , немедленно обобщается на произвольные неприводимые ВД  $\underline{\Lambda}_\mu^{(2n)}(p_1, p_2)$ .

Аналогично можно показать, что перенормированные массовые операторы  $\underline{\Sigma}^{(2)}$ ,  $\underline{\Pi}^{(2)}$  сходятся.

Мы видим, что процедура физической регуляризации заключается в вычитании из регуляризуемой функции несколь-

ких первых членов её разложения в ряд Тейлора по степеням  $\hat{p} - m$  или  $k^2$ . Количество отнимаемых членов должно быть минимальным для обеспечения сходимости остатка; тот факт, что остаток не будет содержать расходящихся при  $M \rightarrow \infty$ , следует из того, что регуляризуемая функция представляет собой интеграл, в котором в случае неприводимых диаграмм внешние импульсы входят в виде линейной комбинации с переменными интегрирования, и поэтому каждое дифференцирование увеличивает степень полинома, стоящего в знаменателе подынтегральной функции, на единицу. Физический смысл этой «вычитательной» процедуры заключается, как следует из предыдущего анализа, в том, что она эквивалентна перенормировке констант  $e$ - и  $m$ -заряда и массы электрона.

Мы показали, что процедура перенормировки массы и заряда электрона позволяет однозначно устранить расходящиеся в функциях Грина и вершинных функциях, соответствующих неприводимым диаграммам. Эта же процедура позволяет регуляризовать функции, соответствующие приводимым диаграммам, соответствующим произвольным физическим процессам. Чтобы убедиться в справедливости сделанного утверждения, заметим, что, согласно результатам раздела 3.3.8, функции  $\underline{\Pi}^{(2)}(k)$ ,  $\underline{\Lambda}^{(2)}(q, p_2)$ ,  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p)$  в области больших значений  $p$ ,  $k$ ,  $q$  ведут себя соответственно как

$$\underline{\Pi}^{(2)}(k) \sim k^2 \ln \frac{k^2}{m^2}, \quad \underline{\Lambda}^{(2)}(q, p_2) \sim \gamma_\mu \ln \frac{q^2}{m^2},$$

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p) \sim \hat{p} \ln \frac{p^2}{m^2}.$$

Полученные формулы показывают, что если перейти от приводимой диаграммы к скелетной диаграмме с эффективной вершиной и эффективными электронными и фотонной линиями, то соответствующие им величины в области больших импульсов запишутся в виде

$$\underline{\Gamma} \sim \ln \frac{q^2}{m^2}, \quad \underline{G}^{(e)} \sim \frac{1}{q} \ln \frac{q^2}{m}, \quad \underline{G}^{(v)} \sim \frac{1}{q^2} \ln \frac{q^2}{m^2}.$$

Поэтому интеграл, соответствующий рассматриваемой скелетной диаграмме, будет вести себя так же, как и соответствующий интеграл со свободными функциями Грина и вершинными функциями, т. е. будет сходиться.

Идея перенормировки была впервые высказана Крамерсом и Бете. Реализация этой идеи была выполнена в работах Швингера, Фейнмана и Томанага. Общее построение  $S$ -матрицы и классификация расходящихся принадлежит Дайсону. Общее

доказательство отсутствия расходящихся в перенормированных членах рядов теории возмущений принадлежит Боголюбову и Парасюку. Переход от перенормированной матрицы рассеяния к перенормированной, члены разложения которой по перенормированному заряду электрона свободны от бесконечностей, называется  $R$ -операцией [23].

**3.3.8. Функции Грина в низших порядках теории возмущений.** Перенормированная функция Грина фотона во втором приближении теории возмущений определяется перенормированным поляризационным оператором

$$\underline{\Pi}^{(2)}(k) = \Pi^{(2)}(k) - \Pi^{(2)}(0) - k^2 \Pi^{(2)'}(0), \quad \Pi(k) = \frac{1}{3} \Pi_\mu{}^\mu(k).$$

В методе размерной регуляризации поляризационный оператор второго порядка определяется формулой

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = -ie^2 \mu^{4-d} \text{Sp} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \gamma_\mu \frac{\hat{p} + m}{m^2 - p^2} \gamma_\nu \frac{(\hat{p} - \hat{k}) + m}{m^2 - (p - k)^2},$$

где шпур следует вычислять по формулам (3.3.34). Используя эти формулы, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = & -ie^2 \mu^{4-d} 2^{\frac{d}{2}} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \times \\ & \times \frac{g_{\mu\nu}(m^2 + pk - p^2) + 2p_\mu p_\nu - p_\mu k_\nu - p_\nu k_\mu}{(p^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (3.3.74)$$

Для нахождения появляющихся здесь интегралов воспользуемся формулой (3.3.24), а затем формулами (3.3.28) — (3.3.30). В результате при  $d \rightarrow 4$  получим

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{4-d} 2^{d/2}}{(p^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]} & \rightarrow \frac{i}{4\pi^2} \left\{ \eta - \int_0^1 dx \ln f(x) \right\}, \\ \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{4-d} 2^{d/2} p_\lambda}{(p^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]} & \rightarrow \frac{ik_\lambda}{4\pi^2} \left\{ \frac{\eta}{2} - \int_0^1 dx x \ln f(x) \right\}, \\ \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{4-d} 2^{d/2} p_\lambda p_\nu}{(p^2 - m^2)[(p - k)^2 - m^2]} & \rightarrow \frac{ik_\lambda k_\nu}{4\pi^2} \left\{ \frac{\eta}{3} - \int_0^1 dx x^2 \ln f(x) \right\} - \\ & - \frac{i}{8\pi^2} g_{\lambda\nu} \left\{ -(\eta + 1) \left( m^2 - \frac{k^2}{6} \right) + \mu^2 \int_0^1 dx f(x) \ln f(x) \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.75)$$

где

$$\eta = \frac{2}{4-d} - C + \ln 2\pi, \quad f(x) = \frac{1}{\mu^2} (m^2 - k^2 x(1-x))$$

(мы использовали при получении этих формул асимптотические соотношения (3.3.33)). Подставляя (3.3.75) в (3.3.74) и учитывая, что  $g_{\mu}^{\mu} = d$ , находим

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) \Pi^{(2)}(k), \quad (3.3.76)$$

$$\Pi^{(2)}(k) = \frac{e^2}{4\pi^2} k^2 \left\{ \frac{\eta}{3} - 2 \int_0^1 dx x(1-x) \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{m^2 - k^2 x(1-x)}{\mu^2} \right\}.$$

Поэтому

$$\Pi^{(2)}(k) = \Pi^{(2)}(0) + k^2 \Pi^{(2)'}(0) + \underline{\Pi}^{(2)}(k), \quad (3.3.77)$$

где

$$\Pi^{(2)}(0) = 0, \quad \Pi^{(2)'}(0) = \frac{e^2}{12\pi^2} \left( \eta - \frac{1}{2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right)$$

и перенормированный поляризационный оператор  $\underline{\Pi}^{(2)}(k)$  определяется формулой

$$\underline{\Pi}^{(2)}(k) = -\frac{e^2}{2\pi^2} k^2 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left( 1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2} \right). \quad (3.3.78)$$

Мы видим, что благодаря множителю  $g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}$  перенормированное выражение  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$  является калибровочно инвариантным ( $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}k^{\nu} = 0$ ), причем  $\Pi^{(2)}(0) = 0$  (см. раздел 3.3.5; этими же свойствами обладает перенормированный поляризационный оператор).

Формулу (3.3.78) можно, очевидно, переписать в виде

$$\underline{\Pi}^{(2)}(k) = \frac{e^2}{96\pi^2} (k^2)^2 \int_0^1 dv \frac{v^2 \left( 1 - \frac{v^2}{3} \right)}{m^2 - \frac{1-v^2}{4} k^2} \quad (3.3.79)$$

( $x = \frac{1+v}{2}$ ; как мы уже говорили под величиной  $\underline{m}^2$  необходимо подразумевать  $\underline{m}^2 - i0$ ). Из этой формулы видно, что

$$\text{Im} \underline{\Pi}^{(2)}(k) = \frac{e^2}{48\pi} \theta(k^2 - 4\underline{m}^2) k^2 \left( 1 - \frac{4\underline{m}^2}{k^2} \right)^{1/2} \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{2\underline{m}^2}{k^2} \right), \quad (3.3.79')$$

поэтому функция  $\underline{\Pi}^{(2)}(k)$  является вещественной для пространственно-подобных  $k_{\mu}$ .

Величина  $Z_3$ , согласно (3.3.62'), во втором приближении теории возмущений определяется формулой

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \left( \eta - \frac{1}{2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right). \quad (3.3.80)$$

В методе регуляризации Паули — Вилларса величина  $Z_3$  не зависит от  $\mu$ . Поэтому расходящаяся (при  $d \rightarrow 4$ ) величина  $\eta$  должна быть заменена на

$$\eta \rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2},$$

так что

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mathcal{M}}{\underline{m}}. \quad (3.3.80')$$

Рассмотрим теперь массовый оператор электрона  $\Sigma^{(2)}$  во втором приближении теории возмущений. Перенормированная функция Грина электрона определяется перенормированным массовым оператором

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=\underline{m}} - (\hat{p} - \underline{m}) \frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=\underline{m}}.$$

В методе размерной регуляризации массовый оператор второго порядка определяется формулой

$$\Sigma^{(2)}(p; \xi) = \frac{ic^2}{(2\pi)^d} \mu^{4-d} \int d^d k \gamma^{\mu} S^c(p+k) \gamma^{\nu} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k, \xi), \quad (3.3.81)$$

где функция  $S^c(p)$  определяется формулой (2.4.71), а

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k, \xi) = -\frac{1}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2 + i0} \right).$$

Для устранения инфракрасной расходимости в  $\underline{\Sigma}$  [24] необходимо ввести фиктивную массу фотона  $\lambda$  в фотонном пропагаторе

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) = \frac{-1}{k^2 - \lambda^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2 - \lambda^2 \xi + i0} \right) \quad (3.3.82)$$

или

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) = -\frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{\lambda^2}}{k^2 - \lambda^2 + i0} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{\lambda^2} \frac{1}{k^2 - \lambda^2 \xi + i0}.$$

Первое слагаемое в этом выражении соответствует пропагатору векторной частицы с «реальной» массой  $\lambda$ , а второе слагае-

мое — пропагатору скалярного поля (возникающего при представлении продольной части потенциала  $A_{\mu}^{(l)}(x)$  в виде  $A_{\mu}^{(l)}(x) = \partial_{\mu}\Phi(x)$ ) с фиктивной массой  $\lambda \sqrt{\xi}$ ; последнее слабоем обеспечивает убывание пропагатора  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi)$  в области больших  $k$  (подробно см. раздел 6.4.1). Мы не будем вычислять величину  $\Sigma^{(2)}(p; \xi)$ , а приведем лишь окончательный результат [24]:

$$\Sigma^{(1)}(p, \xi) = \Sigma^{(2)}(p) + \Sigma_{\xi}^{(2)}(p), \quad \Sigma^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p, 1),$$

где  $\Sigma^{(2)}(p)$  — массовый оператор в фейнмановской калибровке  $\Sigma^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p, 1)$ , определяемый формулой

$$\Sigma^{(2)}(p)^{(2)} = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \eta (\hat{p}(1-x) - 2\underline{m}) - \hat{p}(1-x) + \underline{m} - (\hat{p}(1-x) - 2\underline{m}) \ln \frac{m^2 x + \lambda^2(1-x) - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right\}, \quad (3.3.83)$$

и  $\Sigma_{\xi}^{(2)}(p)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \Sigma_{\xi}^{(2)}(p) = & \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ (\xi - 1) \left( \eta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \right) + (1 - \xi) \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} - \right. \\ & \left. - \xi \ln \xi \right\} (\hat{p} - \underline{m}) + \frac{e^2}{16\pi^2} (1 - \xi) \left\{ \hat{p} \frac{p^2 - m^2}{p^2} \left( 1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{m^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{\underline{m}^2} \right) \right) - (\hat{p} - \underline{m}) \left( 1 - \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{\underline{m}^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} + \frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} \right) \right\}, \quad (3.3.83') \end{aligned}$$

где

$$\eta = \frac{2}{4-d} - C + \ln 4\pi.$$

Согласно (3.3.47), перенормированный массовый оператор определяется формулой  $\underline{\Sigma}^{(2)}(p, \xi) = \underline{\Sigma}^{(2)}(p) + \underline{\Sigma}_{\xi}^{(2)}(p)$

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}^{(2)}(p) = & \frac{e^2}{8\pi^2} \left\{ 2\underline{m} \left[ \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{\underline{m}^2} \right) - \frac{5}{8} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \hat{p} \left[ \frac{3}{2} + \frac{m^2}{p^2} + \frac{m^4 - (p^2)^2}{(p^2)^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{\underline{m}^2} \right) \right] - \right. \\ & \left. - (\hat{p} - \underline{m}) \left( \frac{9}{4} + \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} \right) \right\}, \quad (3.3.84) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma}_{\xi}^{(2)}(p) = & (1 - \xi) \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \hat{p} \frac{p^2 - m^2}{p^2} \left( 1 + \frac{m^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{\underline{m}^2} \right) \right) - \right. \\ & \left. - (\hat{p} - \underline{m}) \left( 1 - \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{\underline{m}^2} \right) + \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\xi \ln \xi}{\xi - 1} \right) \right\}, \quad \underline{m}^2 \gg \lambda^2, \quad |p^2 - \underline{m}^2| \gg \lambda^2. \end{aligned}$$

Электромагнитная масса электрона  $\delta m$  определяется формулой (3.3.38), и, следовательно, в приближении  $e^2$  она равна

$$\delta m^{(2)} = -\Sigma^{(2)}(\underline{m}) = \frac{me^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{3}{2} \eta - \frac{3}{2} \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 2 \right\}. \quad (3.3.85)$$

Перенормировочная постоянная  $Z_2$  в приближении  $e^2$  определяется, согласно (3.3.37), формулой

$$\begin{aligned} Z_2(\xi) = & 1 - \Sigma^{(2)'}(\underline{m}) = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} \left\{ \xi \left( \eta + \frac{1}{2} - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right) + \right. \\ & \left. + (3 - \xi) \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} + \frac{7}{2} - \xi \ln \xi \right\}. \quad (3.3.86) \end{aligned}$$

В методе регуляризации Паули — Вилларса величина  $Z_2$  не зависит от  $\mu$ . Поэтому расходящаяся (при  $d \rightarrow 4$ ) величина  $\eta$  в методе Паули — Вилларса должна быть заменена на

$$\eta \rightarrow \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2} - \frac{1}{2},$$

так что

$$\begin{aligned} \delta m^{(2)} = & \frac{m^2}{8\pi^2} \left( \frac{3}{2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + \frac{5}{4} \right), \quad Z_2(\xi) = 1 - \\ & - \frac{e^2}{8\pi^2} \left( \xi \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} + (3 - \xi) \ln \frac{\lambda^2}{\underline{m}^2} + \frac{7}{2} - \xi \ln \xi \right). \quad (3.3.86') \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что величина  $Z_2(\xi)$  не будет содержать ультрафиолетовых расходимостей, если  $\xi = 0$  (калибровка Ландау) и не будет содержать инфракрасных расходимостей, если  $\xi = 3$ .

### э 3.4. Ренормализационная группа асимптотики функций Грина

3.4.1. Структура фотонной функции Грина в области больших импульсов. Ранее было показано, что матричный элемент, соответствующий какому-либо процессу, с учетом высших приближений теории возмущений сохраняет свой вид при пере-

ходе от неперенормированных к перенормированным величинам

$$e \rightarrow \underline{e} = Z^{1/2} e, \quad u \rightarrow \underline{u} = Z_1^{-1/2} u, \quad e^{(\lambda)} \rightarrow \underline{e}^{(\lambda)} = Z^{-1/2} e^{(\lambda)},$$

$$G^{(e)} \rightarrow \underline{G}^{(e)} = Z_1^{-1} G^{(e)}, \quad G^{(v)} \rightarrow \underline{G}^{(v)} = Z^{-1} G^{(v)}, \quad \Gamma \rightarrow \underline{\Gamma} = Z_1 \Gamma$$

( $Z \equiv Z_3, Z_2 = Z_1$ ). Это важнейшее свойство электромагнитного взаимодействия электронов и фотонов, называемое перенормируемостью, было использовано нами в § 3.3 для установления правил регуляризации различных квантово-электродинамических величин.

Из перенормируемости вытекает также существование некоторой группы преобразований, по отношению к которым инвариантны матричные элементы. Именно, если обозначить перенормированный заряд и перенормированные функции Грина и вершинную функцию соответственно через  $e_1, G_1^{(e)}, G_1^{(v)}, \Gamma_1$  и перейти от этих величин к величинам  $e_2, G_2^{(e)}, G_2^{(v)}, \Gamma_2$ , связанным с  $e_1, G_1^{(e)}, G_1^{(v)}, \Gamma_1$  соотношениями

$$e_2 = \sqrt{Z'} e_1, \quad u_2 = (\sqrt{Z_1'})^{-1} u_1, \quad e_2^{(\lambda)} = (\sqrt{Z'})^{-1} e_1^{(\lambda)},$$

$$G_2^{(e)} = Z_1'^{-1} G_1^{(e)}, \quad G_2^{(v)} = Z'^{-1} G_1^{(v)}, \quad \Gamma_2 = Z_1' \Gamma_1,$$

где  $Z'$  и  $Z_1'$  — произвольные величины, то матричные элементы  $\mathfrak{M}$ , вычисленные с помощью первой и второй систем величин, будут одинаковы:  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$ . Такие преобразования образуют, очевидно, группу, называемую ренормализационной группой\*. Покажем, что, используя свойство перенормируемости, можно выяснить структуру и получить асимптотические представления функций Грина в области больших импульсов [26]. Рассмотрим прежде всего поперечную часть фотонной функции Грина. Предполагая выполненную перенормировку массы электрона, запишем  $G^{(v)}(k)$  в виде

$$G^{(v)}(k) = \mathcal{D}^c(k) d(k),$$

где  $d(k)$  — некоторая функция квадрата 4-импульса  $k^2$ , граничного импульса  $M$  и неперенормированного заряда электрона,

$$d \equiv d\left(\frac{M^2}{k^2}, \frac{m^2}{k^2}, e^2\right).$$

Перенормированная функция  $d$ , обозначаемая через  $\underline{d}$  и являющаяся функцией  $\frac{k^2}{m^2}$  и  $e^2$

$$\underline{d} \equiv \underline{d}\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right),$$

\* Впервые существование ренормализационной группы было установлено Петерманом и Штюкельбергом [25].

связана, согласно (3.3.44), с неперенормированной функцией  $d$  соотношением

$$d\left(\frac{M^2}{k^2}, \frac{m^2}{k^2}, e^2\right) = Z d\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right), \quad (3.3.87)$$

где  $Z$  является некоторой функцией  $\frac{M^2}{m^2}$  и  $e^2$ ,  $Z = Z\left(\frac{M^2}{m^2}, e^2\right)$  и  $e^2$  и  $\underline{e}^2$  связаны между собой соотношением  $e^2 = Z^{-1} \underline{e}^2$ . Отсюда следует, что

$$e^2 d\left(\frac{M^2}{k^2}, \frac{m^2}{k^2}, e^2\right) = \underline{e}^2 \underline{d}\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right). \quad (3.3.87')$$

Как видно из структуры выражений, сопоставляемых различным фейнмановским диаграммам, они допускают предельный переход  $\underline{m} \rightarrow 0$  (речь идет о неперенормированных выражениях). Предельный переход к нулевой массе возможен и после перенормировки массы (но не после перенормировки заряда!). Этот предельный переход соответствует рассмотрению области больших импульсов,  $k^2 \gg m^2$ . Поэтому, интересуясь поведением функций Грина в области больших импульсов, мы можем в неперенормированной (по заряду) функции  $d$  вычеркнуть второй из аргументов:

$$e^2 d\left(\frac{M^2}{k^2}, 0, e^2\right) = \underline{e}^2 \underline{d}\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right) \equiv e_{inv}^2\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right). \quad (3.3.88)$$

Так как в силу условия нормировки  $\underline{d}(0, e^2) = 1$ , то  $e_{inv}^2(0, e^2) = e^2$ . Величина  $e_{inv}\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right)$  носит название инвариантного заряда.

Заметим, что

$$\underline{m}^2 \left( \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} e^2 d\left(\frac{M^2}{k^2}, 0, e^2\right) \right)_{e^2} = 0.$$

Поэтому в асимптотической области  $k^2 \gg \underline{m}^2$  инвариантный заряд удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + \underline{e}^2 \beta(\underline{e}^2) \frac{\partial}{\partial \underline{e}^2} \right\} \underline{e}^2 \underline{d}\left(\frac{k^2}{m^2}, e^2\right) = 0, \quad (3.3.89)$$

где

$$\beta(\underline{e}^2) = \underline{m}^2 \left( \frac{\partial \ln e^2}{\partial \underline{m}^2} \right)_{e^2}. \quad (3.3.90)$$

Заметим, что поскольку  $\underline{e}^2 d$  не зависит от  $M^2$ , то и функция  $\beta(\underline{e}^2)$  не зависит от  $M^2/m^2$ , т. е. является функцией одного аргумента  $\underline{e}^2$ .

Уравнение (3.3.89) называется уравнением ренормализационной группы [27]. Подчеркнем, что это уравнение является следствием перенормируемости теории (независимости  $\underline{d}$  от  $M$ ) и того обстоятельства, что неперенормированная величина  $d$  имеет предел при  $m \rightarrow 0$ .

Из формул (3.3.90), (3.3.67) следует, что перенормировочная постоянная  $Z$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + \beta(\underline{e}^2) \left( \underline{e}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{e}^2} - 1 \right) \right\} Z \left( \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) = 0. \quad (3.3.91)$$

Общее решение уравнений (3.3.89) и (3.3.91) имеет, очевидно, следующий вид:

$$\underline{e}^2 \underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) = \Phi \left( \varphi(\underline{e}^2) \frac{k^2}{\underline{m}^2} \right), \quad \varphi(\underline{e}^2) = \exp \int \frac{dy}{y\beta(y)} \equiv e^x, \\ Z \left( \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) = \underline{e}^2 C \left( \varphi(\underline{e}^2) \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2} \right), \quad (3.3.92)$$

где  $\Phi$  и  $G$  — некоторые неизвестные функции одного аргумента. Эти формулы удобно переписать в виде

$$\underline{e}^2 \underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) = F(v + \chi(\underline{e}^2)), \quad (3.3.93)$$

$$Z \left( \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) = \underline{e}^2 Q(v_{\mathcal{M}} + \chi(\underline{e}^2)),$$

где  $v = \ln \left( -\frac{k^2}{\underline{m}^2} \right)$ ,  $v_{\mathcal{M}} = \ln \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}$ ,  $\chi(x) = \ln \varphi(x)$ , а  $F$  и  $Q$  также некоторые неизвестные функции одного аргумента.

Мы видим, что в области больших импульсов величина  $\underline{e}^2 \underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right)$  является функцией не двух, а только одного аргумента  $\varphi(\underline{e}^2) \frac{k^2}{\underline{m}^2}$ . Отсюда можно получить важное следствие, касающееся эффективной плотности заряда в облаке электронно-позитронных пар, окружающих в вакууме какой-либо пробный заряд. Внешний потенциал  $A_{\mu}^{(e)}(x)$  и порождающий его ток  $j_{\mu}(x)$  связаны между собой в вакууме соотношением [3]

$$A_{\mu}^{(e)}(x) = - \int d^4 x' \underline{G}_{\mu\nu}^{(v)}(x-x') j^{\nu}(x').$$

В случае покоящегося пробного заряда  $j^{\nu}(x) = Q \delta_0^{\nu} \delta(x)$  и, следовательно, потенциал, порождаемый зарядом  $Q$  в вакууме, имеет вид

$$A_0^{(e)}(x) = -Q \int_{-\infty}^{\infty} dt \underline{G}_0^{(v)}(x)$$

или

$$A_0^{(e)}(x) = -\frac{Q}{(2\pi)^3} \int d^3 k \underline{G}_0^{(v)}(k) |_{k_0=0} e^{ikx},$$

откуда следует, что плотность заряда в облаке электронно-позитронных пар, окружающих пробный заряд, определяется формулой

$$\rho(x) = -\Delta A_0^{(e)}(x) = \frac{Q}{(2\pi)^3} \int d^3 k \underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right) e^{ikx}. \quad (3.3.94)$$

Так как  $\underline{d}(0, \underline{e}^2) = 1$ , то  $\int d^3 x \rho(x) = Q$ .

Мы видим, что функция  $\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right)$  имеет наглядный физический смысл: с точностью до постоянного множителя она представляет собой компоненту Фурье плотности заряда в облаке пар, окружающих «точечный» заряд  $Q$ . Иначе можно сказать, что  $\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right)$  представляет собой формфактор «точечного» заряда.

На очень малых расстояниях от пробного заряда ( $|x| \ll \ll \hbar/mc$ ) в (3.3.94) можно подставить вместо функции  $\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2 \right)$  её асимптотическое представление (3.3.92)

$$\rho(x) = \frac{Q}{(2\pi)^3 \underline{e}^2} \int d^3 k e^{ikx} \Phi \left( -\varphi(\underline{e}^2) \frac{k^2}{\underline{m}^2} \right).$$

Заменяя здесь переменную  $\frac{k}{\underline{m}} \sqrt{\varphi(\underline{e}^2)} = k'$  и вводя обозначение

$$f(x) = \int d^3 k' \Phi(-k'^2) e^{ik'x},$$

получаем

$$\rho(x) \cong f \left( x \frac{\underline{m}}{\sqrt{\varphi(\underline{e}^2)}} \right). \quad (3.3.95)$$

Эта формула показывает, что на расстояниях, меньших чем  $\hbar/mc$ , форма распределения заряда не зависит от постоянной связи  $\underline{e}^2$ , которая входит лишь в масштабный множитель  $\varphi(\underline{e}^2)$ .

Поведение функции  $\Phi(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  тесно связано с величиной заряда «голого» электрона или, как мы будем говорить, первичного заряда  $e$ . Если  $\Phi(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ , то сингулярность в центре распределения заряда будет более сильной, чем  $\delta$ -образная, и, следовательно, первичный заряд будет бесконечным,  $e = \infty$ . Если же при  $x \rightarrow \infty$  функция  $\Phi(x)$  стремится к конечному пределу  $\Phi(\infty)$ , то и первичный заряд будет конечным, причем его величина, определяемая этим пределом, не будет зависеть от  $\underline{e}$ .

Подчеркнём, что все эти выводы, так же как и соотношение (3.3.92), определяющее структуру фотонной функции Грина в области больших импульсов или малых расстояний, основаны только на свойстве перенормируемости и существовании у перенормированных матричных элементов конечных пределов при  $m \rightarrow 0$ . Эти результаты были получены Гелл — Маном и Лоу [26]. Исследование различных асимптотик функций Грина, как ультрафиолетовых, так и инфракрасных, на основе уравнений ренормализационной группы в рамках перенормированной теории (с конечными перенормировочными постоянными  $Z_1, Z_2, Z_3$ ) было выполнено Н. Н. Боголюбовым, А. А. Логуновым, Д. В. Ширковым [27—29].

**3.4.2. Структура электронной функции Грина в области больших импульсов.** Перейдём теперь к определению структуры электронной функции Грина в области больших импульсов,  $-p^2 \gg \underline{m}^2$ . С этой целью представим функцию Грина электрона, перенормированную по массе (но не перенормированную по заряду), в виде

$$G^{(e)}(p)^{-1} = -\hat{p}A\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2}, e^2; \xi\right) + mA'\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2}, e^2; \xi\right), \quad (3.3.96)$$

где  $A$  и  $A'$  — некоторые скалярные функции трёх аргументов:  $\mathcal{M}^2/p^2, m^2/p^2, e^2$ . Кроме того, в отличие от фотонной функции Грина, электронная функция Грина зависит от калибровочного параметра  $\xi$  или параметра  $\zeta \equiv e^2\xi$ . Такой выбор аргумента  $\zeta$  удобен по той причине, что перенормированная калибровочная постоянная  $\xi$  связана с  $\xi$  соотношением  $\xi = Z\xi$ , и, следовательно,  $\zeta = e^2\xi$ , так что  $\underline{\zeta} = \zeta$  (см. раздел 3.4.6). Перед функцией  $A'$  мы ввели массу голого электрона, а не перенормированную массу  $m$ , поскольку при этом функция  $A'$  будет иметь конечный предел при  $\underline{m} \rightarrow 0$ . Это следует из того, что перенормированные ни по заряду, ни по массе функции  $A$  и  $A'$  имеют, как следует из теории возмущений, конечный предел при  $m \rightarrow 0$ . С другой стороны, в теории возмущений величины  $m$  и  $\underline{m}$  связаны между собой соотношением  $m = \underline{m}\left(1 + e^2 \ln \frac{\mathcal{M}}{\underline{m}} + \dots\right)$ . Поэтому если  $\underline{m} \rightarrow 0$ , то и  $m \rightarrow 0$ , следовательно, обе функции  $A\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \xi\right), A'\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \frac{m^2}{p^2}, e^2; \xi\right)$  должны иметь конечный предел при  $\underline{m} \rightarrow 0$  (если бы в формуле для  $G^{(e)-1}$  перед функцией  $A'$  мы поставили перенормированную

массу электрона  $\underline{m}$ , то это утверждение было бы неверно, так как отношение  $\underline{m}/m$  не имеет предела при  $\underline{m} \rightarrow 0$ ).

Перенормированную функцию Грина электрона запишем в виде

$$\underline{G}^{(e)}(p)^{-1} = -\hat{p}\underline{A}\left(\frac{p^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \underline{\zeta}\right) + \underline{m}\underline{A}'\left(\frac{p^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \underline{\zeta}\right), \quad (3.3.97)$$

где  $\underline{A}$  и  $\underline{A}'$  — некоторые функции  $p^2/\underline{m}^2, \underline{e}^2, \underline{\zeta}$ . Так как, согласно (3.3.44),

$$\underline{G}^{(e)-1} = Z_1\left(\frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \underline{\zeta}\right) G^{(e)-1},$$

где  $Z_1$  — некоторая функция  $\frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2, \underline{\zeta}$  (см. раздел 3.3.5), то

$$\underline{A} = Z_1 A, \quad \underline{A}' = Z_1 A', \quad (3.3.98)$$

где  $Z_1' = Z_1 m/\underline{m}$ .

Рассмотрим теперь асимптотическую область  $-p^2 \gg \underline{m}^2$ . В этом случае, как мы говорили ранее, в функциях  $A$  и  $A'$  можно положить второй аргумент равным нулю:

$$A\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, 0, e^2; \xi\right) \equiv A\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \xi\right), \quad A'\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, 0, e^2; \xi\right) \equiv A'\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \xi\right).$$

В результате соотношения (3.3.98) примут вид

$$\underline{A}\left(\frac{p^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \underline{\zeta}\right) = Z_1\left(\frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \underline{\zeta}\right) A\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \xi\right),$$

$$\underline{A}'\left(\frac{p^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \underline{\zeta}\right) = Z_1'\left(\frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \underline{\zeta}\right) A'\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, e^2; \xi\right), \quad -p^2 \gg \underline{m}^2,$$

причем, согласно (3.3.67), величины  $\underline{e}^2$  и  $e^2$  связаны между собой соотношением

$$\underline{e}^2 = e^2 Z\left(\frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2}, e^2\right).$$

Замечая, что

$$\underline{m}^2 \left(\frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} \ln A\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \underline{e}^2; \underline{\zeta}\right)\right)_{\underline{e}^2, \underline{\zeta}} = \underline{m}^2 \left(\frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} \times \times \ln A'\left(\frac{\mathcal{M}^2}{p^2}, \underline{e}^2; \underline{\zeta}\right)\right)_{\underline{e}^2, \underline{\zeta}} = 0,$$



имеем

$$\left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + \underline{e}^2 \beta(\underline{e}^2) \frac{\partial}{\partial \underline{e}^2} + \gamma(\underline{e}^2, \zeta) \right\} \underline{A} \left( \frac{\underline{p}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) = 0,$$

$$\left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + \underline{e}^2 \beta(\underline{e}^2) \frac{\partial}{\partial \underline{e}^2} + \gamma'(\underline{e}^2, \zeta) \right\} \underline{A}' \left( \frac{\underline{p}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) = 0, \quad (3.3.98)$$

где

$$\gamma(\underline{e}^2, \zeta) = - \frac{\underline{m}^2}{\underline{Z}_1} \left( \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} \underline{Z}_1 \left( \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) \right)_{\underline{e}^2, \zeta}, \quad (3.3.99)$$

$$\gamma'(\underline{e}^2, \zeta) = - \frac{\underline{m}^2}{\underline{Z}'_1} \left( \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} \underline{Z}'_1 \left( \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) \right)_{\underline{e}^2, \zeta}$$

и  $\beta(\underline{e}^2)$  определяется формулой (3.3.90). Так как величины  $\underline{A}$ ,  $\underline{A}'$  не зависят от  $\underline{M}$ , то  $\gamma$  и  $\gamma'$  не зависят от  $\underline{M}^2/\underline{m}^2$ . Последние две формулы можно трактовать как уравнения для определения величин  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}'_1$

$$\left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + \underline{e}^2 \beta(\underline{e}^2) \frac{\partial}{\partial \underline{e}^2} + \gamma(\underline{e}^2, \zeta) \right\} \underline{Z}_1 \left( \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) = 0,$$

$$\left\{ \underline{m}^2 \frac{\partial}{\partial \underline{m}^2} + \underline{e}^2 \beta(\underline{e}^2) \frac{\partial}{\partial \underline{e}^2} + \gamma'(\underline{e}^2, \zeta) \right\} \underline{Z}'_1 \left( \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) = 0. \quad (3.3.100)$$

Мы видим, что в уравнения для  $\underline{A}$ ,  $\underline{A}'$ ,  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}'_1$ , кроме уже введенной функции  $\beta(\underline{e}^2)$ , входят две новые неизвестные функции:  $\gamma$ ,  $\gamma'$ , зависящие от двух аргументов  $\underline{e}^2$ ,  $\zeta$ . Представляя функции  $\underline{A}$ ,  $\underline{Z}_1$  в виде

$$\underline{A} = \underline{B} \exp \left\{ - \int^{\underline{e}^2} \frac{\gamma(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy \right\},$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{D}_1 \exp \left\{ - \int^{\underline{e}^2} \frac{\gamma(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy \right\},$$

получаем для функций  $\underline{B}$ ,  $\underline{D}_1$  уравнения, совпадающие с уравнением (3.3.89) для функции  $\underline{e}^2 \underline{d}$ . Поэтому

$$\underline{A} \left( \frac{\underline{p}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) = Q \left( \ln \frac{-\underline{p}^2}{\underline{m}^2} + \chi(\underline{e}^2); \zeta \right) \times$$

$$\times \exp \left( - \int^{\underline{e}^2} \frac{\gamma(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy \right),$$

$$\underline{Z}_1 \left( \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) = \mathcal{P} \left( \ln \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2} + \chi(\underline{e}^2); \zeta \right) \times$$

$$\times \exp \left( - \int^{\underline{e}^2} \frac{\gamma(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy \right), \quad (3.3.101)$$

где  $Q(\mathcal{P})$  — функция двух аргументов:  $\chi(\underline{e}^2) + \ln \frac{\underline{p}^2}{\underline{m}^2}$  ( $\chi(\underline{e}^2) + \ln \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}$ ) и  $\zeta$ . Аналогичные соотношения справедливы для функций  $\underline{A}'$ ,  $\underline{Z}'_1$ :

$$\underline{A}' \left( \frac{\underline{p}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) = Q' \left( \ln \frac{-\underline{p}^2}{\underline{m}^2} + \chi(\underline{e}^2); \zeta \right) \times$$

$$\times \exp \left( - \int^{\underline{e}^2} \frac{\gamma(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy \right),$$

$$\underline{Z}'_1 \left( \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2}, \underline{e}^2; \zeta \right) = \mathcal{P}' \left( \ln \frac{\underline{M}^2}{\underline{m}^2} + \chi(\underline{e}^2); \zeta \right) \times$$

$$\times \exp \left( - \int^{\underline{e}^2} \frac{\gamma(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy \right). \quad (3.3.102)$$

Подчеркнем, что отношение  $\underline{Z}'_1/\underline{Z}_1$  определяет связь между  $\underline{m}$  и  $m$ ,  $m = m\underline{Z}_1/\underline{Z}'_1$ . Полученные формулы справедливы в асимптотической области  $-\underline{p}^2 \gg \underline{m}^2$ . Аналогичные соотношения могут быть получены для вершинной функции.

**3.4.3. Асимптотика фотонной функции Грина в теории возмущений.** Ранее мы не пользовались теорией возмущений. Теперь для нахождения асимптотик функций Грина используем теорию возмущений, учитывая, что  $\underline{e}^2 \ll 1$ . Из формулы (3.3.90) (или (3.3.89)) и того факта, что величина  $Z$  (или  $\underline{d}$ ) представима в виде ряда теории возмущений по степеням  $\underline{e}^2$ , следует, что функция  $\beta(x)$  ( $x \equiv \underline{e}^2$ ) также разложима в ряд по степеням  $x$ , причём  $\beta(0) = 0$ ,

$$\beta(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \dots, \quad C_1 \neq 0. \quad (3.3.103)$$

Поэтому, согласно (3.3.92),

$$\chi(x) = \frac{1}{x\beta(x)} = \frac{1}{x^2} (a_0 + a_1 x + \dots),$$

где  $C_i$ ,  $a_i$  — некоторые числовые коэффициенты и, следовательно,

$$\chi(x) = - \frac{a_0}{x} + a_1 \ln x + C + a_2 x + \dots \quad (3.3.104)$$

( $C$  — постоянная интегрирования). Обратимся теперь к асимптотическому представлению (3.3.93) инвариантного заряда  $\underline{e^2 d}$

$$\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, x \right) = F(v + \chi(x)), \quad -k^2 \gg \underline{m}^2,$$

где  $x = \underline{e^2}$ ,  $v = \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2}$ . Так как эта формула справедлива при произвольном положительном  $x$ , то, учитывая, что  $\chi(x) \rightarrow -\frac{a_0}{x}$ , а  $\underline{d} \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ , получаем

$$x = F\left(-\frac{a_0}{x}\right), \quad 0 < x \ll 1.$$

Из этой формулы следует асимптотическое представление функции  $F(y)$  в области больших  $y$ :

$$F(y) = -\frac{a_0}{y}, \quad -a_0 y \rightarrow +\infty \quad (3.3.105)$$

(так как  $xy = -a_0$ ), т. е. мы можем определить асимптотику функции  $F(y)$  при  $y \rightarrow +\infty$ , если  $a_0 < 0$ , и асимптотику этой функции при  $y \rightarrow -\infty$ , если  $a_0 > 0$ . В первом случае из формулы (3.3.93) видно, что тем самым (поскольку  $v > 0$ ) мы определили асимптотику функции  $\underline{d}$  при  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  и  $\underline{e^2} \ll 1$ . Именно такая ситуация, как мы увидим, имеет место в неабелевых калибровочных полях (см. раздел 4.6.3). Если же  $a_0 > 0$  (что имеет место в квантовой электродинамике), то мы можем, согласно (3.3.93), определить асимптотику функции  $\underline{d}$  только в области

$$\frac{a_0}{\underline{e^2}} - \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} = \frac{a_0}{\underline{e^2}} \left( 1 - \frac{\underline{e^2}}{a_0} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \right) \gg 1. \quad (3.3.106)$$

Так как  $\underline{e^2} \ll 1$ , то это неравенство означает, что  $\underline{e^2} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} < a_0$ . Таким образом, асимптотика функции  $\underline{d}$ , согласно (3.3.93), имеет вид

$$\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e^2} \right) \approx \left( 1 - \frac{\underline{e^2}}{a_0} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \right)^{-1}. \quad (3.3.107)$$

Подчеркнем ещё раз, что, если  $a_0 < 0$ , то эта формула справедлива при  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  (лишь бы выполнялось неравенство  $\underline{e^2} \ll 1$ ). Если же  $a_0 > 0$ , то формула справедлива при  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  и выполнении неравенства (3.3.106) (при этом, очевидно, должно быть  $\underline{e^2} \ll 1$ ).

Если  $\underline{e^2} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \ll 1$ , то, согласно (3.3.107),

$$\underline{d} \approx 1 + \frac{\underline{e^2}}{a_0} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (3.3.79), имеющей место в квантовой электродинамике в теории возмущений, мы видим, что  $a_0 = 12\pi^2$ . Поэтому в квантовой электродинамике

$$\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e^2} \right) \approx \left( 1 - \frac{\underline{e^2}}{12\pi^2} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \right)^{-1}. \quad (3.3.108)$$

Заметим, что эта формула соответствует изборочному суммированию ряда теории возмущений, в каждом члене которого удерживается только асимптотически главное при  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  слагаемое, т. е. слагаемое типа  $\left( \underline{e^2} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \right)^n$ , и не удерживаются слагаемые  $\underline{e^2} \left( \underline{e^2} \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2} \right)^{n-1}$ . Формула (3.3.108), в квантовой электродинамике, впервые получена Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосовым, И. М. Халатниковым [30].

Нетрудно уточнить полученную нами асимптотику функции  $\underline{d}$ . С этой целью учтем в формуле (3.3.104) для  $\chi(x)$  первые два главных члена при  $x \ll 1$ ,  $\chi(x) = -\frac{a_0}{x} + a_1 \ln x$ . Отсюда, согласно (3.3.108), мы получим следующее уравнение для определения асимптотики функции  $F(y)$  при  $-a_0 y \rightarrow +\infty$ :

$$x = F(y), \quad y = -\frac{a_0}{x} + a_1 \ln x.$$

Легко видеть, что

$$F(y) = -\frac{a_0}{y + a_1 \ln \left( -\frac{y}{a_0} \right)}, \quad -a_0 y \rightarrow +\infty.$$

Поэтому уточненная асимптотика функции  $\underline{d}$  имеет вид [17]

$$\underline{d} \left( \frac{k^2}{\underline{m}^2}, \underline{e^2} \right) = \left\{ 1 - \frac{\underline{e^2}}{a_0} v - \underline{e^2} \frac{a_1}{a_0} \ln \left( 1 - v \frac{\underline{e^2}}{a_0} \right) \right\}^{-1}, \quad v = \ln \frac{-k^2}{\underline{m}^2}. \quad (3.3.109)$$

Она соответствует удержанию в  $n$ -м члене ряда теории возмущений по степеням  $\underline{e^2}$  в области  $-k^2 \gg \underline{m}^2$  наряду с  $(\underline{e^2} v)^n$  члена  $\underline{e^2} (\underline{e^2} v)^{n-1}$ . При  $\underline{e^2} v \ll 1$  эта формула имеет вид

$$\underline{d} = 1 + \frac{\underline{e^2}}{a_0} v - \frac{a_1}{a_0^2} \underline{e^4} v.$$

Для нахождения коэффициента  $a_1$  в квантовой электродинамике нужно найти асимптотическое представление при  $-k^2 \gg m^2$  обычного ряда теории возмущений, вплоть до членов  $e^4$ .

В результате мы получим  $a_1 = -\frac{9}{4}$ .

Определим теперь асимптотику константы перенормировки при  $\mathcal{M}^2/m^2 \gg 1$  и  $e^2 \ll 1$ . Обратимся с этой целью ко второй из формул (3.3.93). Устремляя в этой формуле  $e^2 \equiv x$  к нулю и используя асимптотику (3.3.104) функции  $\chi(x)$ , получаем следующее уравнение для определения асимптотики функции  $Q(y)$ :

$$xQ(y) = 1, \quad y = -\frac{a_0}{x},$$

где  $-a_0 y \rightarrow +\infty$ . Отсюда

$$Q(y) = -\frac{y}{a_0}, \quad -a_0 y \rightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$Z\left(\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}, e^2\right) = 1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}. \quad (3.3.110)$$

В квантовой электродинамике, когда  $a_0 = 12\pi^2$ , эта формула справедлива при  $e^2 \ll 1$  и  $0 < \frac{1}{e^2} \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right) \ll 1$ . Так как  $e^2 = Ze^2$ , то мы имеем следующую связь между «голым» и перенормированным, т. е. наблюдаемым зарядом электрона:

$$e^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}}, \quad \underline{e}^2 = \frac{e^2}{1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}}. \quad (3.3.111)$$

Из второй формулы следует, что

$$\underline{e}^2 < \frac{12\pi^2}{\ln \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}}.$$

Если формально устремить  $\mathcal{M}$  к бесконечности, то мы получим  $\underline{e}^2 = 0$  [31], что физически абсурдно. В действительности, однако, согласно (3.3.106), мы не можем переходить в формуле (3.3.111) к пределу  $\mathcal{M} \rightarrow \infty$ .

Из формул (3.3.111) также следует, что  $\underline{e}^2 < e^2$  (т. е.  $0 < Z < 1$ ). Это неравенство имеет простой физический смысл. Заряд реального электрона меньше заряда «голового» электрона, так как последний окружен облаком электронно-позитронных пар, экранирующих первичный заряд  $e$ ; внешний же наблюдатель воспринимает действие экранированного заряда.

**3.4.4. Асимптотика электронной функции Грина в теории возмущений.** Перейдем теперь к нахождению асимптотики электронной функции Грина в области больших импульсов  $-p^2 \gg m^2$  при  $e^2 \ll 1$ . Так как функции  $A$ ,  $A'$  разложимы в ряды по степеням  $e^2$ , то, согласно (3.3.98), функции  $\gamma(e^2, \zeta)$  и  $\gamma'(e^2, \zeta)$  также разложимы в ряды по степеням  $e^2$

$$\gamma(e^2, \zeta) = \gamma_0(\zeta) + e^2 \gamma_1(\zeta) + \dots, \quad \gamma'(e^2, \zeta) = \gamma'_0(\zeta) + e^2 \gamma'_1(\zeta) + \dots$$

Поэтому, согласно (3.3.103), при  $x \equiv e^2 \rightarrow 0$  имеем

$$\frac{\gamma(x, \zeta)}{x\beta(x)} = \frac{c_0(\zeta)}{x^2} + \frac{c_1(\zeta)}{x} + \dots, \quad \frac{\gamma'(x, \zeta)}{x\beta(x)} = \frac{c'_0(\zeta)}{x^2} + \frac{c'_1(\zeta)}{x} + \dots,$$

где  $c_0, c_1, c'_0, c'_1$  — некоторые константы, не зависящие от  $x$ , но зависящие от  $\zeta$ . Отсюда имеем

$$\exp\left(-\int^x \frac{\gamma(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a(\zeta) e^{-\frac{c_0(\zeta)}{x}} x^{-c_1(\zeta)},$$

$$\exp\left(-\int^x \frac{\gamma'(y, \zeta)}{y\beta(y)} dy\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a'(\zeta) e^{-\frac{c'_0(\zeta)}{x}} x^{-c'_1(\zeta)},$$

где  $a(\zeta), a'(\zeta)$  — некоторые функции одного аргумента  $\zeta$ .

Таким образом, формулу (3.3.101) в области малых  $x \equiv e^2$  можно записать в виде

$$\underline{A} \xrightarrow{x \ll 1} Q(y, \zeta) \left(\ln \frac{-p^2}{m^2} - y\right)^{c_1(\zeta)} \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{c_0(\zeta)}{a_0}} a_0^{-c_1(\zeta)} a(\zeta), \quad (3.3.112)$$

где

$$y = \ln \frac{-p^2}{m^2} - \frac{a_0}{x}, \quad a_0 = 12\pi^2$$

(мы учли, что  $\chi(x) \rightarrow -a_0/x$  при  $x \rightarrow 0$ ). Перейдем в формуле (3.3.112) к пределу  $x \rightarrow 0$  ( $y \rightarrow -\infty$ ) и учтем, что

$$\underline{A} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \underline{A}\left(\frac{p^2}{m^2}, \zeta\right) \equiv \underline{A}\left(\frac{p^2}{m^2}, 0; \zeta\right), \quad -p^2 \gg m^2.$$

Тогда из (3.3.112) имеем

$$Q(y, \zeta) (-y)^{c_1(\zeta)} \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 1,$$

$$\underline{A}\left(\frac{p^2}{m^2}, 0; \zeta\right) \xrightarrow{-p^2 \gg m^2} b(\zeta) \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{c_0(\zeta)}{a_0}}, \quad b(\zeta) = a_0^{-c_1(\zeta)} a(\zeta)$$

и, следовательно,

$$Q(y, \xi) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} (-y)^{-c_1(\xi)}$$

$b(\xi)$  — некоторая функция одного аргумента  $\xi$ . Поэтому асимптотика функции  $A\left(\frac{p^2}{m^2}, e^2; \xi\right)$  в области  $-p^2 \gg m^2, e^2 \ll 1$  имеет вид

$$\underline{A} \sim \left(1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{-p^2}{m^2}\right)^{-c_1(\xi)} \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{c_0(\xi)}{a_0}} b(\xi). \quad (3.3.112')$$

Аналогично асимптотика функции  $A'\left(\frac{p^2}{m^2}, e^2; \xi\right)$  при  $-p^2 \gg m^2, e^2 \ll 1$  имеет вид

$$\underline{A}'\left(\frac{p^2}{m^2}, e^2; \xi\right) \approx \left(1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{-p^2}{m^2}\right)^{-c_1'(\xi)} \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^{\frac{c_0'(\xi)}{a_0}} \times b'(\xi). \quad (3.3.113)$$

Так как  $Z_1$  и  $Z_1'$  определяются такими же формулами, как  $\underline{A}$  и  $\underline{A}'$ , только с заменой  $-p^2$  на  $\mathcal{M}^2$ , то

$$\underline{Z}_1\left(\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}, e^2; \xi\right) \approx \left(1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right)^{-c_1(\xi)} \left(\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right)^{\frac{c_0(\xi)}{a_0}} b_1(\xi), \quad (3.3.114)$$

$$\underline{Z}_1'\left(\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}, e^2; \xi\right) \approx \left(1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right)^{-c_1'(\xi)} \times \left(\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right)^{\frac{c_0'(\xi)}{a_0}} b_1'(\xi).$$

Учитывая, что  $m = \underline{m} Z_1' / Z_1$ , имеем

$$m = \underline{m} \left(1 - \frac{e^2}{a_0} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right)^{c_1(\xi) - c_1'(\xi)} \left(\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right)^{\frac{c_0'(\xi) - c_0(\xi)}{a_0}} \frac{b_1'(\xi)}{b_1(\xi)}. \quad (3.3.114')$$

Пусть величина  $\xi \equiv e^2 \bar{\xi}$  в силу малости  $e^2$  является малой (при фиксированном  $\bar{\xi}$ ). Тогда справедливы разложения

$$\begin{aligned} b(\xi) &= b(0) + \dots, & b'(\xi) &= b'(0) + \dots, & c_1(\xi) &= c_1(0) + \dots, \\ c_1'(\xi) &= c_1'(0) + \dots, & c_0(\xi) &= c_0(0) + \xi \bar{c}_0(0) + \dots, \\ c_0'(\xi) &= c_0'(0) + \xi \bar{c}_0'(0) + \dots \end{aligned}$$

и, следовательно, при  $e^2 \rightarrow 0$  (и фиксированном  $\bar{\xi}$ ) имеем

$$\underline{A} \rightarrow b(0) \left\{ 1 + \frac{e^2 c_1(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{m^2} + \frac{c_0(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{m^2} + \xi \frac{\bar{c}_0(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{m^2} \right\},$$

$$\underline{A}' \rightarrow b'(0) \left\{ 1 + \frac{e^2 c_1'(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{m^2} + \frac{c_0'(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{m^2} + \xi \frac{\bar{c}_0'(0)}{a_0} \ln \frac{-p^2}{m^2} \right\}.$$

С другой стороны, из формул (3.3.84) следует, что в теории возмущений по  $e^2$  при  $-p^2 \gg m^2$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \underline{A} &\rightarrow 1 - \frac{\xi}{16\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2}, & \underline{A}' &\rightarrow 1 - \frac{3e^2}{16\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2} - \\ & & & - \frac{\xi}{16\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2}. \end{aligned}$$

Сравнивая эти формулы и учитывая, что  $a_0 = 12\pi^2$ , находим

$$\begin{aligned} b(0) &= b'(0) = 1, & c_0(0) &= c_0'(0) = 0, & \bar{c}_0(0) &= \bar{c}_0'(0) = -\frac{3}{4}, \\ c_1(0) &= 0, & c_1'(0) &= -\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Кроме того, легко видеть, что  $b_1(0) = b_1'(0) = 1$ . Таким образом, в области  $-p^2 \gg m^2, e^2 \ll 1$  справедливы формулы [32]

$$\begin{aligned} \underline{A} &\approx \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^{-\frac{\xi e^2}{16\pi^2}}, & \underline{A}' &\approx \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{-p^2}{m^2}\right)^{\frac{9}{4}} \times \\ & & & \times \left(-\frac{p^2}{m^2}\right)^{-\frac{\xi e^2}{16\pi^2}}, \end{aligned} \quad (3.3.115)$$

а также (при  $\mathcal{M}^2 \gg m^2$ ) формулы

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &\approx \left(\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right)^{-\frac{\xi e^2}{16\pi^2}}, & \underline{Z}_1' &\approx \left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right)^{\frac{9}{4}} \times \\ & & & \times \left(\frac{\mathcal{M}^2}{m^2}\right)^{-\frac{\xi e^2}{16\pi^2}}. \end{aligned} \quad (3.3.116)$$

Поэтому [33] (см. также [35])

$$m = \underline{m} \left( 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\underline{m}^2} \right)^{\frac{9}{4}}. \quad (3.3.116')$$

Эта формула позволяет дать чисто полевую интерпретацию массе электрона. Действительно, полагая здесь  $m = 0$ , имеем

$$\underline{m}^2 = \mathcal{M}^2 \exp \left( -\frac{12\pi^2}{e^2} \right).$$

Эта формула связывает массу реального электрона с импульсом обрезания  $\mathcal{M}$ . Если импульс обрезания имеет реальный физический смысл (т. е. обрезание на импульсе  $\mathcal{M}$  обуславливается какими-то другими, не электромагнитными взаимодействиями), то эту формулу можно интерпретировать как возникновение «сверхпроводящей» щели в спектре однозарядовых состояний. Такая сверхпроводящая интерпретация массы электрона последовательно развивалась в [34, 36, 37].

#### 3.4.5. Инфракрасная асимптотика электронной функции Грина.

В предыдущих разделах мы изучали ультрафиолетовую асимптотику перенормированных функций Грина. Однако перенормированная электронная функция Грина и вершинная функция имеют особенности на массовой оболочке электрона  $p^2 = \underline{m}^2$ . Эти особенности называются инфракрасными. Мы исследуем эту особенность для электронной функции Грина. Начнем с изучения этой особенности в перенормированном массовом операторе электрона во втором порядке теории возмущений.

Массовый оператор  $\underline{\Sigma}(p)$  (и электронную функцию Грина  $\underline{G}^{(e)}(p)$ ) можно, очевидно, рассматривать как скалярную функцию одной переменной  $x$ ,  $\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}(x)$  ( $\underline{G}^{(e)} = \underline{G}^{(e)}(x)$ ). При этом матрица  $\underline{\Sigma}(p)$  (или  $\underline{G}^{(e)}(p)$ ) получается из скалярной функции  $\underline{\Sigma}(x)$  (или  $\underline{G}^{(e)}(x)$ ) путем замены  $x \rightarrow \hat{p}$ . Согласно формулам (3.3.84) асимптотика функции  $\underline{\Sigma}^{(2)}(x, \xi)$  при  $\underline{m}^2 \gg \underline{m} |x - \underline{m}| \gg \lambda^2$  имеет вид

$$\underline{\Sigma}^{(2)}(x, \xi) \approx (3 - \xi) \frac{e^2}{16\pi^2} (x - \underline{m}) \ln \frac{(x - \underline{m})^2}{\lambda^2},$$

$$\frac{\underline{m}}{\lambda} \gg \left| \frac{x - \underline{m}}{\lambda} \right| \gg \frac{\lambda}{\underline{m}}$$

и, следовательно,

$$\underline{G}^{(e)}(x, \xi)^{-1} \approx (\underline{m} - x) \left\{ 1 + \frac{e^2}{16\pi^2} (3 - \xi) \ln \frac{(x - \underline{m})^2}{\lambda^2} + \dots \right\}. \quad (3.3.117)$$

Отсюда видно, что функции  $\underline{\Sigma}^{(2)}(x, \xi)$ ,  $\underline{G}^{(2)}(x, \xi)$  обладают логарифмической инфракрасной особенностью.

Представим перенормированную (по заряду) и перенормированную электронную функцию Грина в виде

$$\underline{G}^{(e)}(p) = \frac{\underline{a}(\hat{p})}{\underline{m} - \hat{p}}, \quad \underline{G}^{(e)}(p) = \frac{\underline{a}(\hat{p})}{\underline{m} - \hat{p}}. \quad (3.3.118)$$

Тогда, согласно (3.3.44), безразмерные функции  $\underline{a}(\hat{p})$  и  $\underline{a}(\hat{p})$  связаны соотношением

$$\underline{a}(\hat{p}) = Z_2 \underline{a}(\hat{p}). \quad (3.3.119)$$

Перенормированная функция  $\underline{a}(\hat{p})$  в теории возмущений имеет предел  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda \ll \underline{m}$ ), в то время как  $Z_2$  и  $\underline{a}(\hat{p})$  существенно зависят от  $\lambda$ . Поэтому при  $\lambda \ll \underline{m}$  должна иметь место факторизация по  $\lambda$ , т. е.

$$Z_2 \left( \frac{\mathcal{M}}{\underline{m}}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e} \right) = Z_2 \left( \frac{\mathcal{M}}{\underline{m}}, \underline{e} \right) f \left( \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e} \right),$$

$$\underline{a} \left( \frac{x - \underline{m}}{\lambda}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e} \right) = \underline{a} \left( \frac{x - \underline{m}}{\underline{m}}, \underline{e} \right) f^{-1} \left( \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e} \right)$$

( $x = \hat{p}$ ; функция  $f \left( \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e} \right)$  не может зависеть от  $\frac{\mathcal{M}}{\underline{m}}$ , так как от этого отношения не зависит  $\underline{a}$ , и не может зависеть от  $\frac{x - \underline{m}}{\lambda}$ , поскольку от этого отношения не зависит  $Z_2$ ).

Заметим теперь, что функция  $\underline{a} \left( \frac{x - \underline{m}}{\lambda}, \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e} \right)$  при  $\underline{m}^2 \gg \underline{m} |x - \underline{m}| \gg \lambda^2$  не зависит от  $\lambda/\underline{m}$  (мы в этом убедились на примере второго порядка теории возмущений). Поэтому в этой области должно иметь место соотношение

$$\underline{a} \left( \frac{x - \underline{m}}{\underline{m}}, 0, \underline{e} \right) = \underline{a} \left( \frac{x - \underline{m}}{\underline{m}}, \underline{e} \right) f^{-1} \left( \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e} \right),$$

откуда следует, что

$$\underline{a} \left( \frac{x - \underline{m}}{\underline{m}}, \underline{e} \right) = \left( \frac{x - \underline{m}}{\underline{m}} \right)^{d(e)} c(\underline{e}), \quad |x - \underline{m}| \ll \underline{m},$$

$$f \left( \frac{\lambda}{\underline{m}}, \underline{e} \right) = \left( \frac{\lambda}{\underline{m}} \right)^{d(e)}, \quad \lambda \ll \underline{m},$$

где  $c(\underline{e})$ ,  $d(\underline{e})$  — некоторые функции одного аргумента  $\underline{e}$ . Поэтому

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{m}, \underline{e}\right) \approx c(\underline{e}) \left(\frac{x-m}{\lambda}\right)^{d(\underline{e})}, \quad \frac{m}{\lambda} \gg \left|\frac{x-m}{\lambda}\right| \gg \frac{\lambda}{m}. \quad (3.3.120)$$

Так как, согласно (3.2.13),  $\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{m}, 0\right) = 1$ , то  $c(0) = 1$ ,  $d(0) = 0$ . Поэтому в теории возмущений по  $\underline{e}$  имеем

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{m}, \underline{e}\right) = 1 + \frac{d(\underline{e})}{2} \ln \frac{(x-m)^2}{\lambda^2},$$

$$\frac{m}{\lambda} \gg \left|\frac{x-m}{\lambda}\right| \gg \frac{\lambda}{m}.$$

С другой стороны, согласно (3.3.117), (3.3.118),

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{m}, \underline{e}\right) = 1 - \frac{e^2}{16\pi^2} (3 - \xi) \ln \frac{(x-m)^2}{\lambda^2} + \dots$$

Сравнение этих формул показывает, что

$$d(\underline{e}) = -\frac{e^2}{8\pi^2} (3 - \xi) + \dots = \frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3) + \dots$$

Таким образом,

$$\underline{a}\left(\frac{x-m}{\lambda}, \frac{\lambda}{m}, \underline{e}\right) \approx \left(\frac{x-m}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3)}$$

и, следовательно,

$$\underline{G}^{(e)}(p) \approx \frac{1}{m - \hat{p}} \left(\frac{\hat{p} - m}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3)}. \quad (3.3.121)$$

Мы видим, что электронная функция Грина имеет при  $\underline{m}^2 \gg |p^2 - m^2| \gg \lambda^2$  следующую инфракрасную асимптотику [29], [38]:

$$\underline{G}^{(e)}(p) \approx \frac{1}{m - \hat{p}} \left(\frac{p^2 - m^2}{2m\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3)}. \quad (3.3.122)$$

Эта формула показывает, что при  $\lambda \rightarrow 0$  электронная функция Грина при  $\hat{p} = \underline{m}$  имеет не полюс, а точку ветвления. Однако при конечных  $\lambda$  электронная функция Грина имеет полюс при

$\hat{p} = \underline{m}$ . Подчеркнем также, что в рассматриваемом приближении по  $\underline{e}^2$  при  $\xi = 3$  инфракрасная особенность на массовой поверхности исчезает.

Множитель  $(\lambda/m)^{-\frac{\alpha}{2\pi} (\xi - 3)}$  можно отнести к величине  $Z_2$ , переопределив тем самым эту величину. В результате  $\underline{G}$  и  $Z_2$  не будут зависеть от  $\lambda$ .

Фотонная функция Грина при  $k^2 = 0$  не имеет инфракрасной особенности, если  $\underline{m} \neq 0$ ; вершинная же функция имеет инфракрасную особенность на массовой оболочке электронов. Мы, однако, не будем рассматривать здесь эти вопросы.

## ТЕОРИЯ НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

### 4.1. Калибровочные поля

**4.1.1. Унитарная симметрия.** До сих пор структура полей с внутренней симметрией не конкретизировалась. Наиболее важным видом таких полей является обобщенное дираковское поле, описываемое дираковским  $n$ -кратным биспинором  $\psi_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), удовлетворяющим уравнению Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_i(x) = 0. \quad (4.1.1)$$

Индекс  $i$  служит для обозначения внутренних степеней свободы (масса  $m$  считается не зависящей от индекса  $i$ ). Соответствующий этому полю лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_i - \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi_i. \quad (4.1.2)$$

Как мы увидим в главе 5, поля  $\psi_i(x)$  могут служить для описания кварковых полей, причем индекс  $i$  соответствует сорту и цвету кварка.

Лагранжиан (4.1.1) инвариантен относительно преобразований

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = \mathcal{U}_{ij} \psi_j, \quad \bar{\psi}_i \rightarrow \bar{\psi}'_i = \mathcal{U}_{ij}^* \bar{\psi}_j, \quad (4.1.3)$$

оставляющих неизменной квадратично форму  $n$  комплексных переменных

$$\bar{\psi}_i \psi_i \equiv \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i \psi_i.$$

Отсюда следует, что матрица  $\mathcal{U}$  должна быть унитарной,  $\mathcal{U}^+ \mathcal{U} = 1$ , поэтому должна иметь следующую структуру:

$$\mathcal{U} = e^{i\alpha U}, \quad (4.1.4)$$

где  $\alpha$  — произвольное вещественное число;  $U$  — унитарная матрица с  $\det U = 1$ . Ее можно записать в виде

$$U = \exp iH, \quad (4.1.5)$$

где  $H$  — эрмитова матрица со шпуром, равным нулю,  $\text{Sp } H = 0$ . Матрицы  $U$  образуют группу, называемую группой  $SU(n)$ . Инвариантность лагранжиана относительно преобразований группы  $SU(n)$  называется унитарной симметрией.

Таким образом, лагранжиан (4.1.2) инвариантен относительно группы преобразований  $SU(n)$  и группы фазовых преобразований. Так как эрмитова матрица  $n$ -го порядка определяется  $n^2$  вещественными параметрами, то элементы группы  $SU(n)$  определяются  $n^2 - 1$  вещественными параметрами (мы учли условие  $\text{Sp } H = 0$ ). Для бесконечно малых преобразований матрицу  $U$  можно представить в виде

$$U = 1 - ie^a T_a, \quad (4.1.6)$$

где  $e^a$  — вещественные бесконечно малые параметры ( $a = 1, 2, \dots, n^2 - 1$ );  $T_a$  — эрмитовы матрицы  $n$ -го порядка со шпуром, равным нулю (так как  $\det U = 1$ ),

$$T_a^+ = T_a, \quad \text{Sp } T_a = 0 \quad (4.1.7)$$

(по индексу  $a$  производится суммирование). Матрицы  $T_a$  представляют собой генераторы группы  $SU(n)$  и удовлетворяют, очевидно, перестановочным соотношениям

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c, \quad (4.1.8)$$

где  $f_{ab}^c$  — структурные постоянные группы  $SU(n)$ .

Рассмотренные нами унитарные матрицы  $n$ -го порядка с детерминантом, равным единице, реализуют так называемое фундаментальное представление группы  $SU(n)$ , а матрицы  $T_a$  являются генераторами этого представления. Существуют также представления группы  $SU(n)$  более высокой размерности. Одним из таких представлений является присоединенное представление размерности  $N = n^2 - 1$ . Генераторами этого представления являются сами структурные постоянные  $f_{ab}^c$ , рассматриваемые как матрицы с матричными элементами  $(T'_c)_{ab} = if_{ab}^c$ . Действительно, эти матрицы, согласно (1.1.30), удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[T'_a, T'_b] = if_{ab}^c T'_c,$$

связанным с алгеброй Ли группы  $SU(n)$ .

Величины  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  при бесконечно малых преобразованиях группы  $SU(n)$  преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' &= \psi + \delta\psi, & \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' &= \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}, \\ \delta\psi &= -ie^a T_a \psi, & \delta\bar{\psi} &= ie^a T_a^* \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

и могут быть названы  $SU(n)$ -спинорами.

Согласно общим результатам раздела 1.1.4, с инвариантностью лагранжиана относительно преобразований группы  $SU(n)$  связано существование  $n$  сохраняющихся 4-токов

$$\mathcal{J}_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi, \quad \partial_\mu \mathcal{J}_a^\mu = 0 \quad (4.1.10)$$

подобно тому, как с инвариантностью лагранжиана по отношению к фазовым преобразованиям связано существование сохраняющегося тока

$$\mathcal{J}^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0.$$

При преобразованиях (4.1.9) токи (4.1.10) преобразуются, согласно (4.1.9), (4.1.10), по закону

$$\delta \mathcal{J}_a^\mu = -\epsilon^b f_{ba}^c \mathcal{J}_c^\mu. \quad (4.1.11)$$

Если при бесконечно малых преобразованиях внутренней симметрии  $SU(n)$  некоторые величины  $H_a$  преобразуются согласно закону

$$\delta H_a = -\epsilon^b f_{ba}^c H_c, \quad (4.1.12)$$

то эти величины мы будем называть компонентами ковариантного  $SU(n)$ -вектора. Таким образом, токи  $\mathcal{J}_a^\mu$  образуют ковариантный  $SU(n)$ -вектор.

Величины  $Q^a$  будем называть компонентами контравариантного  $SU(n)$ -вектора, если при преобразованиях внутренней симметрии (4.1.5) они преобразуются по закону

$$\delta Q^a = \epsilon^b f_{bc}^a Q^c. \quad (4.1.13)$$

Наряду с векторами можно ввести  $SU(n)$ -тензоры второго и более высоких рангов. Например, величины  $Q_a^b$  будут представлять собой компоненты смешанного  $SU(n)$ -тензора второго ранга, если при преобразовании внутренней симметрии они преобразуются по закону

$$\delta Q_b^a = -\epsilon^c f_{cb}^d Q_d^a + \epsilon^c f_{cd}^a Q_b^d. \quad (4.1.14)$$

Отсюда ясно, что величины  $Q^a H_b$  образуют смешанный тензор второго ранга. Легко видеть, что если в смешанном тензоре производить суммирование по верхнему и нижнему индексу (сокращение индексов), то мы будем получать тензоры более низкого ранга. Например, величина  $Q_a^a$ , согласно (4.1.14), при преобразованиях внутренней симметрии будет оставаться инвариантной,  $\delta Q_a^a = 0$ , т. е. будет  $SU(n)$  скаляром. В частности, скаляром будет величина  $Q^a H_a$ .

Кроме того, структурные постоянные  $f_{ab}^c$  можно рассматривать как универсальный  $SU(n)$ -тензор третьего ранга. Дей-

ствительно, предположив, что величины  $f_{ab}^c$  образуют  $SU(n)$ -тензор третьего ранга, мы получим для него, согласно (4.1.12), (4.1.13), следующий закон преобразования:

$$\delta f_{ab}^c = \epsilon^d (f_{de}^c f_{ab}^e - f_{da}^e f_{eb}^c - f_{ab}^e f_{ae}^c),$$

откуда, учитывая (1.1.30), имеем  $\delta f_{ab}^c = 0$ , что и доказывает наше утверждение.

Так как  $f_{ab}^c$  —  $SU(n)$  — тензор, то величины

$$g_{ab} = \frac{1}{n} f_{ac}^d f_{db}^c \quad (4.1.15)$$

образуют ковариантный  $SU(n)$ -тензор второго ранга. В силу антисимметрии  $f_{ab}^c$  по индексам  $a$  и  $b$ , тензор  $g_{ab}$  будет симметричным,  $g_{ab} = g_{ba}$ . С помощью универсального тензора  $g_{ab}$  и обратного ему тензора  $g^{ab}$

$$g^{ab} g_{bd} = \delta_d^a$$

можно поднимать и опускать индексы у  $SU(n)$ -тензоров. Из (4.1.8) легко видеть, что величины

$$T_{a_1 \dots a_k} = \bar{\psi} T_{a_1} \dots T_{a_k} \psi \equiv \bar{\psi}_i (T_{a_1} \dots T_{a_k})_{ij} \psi_j, \quad (4.1.16)$$

построенные из билинейных комбинаций  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , образуют ковариантный  $SU(n)$ -тензор  $k$ -го ранга ( $A$  — произвольная матрица, действующая на спинорный индекс). Мы предполагали до сих пор, что закон преобразования ковариантных и контравариантных  $SU(n)$ -тензоров различны. Покажем теперь, что метрический тензор  $g_{ab}$  для группы  $SU(n)$  можно считать равным  $\delta_{ab}$  и, следовательно, не делать различия между ковариантными и контравариантными величинами. Заметим с этой целью, что генераторы группы  $SU(n)$  всегда могут быть выбраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$\text{Sp } T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad a, b = 1, \dots, n^2 - 1. \quad (4.1.17)$$

Используя формулу

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c,$$

получаем

$$f_{ab}^c = -2i \text{Sp } [T_a, T_b] T_c.$$

Отсюда вытекает свойство антисимметрии структурных постоянных

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c = f_{bc}^a. \quad (4.1.18)$$

Произвольную бесшпуровую  $(n \times n)$  матрицу можно, очевидно, представить в виде

$$F = C_a T_a,$$



где, согласно (4.1.17),

$$C_a = 2 \operatorname{Sp} FT_a$$

и, следовательно,

$$F = 2T_a \operatorname{Sp} FT_a.$$

Выбирая в качестве  $F$  бесшпуровую матрицу  $F_{lm}$  ( $l, m$  фиксированы) с элементами

$$(F_{lm})_{ik} = \delta_{im}\delta_{lk} - \frac{1}{n} \delta_{ik}\delta_{lm},$$

получаем

$$\delta_{im}\delta_{lk} - \frac{1}{n} \delta_{ik}\delta_{lm} = 2(T_a)_{ik}(T_a)_{rs} \left( \delta_{sm}\delta_{rl} - \frac{1}{n} \delta_{rs}\delta_{ml} \right)$$

или, учитывая, что  $\operatorname{Sp} T_a = 0$ ,

$$(T_a)_{ik}(T_a)_{lm} = \frac{1}{2} \delta_{im}\delta_{lk} - \frac{1}{2n} \delta_{ik}\delta_{lm}. \quad (4.1.19)$$

Полагая здесь  $m = i$  и производя суммирование по  $i$ , находим

$$T_a T_a = \frac{n^2 - 1}{2n} \cdot I. \quad (4.1.20)$$

Из соотношения (4.1.19) следует, что

$$\operatorname{Sp} T_a T_b T_a T_c = -\frac{1}{4n} \delta_{bc} \quad (4.1.21)$$

(мы учли, что  $\operatorname{Sp} T_c = 0$ ). С другой стороны,  $\operatorname{Sp} T_a T_b T_a T_c$  можно представить в виде

$$\operatorname{Sp} T_a T_b T_a T_c = \operatorname{Sp} T_a T_a T_b T_c + \operatorname{Sp} T_c T_a [T_b, T_a],$$

откуда, согласно (4.1.20), (4.1.8),

$$\operatorname{Sp} T_a T_b T_a T_c = \frac{n^2 - 1}{4n} \delta_{bc} + i f_{ba}^e \operatorname{Sp} T_c T_a T_e$$

или, используя антисимметрию  $f_{ba}^e$  по индексам  $a, e$  и формулу (4.1.8), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp} T_a T_b T_a T_c &= \frac{n^2 - 1}{4n} \delta_{bc} - \frac{1}{2} f_{ba}^e f_{ae}^d \operatorname{Sp} T_c T_d = \\ &= \frac{n^2 - 1}{4n} \delta_{bc} - \frac{1}{4} b_{ba}^e f_{ae}^o. \end{aligned}$$

Сравнивая эту формулу с (4.1.21), получаем

$$f_{ba}^e f_{ae}^c = f_{ba}^e f_{ec}^a = n \delta_{bc} \quad (4.1.22)$$

и, следовательно, согласно определению (4.1.15) метрического тензора  $g_{ab}$ ,

$$g_{ab} = \delta_{ab}. \quad (4.1.23)$$

Соотношение (4.1.22) позволяет доказать справедливость формулы

$$f^{adg} f^{bde} f^{cge} = \frac{n}{2} f^{abc} \quad (4.1.24)$$

(в силу (4.1.23) мы уже не различаем верхних и нижних индексов). Действительно, используя свойство антисимметрии  $f^{abc}$ , имеем

$$f^{adg} f^{bde} f^{cge} = \frac{1}{2} f^{adg} (f^{bde} f^{cge} - f^{bge} f^{cde})$$

или, согласно (1.1.30),

$$f^{adg} f^{bde} f^{cge} = \frac{1}{2} f^{adg} f^{bce} f^{dge} = \frac{n}{2} f^{abc}$$

(мы использовали формулу (4.1.22); формула (4.1.24) понадобится нам в дальнейшем).

Рассматривая структурные постоянные  $f_{abc}$  как матричные элементы матрицы  $f^a$ ,  $(f^a)_{bc} = f_{abc}$  формулы (4.1.22), (4.1.24) можно переписать в виде

$$\operatorname{Sp} f^a f^b = n \delta_{ab}, \quad \operatorname{Sp} f^a f^b f^c = \frac{n}{2} f^{abc}. \quad (4.1.25)$$

**4.1.2. Введение калибровочного поля.** Лагранжиан свободного электронно-позитронного поля инвариантен относительно фазового преобразования

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\epsilon} \psi(x), \quad \psi^*(x) \rightarrow \psi'^*(x) = e^{i\epsilon} \psi^*(x), \quad (4.1.26)$$

где  $\epsilon$  — вещественная постоянная. В случае бесконечно малых преобразований

$$\delta\psi \equiv \psi'(x) - \psi(x) = -i\epsilon\psi(x), \quad \delta\psi^* \equiv \psi'^*(x) - \psi^*(x) = i\epsilon\psi^*(x). \quad (4.1.27)$$

Так как  $\psi(x)$  является функцией координат и времени, то представляется естественным потребовать, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно более общего преобразования — преобразования (4.1.26), в котором  $\epsilon$  представляет собой не константу, а функцию координат и времени. Однако, если ограничиться только полем  $\psi(x)$  самим по себе, то добиться этого невозможно. Такая инвариантность может быть достигнута, если наряду с электронно-позитронным полем  $\psi(x)$  ввести электромагнитное поле  $A_\mu(x)$  и потребовать, чтобы оно при преобразовании (4.1.27) поля  $\psi(x)$  само испытывало преобразование

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \omega(x), \quad \epsilon(x) = -e\omega(x). \quad (4.1.28)$$

При таком преобразовании, называемом калибровочным преобразованием, инвариантность лагранжиана электронно-

позитронного и электромагнитного полей достигается благодаря замене в лагранжиане (2.4.30) обычных производных  $\partial_\mu \psi(x)$  на ковариантные (удлиненные) производные  $D_\mu \psi(x) \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu(x)) \psi(x)$ ,

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A) = \frac{1}{2} \bar{\psi} \{i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m\} \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} \{i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) + m\} \psi. \quad (4.1.29)$$

Происходит это по той причине, что величины  $D_\mu \psi(x)$  при преобразованиях (4.1.27), (4.1.28) с зависящей от  $x$  фазой  $\varepsilon(x)$  преобразуются точно так же, как и поле  $\psi(x)$ .

Покажем теперь, что идея использования электромагнитного поля для построения инвариантного лагранжиана поля  $\psi(x)$  относительно фазовых преобразований с переменной фазой  $\varepsilon(x)$  может быть обобщена на случай произвольных полей  $\psi(x)$ , обладающих некоторой внутренней симметрией. Рассмотрим с этой целью бесконечно малые преобразования (4.1.6) поля  $\psi(x)$ , связанные с внутренними симметриями:

$$\delta\psi(x) = -ie^a T_a \psi(x), \quad \varepsilon^a \equiv g\omega^a, \quad (4.1.30)$$

где  $\varepsilon^a(\omega^a)$  — бесконечно малые величины и матрицы  $T_a$  удовлетворяют соотношению (4.1.8) (величина  $g$  будет в дальнейшем играть роль константы взаимодействия). Не ограничивая общности, будем считать, что компоненты поля  $\psi(x)$  вещественные. В этом случае матрицы  $T_a$  чисто мнимые.

Условие инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$  относительно преобразования (4.1.30) имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} T_a \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \partial_\mu \psi = 0, \quad (4.1.31)$$

откуда (в силу уравнений Лагранжа (1.1.5)) следует сохранение обобщенных токов

$$\partial_\mu \mathcal{J}_a^\mu = 0, \quad \mathcal{J}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \psi. \quad (4.1.32)$$

Пусть теперь величины  $\varepsilon^a$  являются функциями координат и времени. Тогда

$$\delta\psi = -ie^a(x) T_a \psi(x), \quad \delta\partial_\mu \psi = -ie^a(x) T_a \partial_\mu \psi(x) - i\partial_\mu \varepsilon^a(x) T_a \psi, \quad (4.1.33)$$

поэтому вариация лагранжиана (инвариантного относительно преобразований внутренней симметрии с постоянными  $\varepsilon^a$ ) будет теперь равна

$$\delta \mathcal{L} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \psi \partial_\mu \varepsilon^a(x) = \mathcal{J}_a^\mu \partial_\mu \varepsilon^a(x). \quad (4.1.34)$$

Мы видим, что потеря инвариантности лагранжиана при переменном  $\varepsilon^a$  связана с тем, что производные  $\partial_\mu \psi$  при преобразованиях внутренней симметрии с зависящими от  $x$  параметрами  $\varepsilon^a(x)$  преобразуются иначе, чем само поле  $\psi(x)$ . Однако, как и в случае электронно-позитронного поля, можно добиться инвариантности лагранжиана относительно преобразований (4.1.33), если ввести добавочные векторные поля  $A_\mu^a(x)$ , число которых равно числу генераторов  $T_a$ , и определить с их помощью ковариантные производные поля  $\psi(x)$

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) - igA_\mu^a(x) T_a \psi(x), \quad (4.1.35)$$

закон преобразования которых совпадает с законом преобразования поля  $\psi(x)$

$$\delta D_\mu \psi(x) = -ie^a(x) T_a D_\mu \psi(x). \quad (4.1.36)$$

Поля  $A_\mu^a(x)$  называются калибровочными.

Чтобы соотношение (4.1.36) имело место, калибровочное поле  $A_\mu^a(x)$  при преобразовании (4.1.33) само должно преобразовываться по закону

$$\delta A_\mu^a(x) = \varepsilon^c(x) f_{cb}^a A_\mu^b(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a(x). \quad (4.1.37)$$

Действительно, из определения (4.1.35) и закона преобразования поля  $\psi(x)$  (4.1.33) следует, что

$$\begin{aligned} \delta D_\mu \psi(x) &= \partial_\mu \delta\psi(x) - ig\delta A_\mu^a(x) T_a \psi(x) - igA_\mu^a(x) T_a \delta\psi(x) = \\ &= -ie^a T_a \partial_\mu \psi - i\partial_\mu \varepsilon^a T_a \psi - ig\delta A_\mu^a T_a \psi - g\varepsilon^a A_\mu^b T_a T_b \psi - \\ &\quad - g\varepsilon^a A_\mu^b [T_b, T_a] \psi \end{aligned}$$

или, согласно (4.1.35), (4.1.8),

$$\delta D_\mu \psi = -ie^a T_a D_\mu \psi - ig \left\{ \delta A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a + \varepsilon^c A_\mu^b f_{bc}^a \right\} T_a \psi,$$

откуда и следует закон преобразования (4.1.36) калибровочного поля.

Преобразования (4.1.33), (4.1.37) будем называть калибровочными преобразованиями.

Обратим внимание на то, что  $\delta A_\mu^a$  содержит наряду со слагаемым  $-\frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a$ , аналогичным слагаемому  $-\frac{1}{e} \partial_\mu \varepsilon$  в преобразовании электромагнитного поля  $A_\mu(x)$ , добавочное слагаемое  $\varepsilon^c f_{cb}^a A_\mu^b$ , содержащее структурные константы  $f_{cb}^a$ , характерные для неабелевой группы симметрии с генераторами  $T_a$ .

\* Неабелевы калибровочные поля были введены в работе Янга, Миллса [1, 2].

Инвариантность лагранжиана поля  $\psi$ , взаимодействующего с полями  $A_\mu^a$ , достигается так же, как и в случае электронно-позитронного и электромагнитного полей: путем замены в лагранжиане  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi)$  обычных производных  $\partial_\mu\psi$  на ковариантные производные  $D_\mu\psi$ . Это значит, что лагранжиан поля  $\psi$ , взаимодействующего с калибровочными полями  $A_\mu^a$ , определяется формулой

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, A_\mu^a) = \mathcal{L}(\psi, D_\mu\psi), \quad (4.1.38)$$

где  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi)$  — лагранжиан поля  $\psi(x)$ . Действительно, так как соотношение (4.1.31) справедливо при любом  $\partial_\mu\psi$ , то имеет место формула

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu\psi} T_a D_\mu\psi + \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial\psi} T_a\psi = 0,$$

откуда, используя (4.1.36), (4.1.33), имеем

$$\delta\mathcal{L} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu\psi} \delta D_\mu\psi + \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial\psi} \delta\psi = 0.$$

Это соотношение и доказывает инвариантность лагранжиана  $\mathcal{L}(\psi, D\psi)$  относительно преобразований (4.1.33), (4.1.37).

Определим теперь плотность обобщенных токов  $\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu$  при наличии калибровочных полей согласно формуле

$$\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = -i \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu\psi} T_a\psi. \quad (4.1.39)$$

Учитывая (4.1.35), имеем

$$\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = \frac{1}{g} \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial A_\mu^a}. \quad (4.1.40)$$

Покажем, что при преобразованиях внутренней симметрии (4.1.33), (4.1.37) с зависящими от  $x$  параметрами  $\epsilon^a$  обобщенные токи преобразуются по закону

$$\delta\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = -\epsilon^b f_{ba}^c \tilde{\mathcal{J}}_c^\mu. \quad (4.1.41)$$

Заметим, что в силу инвариантности лагранжиана относительно преобразований (4.1.33), (4.1.37)

$$\mathcal{L}(\psi', D'\psi') = \mathcal{L}(\psi, D\psi),$$

где

$$D'_\mu\psi' = \partial_\mu\psi' - igA_\mu^a T_a\psi'$$

( $\psi'$ ,  $A'$  — преобразованные поля  $\psi$ ,  $A$ ). Поэтому

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\psi', D'\psi')}{\partial D'_\mu\psi'} = \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\nu\psi} \frac{\partial D_\nu\psi}{\partial D'_\mu\psi'}.$$

Для бесконечно малых преобразований, согласно (4.1.36), имеем

$$D'_\mu\psi' = (1 - i\epsilon^a T_a) D_\mu\psi, \quad D_\mu\psi = (1 + i\epsilon^a T_a) D'_\mu\psi',$$

следовательно,

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\psi', D'\psi')}{\partial D'_\mu\psi'} = \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu\psi} (1 + i\epsilon^a T_a).$$

Таким образом,

$$\delta \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu\psi} = i\epsilon^a \frac{\partial\mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial E_\mu\psi} T_a.$$

Из этой формулы и формулы (4.1.39) вытекает следующее выражение для вариации  $\delta\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu$ :

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu &= \epsilon^b \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_\mu\psi} T_b T_a\psi - \epsilon^b \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_\mu\psi} T_a T_b\psi = \\ &= \epsilon^b \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial D_\mu\psi} [T_b, T_a]\psi. \end{aligned}$$

Используя выражение (4.1.8) для  $[T_b, T_a]$ , получаем закон преобразования (4.1.41) обобщенных токов.

Мы считали поле  $\psi(x)$  вещественным, что по существу не является ограничением. Так, например, в случае дираковского комплексного поля  $\psi(x)$  мы можем вместо поля  $\psi(x)$  ввести два вещественных поля  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x),$$

причем фазовому преобразованию (4.1.27) будет соответствовать следующее преобразование двухкомпонентного поля  $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ :

$$\delta\varphi(x) = -i\epsilon T\varphi(x),$$

где  $\delta\varphi(x) = \begin{pmatrix} \delta\varphi_1 \\ \delta\varphi_2 \end{pmatrix}$  и двухкомпонентная матрица  $T$  определяется формулой

$$T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.42)$$

Это преобразование вещественного поля  $\varphi(x)$  соответствует общей формуле (4.1.30).

Однако часто удобнее пользоваться лагранжианом, выраженным через комплексные поля. В этом случае также справедливы все формулы этого раздела, если под  $\psi$  подразумевать удвоенное количество полей  $\psi$ ,  $\psi^*$ , закон преобразования

которых имеет вид

$$\delta\psi(x) = -i\epsilon^a T_a \psi(x), \quad \delta\psi^*(x) = i\epsilon^a T_a^* \psi^*(x). \quad (4.1.43)$$

При этом следует считать, что во всех формулах этого раздела суммирование происходит как по компонентам поля  $\psi(x)$ , так и по компонентам поля  $\psi^*(x)$ , причем поле  $\psi^*(x)$  соответствует матрица  $-T_a^*$ . Например, выражение для тока  $\mathcal{J}_a^\mu$  в случае комплексного поля должно быть записано в виде

$$\mathcal{J}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \psi + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^*} T_a^* \psi^*.$$

Так как в случае комплексного поля группой внутренней симметрии является обычно группа  $SU(n)$ , то генераторы этой группы будут эрмитовыми матрицами и, следовательно, последняя формула может быть записана в виде

$$\mathcal{J}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} T_a \psi + i \psi^* T_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^*}. \quad (4.1.44)$$

В дальнейшем поля  $\psi \equiv (\psi, \psi^*)$  будем считать комплексными и в качестве группы внутренней симметрии использовать группу  $SU(n)$ .

**4.1.3. Тензорный анализ калибровочных полей.** Нашей следящей задачей является построение лагранжиана самих калибровочных полей, зависящего как от полей  $A_\mu^a$ , так и от их производных  $\partial_\nu A_\mu^a$ . Этот лагранжиан должен быть инвариантен относительно преобразований (4.1.37). Поэтому возникает вопрос о нахождении инвариантов преобразования (4.1.37). С этой целью мы разовьем тензорный анализ, связанный с преобразованиями (4.1.37), причем в качестве группы внутренней симметрии будем рассматривать группу  $SU(n)$ .

Как и в разделе 4.1.1, будем называть  $H_a$  и  $G^a$  компонентами ковариантного и контравариантного  $SU(n)$  векторов, а величины  $Q_a^b$  — компонентами смешанного  $SU(n)$ -тензора второго ранга, если они преобразуются согласно формулам (4.1.12), (4.1.13), (4.1.14), но будем теперь считать бесконечно малые параметры  $\epsilon^a$  функциями  $x$  (аналогичные определения могут быть даны и для тензоров высших рангов). Поскольку величины  $\epsilon^a$  являются функциями  $x$ , то производные  $\partial_\mu H_a$ ,  $\partial_\mu G^a$ ,  $\partial_\mu Q_a^b$  уже не будут  $SU(n)$ -тензорами. Наша задача заключается в том, чтобы ввести ковариантное дифференцирование  $SU(n)$ -тензоров, при котором не меняется закон преобразования тензоров (аналогично тому, как ковариантное дифференцирование величин  $\psi$  по формуле (4.1.35) не меняет закон преобразования (4.1.30)).

Легко видеть, что компоненты обобщенного тока  $\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu$  ( $\mu$  — фиксировано) образуют, согласно (4.1.41), ковариантный вектор, компоненты же калибровочного поля  $A_\mu^a$  не образуют контравариантный  $SU(n)$ -вектор, так как в формуле (4.1.37) имеется слагаемое  $\partial_\mu \epsilon^a$ . Ясно также, что и при переменном  $\epsilon^a$  величины  $f_{ab}^c$ ,  $g_{ab}$ , определяемые формулами (4.1.8), (4.1.15), образуют универсальные  $SU(n)$ -тензоры третьего и второго рангов. Кроме того, по повторяющимся нижним и верхним индексам можно производить суммирование (свертку), в результате которого понижается ранг тензоров.

При переменных  $\epsilon_a^a$  производные от векторов  $\partial_\mu H_a$ ,  $\partial_\mu G^a$  преобразуются, согласно (4.1.12), (4.1.13), по формулам

$$\begin{aligned} \delta \partial_\mu H_a &= -\epsilon^b f_{ba}^c \partial_\mu H_c - \partial_\mu \epsilon^b f_{ba}^c H_c, \\ \delta \partial_\mu G^a &= \epsilon^b f_{bc}^a \partial_\mu G^c + \partial_\mu \epsilon^b f_{bc}^a G^c. \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

Введем теперь ковариантные производные  $\mathcal{D}_\mu$  от  $SU(n)$ -векторов

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu H_a &= \partial_\mu H_a + g f_{ab}^c A_\mu^b H_c, \\ \mathcal{D}_\mu G^a &= \partial_\mu G^a + g f_{bc}^a A_\mu^b G^c \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

и покажем, что величины  $D_\mu H_a$  и  $D_\mu G^a$  преобразуются как  $SU(n)$ -векторы:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D}_\mu H_a &= -\epsilon^b f_{ba}^c \mathcal{D}_\mu H_c, \\ \delta D_\mu G^a &= \epsilon^b f_{bc}^a \mathcal{D}_\mu G^c. \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

Используя (4.1.45), (4.1.37), (4.1.12), (4.1.13), имеем

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D}_\mu H_a &= -\partial_\mu \epsilon^b f_{ba}^c H_c - \epsilon^b f_{ba}^c \partial_\mu H_c - \partial_\mu \epsilon^b f_{ab}^c H_c + \\ &+ g f_{ai}^b A_\mu^i \epsilon^d f_{ab}^c H_c - g f_{ab}^c A_\mu^b \epsilon^d f_{dc}^i H_i = \\ &= -\epsilon^b f_{ba}^c \partial_\mu H_c - g \epsilon^d A_\mu^i H_c \{ f_{ai}^b f_{bc}^d + f_{af}^b f_{fb}^c \}, \end{aligned}$$

откуда, согласно (1.1.30),

$$\delta \mathcal{D}_\mu H_a = -\epsilon^b f_{ba}^c (\partial_\mu H_c + g f_{cd}^d A_\mu^d H_d),$$

что и доказывает первую из формул (4.1.46). Аналогично может быть доказана и вторая из формул (4.1.46).

Нетрудно ввести ковариантные производные  $SU(n)$  тензоров высшего ранга. Например, ковариантная производная смешанного  $SU(n)$ -тензора второго ранга  $Q_a^b$  определяется формулой

$$\mathcal{D}_\mu Q_a^b = \partial_\mu Q_a^b + g f_{ac}^d A_\mu^c Q_d^b + g f_{cd}^b A_\mu^c Q_a^d. \quad (4.1.48)$$

Легко видеть, что ковариантное дифференцирование производится по обычным правилам:

$$\mathcal{D}_\mu Q_{a\dots}^b R_{c\dots}^d = Q_{a\dots}^b \mathcal{D}_\mu R_{c\dots}^d + R_{c\dots}^d \mathcal{D}_\mu Q_{a\dots}^b.$$

Ковариантная производная универсального  $SU(n)$  тензора  $f_{ab}^c$  равна нулю:

$$\mathcal{D}_\mu f_{ab}^c = 0. \quad (4.1.49)$$

Действительно, согласно (4.1.48), имеем

$$\mathcal{D}_\mu f_{ab}^c = -gA_\mu^d (f_{ad}^e f_{be}^c + f_{ab}^e f_{de}^c + f_{ba}^e f_{de}^c),$$

откуда, используя (1.1.30), мы и приходим к соотношению (4.1.49). Используя далее формулы (4.1.15), (4.1.49), имеем

$$\mathcal{D}_\mu g_{ab} = 0. \quad (4.1.50)$$

Покажем теперь, как с помощью калибровочного поля  $A_\mu^a$  (которое при переменном  $v$  не является  $SU(n)$ -вектором) и операций дифференцирования построить  $SU(n)$ -вектор. Вычислим с этой целью величину  $(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu) Q^a(x)$ , где  $Q^a$  — некоторый контравариантный  $SU(n)$ -вектор. Согласно (4.1.46), имеем

$$\mathcal{D}_\nu (\mathcal{D}_\mu Q^a) = \partial_\nu \mathcal{D}_\mu Q^a + g f_{de}^a A_\nu^d \mathcal{D}_\mu Q^e.$$

Подставляя сюда выражение (4.1.46) для  $\mathcal{D}_\mu Q^a$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu Q^a &= \partial_\nu \partial_\mu Q^a + g f_{bc}^a \partial_\nu A_\mu^b Q^c + g f_{bc}^a A_\mu^b \partial_\nu Q^c + \\ &+ g f_{de}^a A_\nu^d \partial_\mu Q^e + g^2 f_{de}^a A_\nu^d f_{bc}^e A_\mu^b Q^c, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu) Q^a &= g f_{bc}^a Q^c (\partial_\nu A_\mu^b - \partial_\mu A_\nu^b) + \\ &+ g^2 (f_{bc}^e f_{de}^a + f_{cd}^e f_{be}^a) A_\nu^d A_\mu^b Q^e \end{aligned}$$

или, используя (1.1.30),

$$(\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu) Q^a = -g F_{\mu\nu}^b f_{bc}^a Q^c, \quad (4.1.51)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c. \quad (4.1.52)$$

Так как левая часть этого равенства представляет собой  $SU(n)$ -вектор, а величина  $f_{bc}^a Q^c$  — смешанный  $SU(n)$ -тензор второго ранга, то  $F_{\mu\nu}^a$  представляет собой контравариантный  $SU(n)$ -вектор.

Таким образом, если  $F_{\mu\nu}^a \neq 0$ , то ковариантные дифференцирования некоммутативны.

Отметим, что ковариантные производные от  $F_{\mu\nu}^a$  удовлетворяют тождеству

$$\mathcal{D}_\rho F_{\mu\nu}^a + \mathcal{D}_\mu F_{\nu\rho}^a + \mathcal{D}_\nu F_{\rho\mu}^a = 0, \quad (4.1.53)$$

справедливость которого следует из формул (4.1.52), (4.1.46).

Покажем, что разность вторых ковариантных производных от поля  $\psi$  дается формулой

$$(D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu) \psi = ig F_{\mu\nu}^a T_a \psi, \quad (4.1.54)$$

где  $F_{\mu\nu}^a$  —  $SU(n)$ -вектор, определяемый формулой (4.1.52). Заметим с этой целью, что, согласно (4.1.35),

$$D_\nu D_\mu \psi = \partial_\nu D_\mu \psi - ig A_\nu^b T_b D_\mu \psi,$$

откуда, снова используя (4.1.35), имеем

$$\begin{aligned} D_\nu D_\mu \psi &= \partial_\nu \partial_\mu \psi - ig \partial_\nu (A_\mu^a T_a \psi) - ig A_\nu^b T_b \partial_\mu \psi - \\ &- g^2 A_\nu^b T_b A_\mu^a T_a \psi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu) \psi = -ig (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) T_a \psi - g^2 A_\nu^b A_\mu^a [T_b, T_a] \psi$$

и, следовательно, согласно (4.1.8), мы и приходим к формуле (4.1.54).

**4.1.4. Лагранжиан свободного калибровочного поля и полный лагранжиан.** Построим теперь лагранжиан свободного калибровочного поля. Будем при этом исходить из того, что этот лагранжиан, обозначаемый через  $\mathcal{L}_0$ , должен содержать только калибровочные поля  $A_\mu^a(x)$  и их пространственно-временные производные не выше первого порядка.

Из условий инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}_0$  по отношению к калибровочным преобразованиям и преобразованиям Лоренца следует, что он должен быть некоторой функцией от величины  $-\frac{1}{4} g_{ab} F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ , являющейся, согласно результатам предыдущего раздела, как  $SU(n)$ -инвариантом, так и лоренц-инвариантом. Если потребовать, чтобы уравнения поля обладали минимальной нелинейностью, то величину  $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$  и следует взять в качестве лагранжиана свободного калибровочного поля

$$\mathcal{L}_0(A^a, \partial_\mu A^a) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}. \quad (4.1.55)$$

Полный лагранжиан поля  $\psi$  и калибровочного поля  $A_\mu^a$ , согласно (4.1.38), равен

$$L = \mathcal{L}(\psi, D_\mu \psi) + \mathcal{L}_0(A^a, \partial_\mu A^a), \quad (4.1.56)$$

где  $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$  — лагранжиан свободного поля  $\psi$ ;  $D_\mu \psi$  — ковариантная производная поля  $\psi$  (см. (4.1.35)).

Выпишем уравнения движения полей  $\psi$  и  $A_\mu^a$ . Замечая, что, согласно (4.1.35),

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\right)_{\partial \psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - ig \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \psi} A_\mu^a T_a,$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi}\right)_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_\mu \psi}$$

$\left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi}\right)_\psi, \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\right)_{\partial \psi}\right)$  — производные от  $\mathcal{L}(\psi, D\psi)$  по  $\partial_\mu \psi$  и  $\psi$  при постоянных соответственно  $\psi$  и  $\partial_\mu \psi$ , (см. (1.1.5)) имеем

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu \psi} - \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial \psi} = -ig \frac{\partial \mathcal{L}(\psi, D\psi)}{\partial D_\mu \psi} A_\mu^a T_a. \quad (4.1.56)$$

Согласно (4.1.56), (4.1.40), уравнение движения поля  $A_\mu^a$  имеет вид

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0(A, \partial A)}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} - \frac{\partial \mathcal{L}_0(A, \partial A)}{\partial A_\nu^a} = g \tilde{\mathcal{F}}_a^\nu.$$

Так как вариации лагранжиана  $\mathcal{L}_0$ , связанные с вариациями  $\partial_\mu A$  и  $A$ , равны

$$\delta_{\partial A} \mathcal{L}_0 = -F_a^{\mu\nu} \delta \partial_\mu A_\nu^a,$$

$$\delta_A \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} g F_a^{\mu\nu} f_{bc}^a (\delta A_\mu^b A_\nu^c + A_\mu^b \delta A_\nu^c) = -g F_a^{\mu\nu} f_{bc}^a A_\nu^c \delta A_\mu^b,$$

то

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_\mu A_\nu^a} = F_a^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0(A, \partial A)}{\partial A_\nu^a} = -g F_b^{\mu\nu} f_{ac}^b A_\mu^c.$$

Поэтому

$$\partial_\mu F_a^{\nu\mu} = g I_a^\nu, \quad (4.1.57)$$

где

$$I_a^\nu = \tilde{\mathcal{F}}_a^\nu - f_{ac}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu}. \quad (4.1.58)$$

Эта величина равна, очевидно,

$$I_a^\nu = \frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu^a}. \quad (4.1.59)$$

Так как тензор  $F_a^{\nu\mu}$  антисимметричен по индексам  $\nu$  и  $\mu$ , то справедливо соотношение

$$\partial_\nu I_a^\nu = 0, \quad (4.1.60)$$

которое выражает закон сохранения обобщенного тока  $I_a^\nu$  и соответствующего ему заряда

$$Q_a = \int d^3x I_a^0(x). \quad (4.1.61)$$

Уравнения поля (4.1.57) можно переписать также в виде

$$\partial_\mu F_a^{\nu\mu} + g f_{ac}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu} = g \tilde{\mathcal{F}}_a^\nu$$

или, согласно определению ковариантной производной, в виде

$$\mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu} = g \tilde{\mathcal{F}}_a^\nu. \quad (4.1.62)$$

Обе части этого уравнения представляют собой  $SU(n)$ -векторы, так что это уравнение явно инвариантно по отношению к калибровочным преобразованиям.

Величины  $F_a^{\nu\mu}$  удовлетворяют тождеству

$$\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu} = 0. \quad (4.1.63)$$

Действительно, согласно (4.1.51), имеем

$$\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu} = \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu - \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu) F_a^{\nu\mu} = -\frac{1}{2} g F_{\nu\mu}^b f_{cb}^a F_a^{\nu\mu},$$

откуда (в силу антисимметрии  $f_{cb}^a$  по индексам  $b$  и  $c$ ) и следует (4.1.63).

Согласно (4.1.62), (4.1.63),  $SU(n)$ -вектор  $\tilde{\mathcal{F}}_a^\mu$  удовлетворяет следующему ковариантному «закону сохранения»:

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{\mathcal{F}}_a^\mu = 0. \quad (4.1.64)$$

Заметим, что этот закон следует также из уравнения движения поля  $\psi$  (см. (4.1.56)).

В заключение этого раздела отметим аналогию между тензорным анализом калибровочных полей и тензорным анализом общей теории относительности (см. гл. VII). Неоднородный закон преобразования калибровочных полей  $A_\mu^a(x)$  аналогичен неоднородному закону преобразования символов Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ , а операция ковариантного дифференцирования (4.1.46), определенная с помощью калибровочных полей  $A_\mu^a$ , аналогична ковариантному дифференцированию в общей теории относительности, определенной с помощью символов Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ . Величины  $F_{\mu\nu}^a$  аналогичны компонентам тензора кривизны  $R_{\mu\nu;\lambda\rho}$ , а соотношения типа (4.1.52) лежат в основе определения тензора  $R_{\mu\nu;\lambda\rho}$ . Наконец, формулы (4.1.53) аналогичны тождествам Бианки в общей теории относительности.

**4.1.5. Калибровочные поля, связанные с дираковскими полями, обладающими внутренней симметрией.** Мы рассмотрим теперь калибровочные поля, связанные с дираковскими полями, обладающими внутренней симметрией (см. раздел 4.1.1), связанной с группой  $SU(n)$ . Полный лагранжиан дираковских

и калибровочных полей имеет, согласно (4.1.2), (4.1.56), вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \tilde{D}_\mu + m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (4.1.65)$$

где

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ig A_\mu^a T_a \psi, \quad (4.1.66)$$

$$\bar{\psi} \tilde{D}_\mu \equiv D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + ig A_\mu^a T_a^* \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + ig \bar{\psi} T_a A_\mu^a.$$

Заметим, что в часть лагранжиана, описывающего взаимодействие дираковского и калибровочного полей, поле  $A_\mu^a$  входит линейно. Поэтому, согласно (4.1.39), (4.1.32),

$$\tilde{\mathcal{J}}_a^\mu = \mathcal{J}_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi.$$

Лагранжиан (4.1.65) можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu + m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + g \mathcal{J}_a^\mu A_\mu^a. \quad (4.1.67)$$

Лагранжиан (4.1.67) полностью аналогичен лагранжиану (4.1.29) электронно-позитронного и электромагнитного полей, причем  $F_{\mu\nu}^a(x)$  играет роль электромагнитного поля, а  $g$  — электрического заряда. Можно сказать также, что константа  $g$  играет роль константы взаимодействия между полями  $\psi$  и  $A_\mu^a$ .

Согласно (1.1.5), (4.1.62), уравнения движения для полей  $\psi$  и  $A_\mu^a$  имеют вид

$$\mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu} = g \mathcal{J}_a^\nu, \quad (4.1.68)$$

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = 0, \quad \bar{\psi} (i\gamma^\mu \tilde{D}_\mu + m) = 0,$$

где  $\mathcal{D}_\mu F_a^{\nu\mu}$  и  $D_\mu \psi$  определяются формулами (4.1.66), (4.1.46). Поэтому эти уравнения движения можно записать также в виде

$$\partial_\mu F_a^{\nu\mu} = g I_a^\nu, \quad (4.1.69)$$

$$\{i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig A_\mu^a T_a) - m\} \psi = 0,$$

где

$$I_a^\nu = \mathcal{J}_a^\nu - f_{ac}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu} = \bar{\psi} \gamma^\nu T_a \psi - f_{ac}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu}. \quad (4.1.70)$$

Величины  $I_a^\mu$ , согласно этим уравнениям, являются сохраняющимися токами,

$$\partial_\mu I_a^\mu = 0, \quad (4.1.71)$$

Обратим внимание на то, что в выражение для сохраняющегося тока входит два слагаемых, одно из которых ( $\mathcal{J}_a^\nu$ ) связано с дираковским полем  $\psi$ , а другое ( $-f_{ac}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu}$ ) — с калибровочным полем  $A_\mu^a$ . В этом заключается различие между абелевым электромагнитным полем и неабелевым калибровочным полем: в случае электромагнитного поля слагаемого тока  $I_a^\nu$ , связанного с самим электромагнитным полем, нет. Поэтому уравнения движения «свободного» калибровочного поля (т. е. поля в отсутствие поля  $\psi$ ) имеют вид

$$\partial_\mu F_a^{\nu\mu} = -g f_{ac}^b A_\mu^c F_b^{\nu\mu}. \quad (4.1.72)$$

Это уравнение показывает, что неабелево калибровочное поле взаимодействует само с собой, наподобие гравитационного поля, причем та же константа  $g$  характеризует самодействие поля (поэтому слово «свободное» взято в кавычки).

Заметим, что в выражение для  $D_\mu \psi$  входит матрица  $A_\mu^a T_a \equiv \hat{A}_\mu$  со шпуром, равным нулю,  $\text{tr} \hat{A}_\mu = 0$ . Если генераторы  $T_a$  выбраны так, чтобы выполнялось соотношение (см. раздел 4.1.1)

$$\text{tr} T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab},$$

то  $g_{ab} = \delta_{ab}$  (в этом случае отсутствует различие между ковариантными и контравариантными  $SU(n)$ -тензорами). При таком выборе генераторов  $T_a$  лагранжиан (4.1.65) может быть записан в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \tilde{D}_\mu + m) \psi - \frac{1}{2} \text{tr} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu}, \quad (4.1.73)$$

где  $D_\mu = \partial_\mu - ig \hat{A}_\mu$  и  $\hat{F}_{\mu\nu} = T_a F_{\mu\nu}^a$  (шпур берется в пространстве, в котором действуют матрицы  $T_a$ ). Матрица  $\hat{F}_{\mu\nu}$ , согласно (4.1.52), (4.1.8), может быть выражена через  $\hat{A}_\mu$ :

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - ig [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]. \quad (4.1.74)$$

Используя формулы (4.1.37), (4.1.74), видим, что матрицы  $\hat{A}_\mu$  и  $\hat{F}_{\mu\nu}$  при бесконечно малых калибровочных преобразованиях преобразуются по формулам

$$\hat{A}_\mu \rightarrow \hat{A}'_\mu = \hat{A}_\mu + \delta \hat{A}_\mu, \quad \hat{F}_{\mu\nu} \rightarrow \hat{F}'_{\mu\nu} = \hat{F}_{\mu\nu} + \delta \hat{F}_{\mu\nu},$$

где

$$\delta \hat{A}_\mu = -i [\hat{\epsilon}, \hat{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \hat{\epsilon}, \quad (4.1.75)$$

$$\delta \hat{F}_{\mu\nu} = -i [\hat{\epsilon}, \hat{F}_{\mu\nu}]$$

и  $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon^c(x) T_c$  — произвольная бесконечно малая матрица со шпуром равным нулю.

Заметим в заключение этого раздела, что если поля  $F_{\mu\nu}^a$ ,  $A_\mu^a$  рассматривать как независимые, то лагранжиан (4.1.65) может быть записан в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^\mu \tilde{D}_\mu + m) \psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \{ \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \}. \quad (4.1.76)$$

Этот лагранжиан приводит к уравнениям поля первого порядка для величин  $F_{\mu\nu}^a$ ,  $A_\mu^a$  (эквивалентным уравнениям поля для лагранжиана (4.1.65)), причем варьирование по  $F_{\mu\nu}^a$  приводит к уравнению (4.1.52), которое в формализме уравнений поля второго порядка являлось определением  $F_{\mu\nu}^a$ .

## § 4.2. Квантование калибровочного поля

**4.2.1. Лагранжиан калибровочного и фермионного полей в лоренцевской калибровке.** Перейдем к построению квантовой теории неабелевых калибровочных полей, взаимодействующих с фермионными полями, которая играет важную роль в теории сильного взаимодействия (хромодинамика). В случае группы  $SU(3)$  неабелевым калибровочным полем является глюонное поле. Поэтому, имея в виду приложения, мы часто вместо калибровочных полей будем говорить о глюонных полях, а вместо фермионных полей — о кварковых полях (см. гл. 5), хотя развиваемая ниже теория относится к произвольным калибровочным и фермионным полям, связанным с произвольной группой  $SU(n)$ . Для получения уравнений полей необходимо рассматривать калибровочные поля  $A_\mu^a$ ,  $F_{\mu\nu}^a$  и ферми-поля  $q$ ,  $\bar{q}$  (мы не выписываем явно спиновый и цветовой индексы, на которые действуют матрицы  $\gamma^\mu$ ,  $T^a$ ) \* (аналогично случаю квантовой электродинамики) как независимые переменные. Будем исходить из лагранжиана (4.1.76), приводящего к уравнениям первого порядка для калибровочного поля, обозначаемого через  $\mathcal{L}_a$ :

$$\mathcal{L}_a = \mathcal{L}_G + \frac{1}{2} \bar{q} (i\gamma^\mu D_\mu - m) q + \frac{1}{2} q (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m) \bar{q},$$

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2} F^{\alpha\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g (A_\mu \times A_\nu)^a), \quad (4.2.1)$$

\* Индекс, связанный с сортом кварка (см. § 5.1), мы опускаем, поскольку в теории сильного взаимодействия сорт кварка сохраняется и, следовательно, этот индекс легко восстанавливается.

где

$$D_\mu q = \partial_\mu q - iq A_\mu^a T_a q, \quad D_\mu \bar{q} = \partial_\mu \bar{q} + ig A_\mu^a \tilde{T}_a \bar{q}$$

и  $(A \times B)^a = f^{abc} A^b B^c$  (матрицы  $T_a$  действуют на цветовой индекс). Этот лагранжиан приводит к калибровочно инвариантным уравнениям движения, совпадающим с уравнениями движения классического калибровочного и фермионного полей. Однако, как и в случае квантования электромагнитного поля, мы не можем выразить все переменные  $A_\mu^a$ ,  $F_{\mu\nu}^a$  в силу калибровочной инвариантности лагранжиана через динамически независимые переменные. Чтобы устранить эту трудность, мы, как и в § 2.3, должны нарушить калибровочную инвариантность, наложив на поля  $A_\mu^a$  некоторое дополнительное условие. На поля  $A_k^a$  можно наложить условие пространственной поперечности

$$\partial^k A_k^a = 0.$$

Так же как и в квантовой электродинамике, будем говорить в этом случае, что поля  $A_\mu^a$  относятся к кулоновской (радиационной) калибровке. Мы видели, что в квантовой электродинамике в случае кулоновской калибровки не возникает «духовых» состояний, т. е. состояний, соответствующих скалярным и продольным фотонам, имеющимся в лоренцевской калибровке. Однако в кулоновской калибровке отсутствует явная релятивистская инвариантность теории, тогда как в лоренцевской калибровке такая инвариантность имеет место. Аналогичная ситуация возникает и в теории неабелевых калибровочных полей. Именно в кулоновской калибровке не возникает никаких нефизических («духовых») состояний, но теория теряет явную релятивистскую инвариантность. Если же использовать лоренцевскую калибровку, то теория на всех этапах будет явно релятивистски инвариантной, однако при этом возникнут нефизические «духовые» состояния. Несмотря на наличие «духовых» состояний, в силу явной релятивистской инвариантности теории в лоренцевской калибровке мы ограничимся здесь построением квантовой теории неабелевых калибровочных полей в лоренцевской калибровке (построение квантовой теории в кулоновской калибровке см. в [3, 4], [5]).

Как мы уже говорили, для построения квантовой теории необходимо нарушить калибровочную инвариантность лагранжиана (4.2.1). С этой целью мы добавим к лагранжиану  $\mathcal{L}_a$  слагаемое  $\mathcal{L}_b$  (сравним с п. 2.3.2)

$$\mathcal{L}_b = -\frac{1}{\xi} (\varphi^a \partial^\nu A_\nu^a - \frac{1}{2} \varphi^a \varphi^a), \quad (4.2.2)$$



где  $\xi$  — произвольная константа;  $-\xi^{-1}\varphi^a$  — новое поле, сопряженное полю  $A_0^a$ ,  $-\xi^{-1}\varphi^a = \partial \mathcal{L}_b / \partial \partial_0 A_0^a$  (при  $\xi = \infty$  сопряженное поле обращается в нуль). Таким образом, исходным при построении квантовой теории калибровочного поля будет лагранжиан  $\mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b$ , который будем называть лагранжианом в лоренцевской калибровке. Варьирование этого лагранжиана по  $\varphi^a$  приводит к уравнениям поля

$$\varphi^a = \partial^\nu A_\nu^a.$$

В квантовой электродинамике аналогичная величина  $\varphi = \partial^\nu A_\nu$  удовлетворяла уравнению для свободного поля  $\partial^\nu \partial_\nu \varphi = 0$ , благодаря чему можно было показать, что «духовые» состояния (т. е. скалярные и продольные фотоны) не дают вклада в условие унитарности для  $S$ -матрицы между физическими состояниями. В данном случае ситуация осложняется, так как поля  $\varphi^a$  не удовлетворяют уравнениям движения для свободного поля, а удовлетворяют более сложным нелинейным уравнениям, содержащим само поле  $A_\mu^a$ .

Чтобы построить унитарную  $S$ -матрицу, необходимо ввести добавочные фермионные поля. Разъясним, как вводятся эти поля. С этой целью заметим, что лагранжиан  $\mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b$  инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$\delta A_\mu^a \equiv A_\mu^{\prime a} - A_\mu^a \equiv \mathcal{Q}_\mu \omega^a, \quad \delta \varphi^a \equiv \varphi^{\prime a} - \varphi^a = 0, \quad (4.2.3)$$

$$\delta q \equiv q' - q = ig\omega^a T_a q, \quad \delta \bar{q} \equiv \bar{q}' - \bar{q} = -iq\omega^a T_a \bar{q}$$

(здесь  $\mathcal{Q}_\mu \omega^a = \partial_\mu \omega^a + g(A_\mu \times \omega)^a$ ) только в том случае, если величина  $\omega^a$  удовлетворяет уравнениям

$$\partial^\mu \mathcal{Q}_\mu \omega^a = 0 \quad (4.2.4)$$

(это уравнение определяет калибровочные функции  $\omega^a(x)$  в лоренцевской калибровке). Поэтому для определения величин  $\omega^a(x)$  необходимо (в отличие от электродинамики, где  $\partial^\mu \partial_\mu \omega = 0$ ) знать структуру калибровочного поля  $A_\mu^a$ . Таким образом, для сохранения калибровочной инвариантности в рамках лоренцевской калибровки мы должны считать  $\omega^a$  некоторым новым вещественным полем, взаимодействующим с калибровочным полем. Это поле мы будем обозначать через  $c^a(x)$ . Чтобы получить для поля  $c^a(x)$  уравнения движения  $\partial^\mu \mathcal{Q}_\mu c^a = 0$ , мы должны, кроме того, ввести поле  $\bar{c}^a$  и сопоставить полям  $c^a$  и  $\bar{c}^a$  лагранжиан  $\mathcal{L}_c = \partial^\mu \bar{c}^a \mathcal{Q}_\mu c^a$ . Таким образом, мы получим для эрмитовых полей  $c_a$  и  $\bar{c}_a$  уравнения поля второго порядка [6]. Мы же хотим иметь уравнения первого порядка,

так как при этом применение формализма квантования, развитого в § 1.5, позволит построить квантовую теорию калибровочного поля. Поэтому в качестве лагранжиана новых полей  $\mathcal{L}_c$  мы выберем лагранжиан

$$\mathcal{L}_c = -i\bar{b}_\mu^a \mathcal{Q}^\mu c^a - ib_\mu^a \partial^\mu \bar{c}^a + i\bar{b}_\mu^a b^{a\mu}, \quad (4.2.5)$$

$$\mathcal{Q}^\mu c^a = \partial^\mu c^a + g(A^\mu \times c)^a,$$

где  $b_\mu^a$  и  $\bar{b}_\mu^a$  — эрмитовые поля, сопряженные эрмитовым полям  $\bar{c}^a$  и  $c^a$ . Все эти поля мы будем считать фермионными (по этой причине в формуле для  $\mathcal{L}_c$  введен множитель  $i$ , так как поля  $b_\mu, c$  считаются вещественными), несмотря на то, что они с точки зрения группы Лоренца являются скалярными и векторными. Фермионный характер этих полей необходим для обеспечения калибровочной инвариантности теории в рамках лоренцевской калибровки (см. ниже). В формализме второго порядка лагранжиан  $\mathcal{L}_c$  эквивалентен лагранжиану  $\mathcal{L}_c = i\partial^\mu \bar{c}^a \mathcal{Q}_\mu c^a$ .

Таким образом, будем окончательно исходить из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_c, \quad (4.2.6)$$

где величины  $\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b, \mathcal{L}_c$  определяются формулами (4.2.1), (4.2.2), (4.2.5). Этот лагранжиан мы будем называть эффективным лагранжианом. Подчеркнем, что лагранжиан  $\mathcal{L}_b$  нарушает общую калибровочную инвариантность, а лагранжиан  $\mathcal{L}_c$  восстанавливает калибровочную инвариантность в рамках лоренцевской калибровки (см. ниже) с калибровочными функциями, являющимися динамическими переменными.

Зная лагранжиан полей, мы можем, согласно § 1.5, установить перестановочные соотношения и сформулировать уравнения движения для полей. С этой целью заметим, что кинематическая часть действия, т. е. часть действия, содержащая временные производные, имеет вид

$$W_K = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left( -F^{a0k} \partial_0 A_k^a - \frac{1}{\xi} \varphi^a \partial_0 A_0^a - i\bar{b}_0^a \partial_0 c^a - i\bar{b}_0^a \partial_0 \bar{c}^a + \frac{i}{2} \bar{q} \gamma^0 \partial_0 q + \frac{i}{2} q \gamma^0 \partial_0 \bar{q} \right).$$

Заметим, что бозе-поля  $F_{0k}^a, A_\mu^a, \varphi^a$  и ферми-поля (грассмановы)  $b_0^a, \bar{b}_0^a, c^a, \bar{c}^a, q, \bar{q}$ , определяющие кинематическую часть действия, являются динамически независимыми. Величина  $W_K$  инвариантна по отношению к вариациям полей, для которых  $\delta A_\mu^a, \delta F_{0k}^a, \delta \varphi^a$  представляют собой произвольные функции  $x$ , вариации  $\delta b_0^a, \delta \bar{b}_0^a, \delta c^a, \delta \bar{c}^a, \delta q, \delta \bar{q}$  — произвольные, зависящие

от  $x$  грассмановы функции, т. е. функции антикоммутирующие между собой и со всеми фермионными полями. Построив согласно § 1.3 генератор этих вариаций и заменив скобки Пуассона на коммутатор, мы приходим к следующим перестановочным соотношениям (см. раздел 1.5.2) для операторов поля:

$$\begin{aligned} [F_{0k}^a(x), A^{bl}(x')]_{t=t'} &= i\delta_k^l \delta_{ab} \delta(x-x'), \quad [\varphi^a(x), A_0^b(x')]_{t=t'} = \\ &= i\xi \delta_{ab} \delta(x-x'), \quad \{\bar{b}_0^a(x), c^b(x')\}_{t=t'} = -\delta_{ab} \delta(x-x'), \\ \{b_0^a(x), \bar{c}^b(x')\}_{t=t'} &= -\delta_{ab} \delta(x-x'), \\ \{q(x), \bar{q}(x')\}_{t=t'} &= \gamma^0 \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Остальные перестановочные соотношения являются тривиальными.

Перейдем теперь к установлению уравнений движения для калибровочных и фермионных полей. Варьирование лагранжиана по бозе-полям  $F_{\mu\nu}^a, A_\mu^a, \varphi^a$  приводит (с учетом одновременных перестановочных соотношений) к уравнениям поля

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g(A_\mu \times A_\nu)^a, \quad \varphi^a = \partial^\mu A_\mu^a, \quad (4.2.8)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\xi} \partial_\nu \varphi^a + g(A^\mu \times F_{\mu\nu})^a + ig(\bar{b}_\nu \times c)^a + j_\nu^a = 0,$$

где

$$j_a^\nu = g\bar{q}\gamma^\nu T_a q. \quad (4.2.9)$$

Варьирование лагранжиана по ферми-полям  $b_\mu^a, \bar{b}_\mu^a, c^a, \bar{c}^a, q, \bar{q}$  приводит к уравнениям поля

$$\begin{aligned} b_\mu^a &= \mathcal{D}_\mu c^a, \quad \bar{b}_\mu^a = -\partial_\mu \bar{c}^a, \quad \partial^\mu b_\mu^a = 0, \quad \mathcal{D}^\mu \bar{b}_\mu^a = 0, \\ (i\gamma^\mu D_\mu - m)q &= 0, \quad (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m)\bar{q} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Полученные уравнения включают в себя как собственно уравнения поля для динамически независимых переменных, так и уравнения связи, которые имеют вид

$$\begin{aligned} b_k^a &= \mathcal{D}_k c^a, \quad \bar{b}_k^a = -\partial_k \bar{c}^a, \\ F_{kl}^a &= \partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a + g(A_k \times A_l)^a, \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

**4.2.2. Инвариантность теории по отношению к калибровочным преобразованиям.** Уравнения движения и перестановочные соотношения инвариантны, как легко видеть, к калибровочным преобразованиям с  $\omega^a(x) = \text{const}$ . Если операторы  $Q^a \equiv \{F_{\mu\nu}^a, A_\mu^a, \varphi^a, b_\mu^a, \bar{b}_\mu^a, c^a, \bar{c}^a\}$  по индексу  $a$  преобразуются как  $SU(n)$ -векторы

$$\delta Q^a = Q^a - Q^a = g(Q \times \omega)^a, \quad (4.2.12)$$

а операторы  $q, \bar{q}$  преобразуются согласно закону

$$\delta q = q' - q = ig\omega^a T_a q, \quad \delta \bar{q} = \bar{q}' - \bar{q} = -ig\omega^a \bar{T}_a \bar{q}, \quad (4.2.13)$$

то рассматриваемые преобразования оставляют инвариантным лагранжиан полей (4.2.6) и, следовательно, представляют собой преобразования внутренней симметрии. С этой симметрией связаны законы сохранения 4-токов  $I_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, n^2 - 1$ )

$$\begin{aligned} gI_\mu^a &= j_\mu^a + g(F_{\mu\nu} \times A^\nu)^a + \frac{g}{\xi} (\varphi \times A_\mu)^a + ig(\bar{b}_\mu \times c)^a + \\ &+ ig(b_\mu \times \bar{c})^a, \quad \partial^\mu I_\mu^a = 0. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Покажем, что уравнения движения и перестановочные соотношения инвариантны также по отношению к однопараметрической группе нелинейных преобразований динамически независимых бозе-полей

$$\delta A_0^a = i\xi b_0^a, \quad \delta A_l^a = i\xi (\partial_l c^a + g(A_l \times c)^a), \quad (4.2.15)$$

$$\delta F_{0l}^a = -i\xi g(c \times F_{0l})^a, \quad \delta \varphi^a = 0$$

и динамически независимых ферми-полей

$$\delta c^a = -\frac{i}{2} \xi g(c \times c)^a, \quad \delta \bar{c}^a = -\frac{1}{\xi} \xi \varphi^a, \quad \delta b_0^a = 0,$$

$$\delta \bar{b}_0^a = \xi (\partial^l F_{0l}^a + g(A^l \times F_{0l})^a - ig(\bar{b}_0 \times c)^a - j_0^a),$$

$$\delta q = -\xi g c^a T_a q, \quad \delta \bar{q} = \xi g c^a \bar{T}_a \bar{q}, \quad (4.2.15')$$

где  $\xi$  — произвольный не зависящий от  $x$  параметр, антикоммутирующий с ферми-полями  $\{\xi, b_\mu^a\} = \{\xi, c^a\} = \{\xi, q\} = 0$  и, кроме того, удовлетворяющий условиям  $\xi^2 = 0, \xi = \xi^*$ . Последнее условие означает, что  $(\xi A)^+ = A^+ \xi^* = A^+ \xi$ , где  $A$  — произвольный оператор. Эти преобразования связывают бозе-поля  $A_\mu^a, F_{0l}^a, \varphi^a$  с ферми-полями  $b_0^a, \bar{b}_0^a, c^a, \bar{c}^a$ . Такая связь оказывается возможной по той причине, что параметр  $\xi$  вместе с ферми-полями (в классическом случае) образуют грассманову алгебру. Именно при преобразовании бозе-полей ферми-поля ( $b$  или  $c$ ) входят вместе с параметром  $\xi$  четное число раз, а при преобразовании ферми-полей параметр  $\xi$  вместе с ферми-полями входит нечетное число раз. Заметим, что эти преобразования аналогичны преобразованиям суперполей (см. гл. 8).

Преобразования (4.2.15), (4.2.15') по своей форме релятивистски неинвариантны. Однако, если воспользоваться уравнениями поля, то эти преобразования приобретают релятивистски инвариантный вид:

для бозонных полей

$$\delta A_\mu^a = i\zeta b_\mu^a, \delta F_{\mu\nu}^a = -i\zeta g (c \times F_{\mu\nu})^a, \delta\varphi^a = 0, \quad (4.2.16)$$

для фермионных полей

$$\begin{aligned} \delta c^a &= -\frac{i}{2} \zeta g (c \times c)^a, \delta \bar{c}^a = -\frac{1}{\xi} \zeta \varphi^a, \\ \delta \bar{b}_\mu^a &= \frac{1}{\xi} \zeta \partial_\mu \varphi^a, \\ \delta b_\mu^a &= 0, \delta q = -\zeta g c^a T_a q, \delta \bar{q} = g \zeta c^a \tilde{T}_a \bar{q}. \end{aligned} \quad (4.2.16')$$

Чтобы убедиться в инвариантности теории по отношению к преобразованиям (4.2.16), (4.2.16'), вычислим вариацию величин, входящих в лагранжиан (4.2.6) и в уравнения поля. Согласно (4.2.16), (4.2.16'), имеем

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D}_\mu c^a &= -\zeta \frac{i}{2} g \mathcal{D}_\mu (c \times c)^a + \zeta i g (\mathcal{D}_\mu c \times c)^a + \\ &+ \zeta i g ((b_\mu - \mathcal{D}_\mu c) \times c)^a, \end{aligned}$$

а так как  $f^{abc} = -f^{acb}$  и  $\{c, c\} = 0$ , то

$$\delta \mathcal{D}_\mu c^a = \zeta i g ((b_\mu - \mathcal{D}_\mu c) \times c)^a. \quad (4.2.17)$$

Поэтому, учитывая (4.2.16'), (4.2.17), имеем

$$\delta (b_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) = -\zeta i g ((b_\mu - \mathcal{D}_\mu c) \times c)^a. \quad (4.2.18)$$

Далее

$$\begin{aligned} \delta (\bar{b}_\mu^a + \partial_\mu \bar{c}^a) &= 0, \delta \partial^\mu b_\mu^a = 0, \\ \delta (\varphi^a - \partial^\mu A_\mu^a) &= -i\zeta \partial^\mu b_\mu^a. \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

Снова, учитывая (4.2.16), (4.2.16'), получаем

$$\begin{aligned} \delta \{F_{\mu\nu}^a - \partial_\mu A_\nu^a + \partial_\nu A_\mu^a - g (A_\mu \times A_\nu)^a\} &= -i\zeta \mathcal{D}_\mu (b_\nu^a - \mathcal{D}_\nu c^a) + \\ &+ i\zeta \mathcal{D}_\nu (b_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) - i\zeta \{ \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu c^a - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu c^a + g (c \times F_{\mu\nu})^a \}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в силу (4.1.51) обращается в нуль, поэтому

$$\begin{aligned} \delta \{F_{\mu\nu}^a - \partial_\mu A_\nu^a + \partial_\nu A_\mu^a - g (A_\mu \times A_\nu)^a\} &= \\ = -i\zeta \mathcal{D}_\mu (b_\nu^a - \mathcal{D}_\nu c^a) + i\zeta \mathcal{D}_\nu (b_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a). \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D}^\mu \bar{b}_\mu^a &= \zeta \mathcal{D}^\mu \left\{ \mathcal{D}^\lambda F_{\lambda\mu}^a + \frac{1}{\xi} \partial_\mu \varphi^a + i g (\bar{b}_\mu \times c)^a \right\} - \\ - i\zeta g (\mathcal{D}^\mu \bar{b}_\mu \times c)^a - i\zeta g (\bar{b}_\mu \times (\mathcal{D}^\mu c - b^\mu))^a, \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\xi} \partial_\nu \varphi^a + i g (\bar{b}_\nu \times c)^a + j_\nu^a \right\} = \\ = -i\zeta g \left\{ -(\mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu} \times c)^a - \frac{1}{\xi} (\partial_\nu \varphi \times c)^a - i g ((\bar{b}_\nu \times c) \times c)^a - \right. \\ \left. - (j_\nu \times c)^a \right\} - i\zeta g ((\mathcal{D}^\mu c - b^\mu) \times F_{\mu\nu})^a. \end{aligned}$$

При доказательстве первой из этих формул мы учли, что  $\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}^\lambda F_{\mu\nu}^a = 0$ , а при доказательстве второй формулы учитывалось свойство (1.1.30) структурных постоянных

$$f^{cab} f^{bde} + f^{acb} f^{dae} + f^{adb} f^{bce} = 0$$

и закон преобразования тока

$$\delta j_\nu^a = i\zeta g (j_\nu \times c)^a,$$

вытекающий из (4.2.9), (4.2.16').

Наконец, используя (4.2.16'), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \delta (i\gamma^\mu D_\mu - m) q &= \\ = i\zeta g \gamma^\mu (b_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) T_a q - \zeta g C^a T_a (i\gamma^\mu D_\mu - m) q, \\ \delta (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m) \bar{q} &= -i\zeta g (b_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) \tilde{\gamma}^\mu \tilde{T}_a \bar{q} + \\ + \zeta g c^a \tilde{T}_a (i\tilde{\gamma}^\mu D_\mu + m) \bar{q}. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

С помощью этих формул легко вычислить вариацию функции Лагранжа  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b + \mathcal{L}_c$ . Учитывая, что  $\delta \{F_{\mu\nu}^a, F^{a\mu\nu}\} = 0$ , имеем, согласно (4.2.16), (4.2.20), (4.2.22),

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_a &= -\frac{i}{2} \zeta g (F^{\mu\nu} \times c)^a (F_{\mu\nu}^a - \partial_\mu A_\nu^a + \partial_\nu A_\mu^a - g (A_\mu \times A_\nu)^a) + \\ &+ \frac{i}{2} \zeta F^{a\mu\nu} (\mathcal{D}_\nu (b_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) - \mathcal{D}_\mu (b_\nu^a - \mathcal{D}_\nu c^a)) + \\ &+ i\zeta g (b_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) \frac{1}{2} (\bar{q} \gamma^\mu T_a q - q \tilde{\gamma}^\mu \tilde{T}_a \bar{q}). \end{aligned}$$

Вариация  $\mathcal{L}_b$  равна

$$\delta \mathcal{L}_b = -\frac{i}{\xi} \zeta \varphi^a \partial^\nu b_\nu^a.$$

Вариация  $\mathcal{L}_c$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_c &= -\frac{i}{\xi} \zeta \mathcal{D}^\mu (b_\mu \varphi^a) - \frac{i}{\xi} \partial^\mu b_\mu^a \cdot \zeta \varphi^a + \\ &+ \frac{i}{\xi} \zeta \mathcal{D}^\mu \varphi^a (b_\mu^a - \mathcal{D}_\mu c^a) - \zeta g \bar{b}_\mu^a ((b^\mu - \mathcal{D}^\mu c) \times c)^a. \end{aligned}$$

В силу уравнений поля (4.2.8), (4.2.10)

$$\delta \mathcal{L}_a = \delta \mathcal{L}_b = 0, \delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L}_c = -\frac{i}{\xi} \zeta \mathcal{D}^\mu (\varphi^a b_\mu^a). \quad (4.2.23)$$

Таким образом, вариация лагранжиана сводится к дивергенции некоторой величины и, следовательно, уравнения поля инвариантны по отношению к рассматриваемым преобразованиям. Заметим, что инвариантность уравнений поля также непосредственно вытекает из формул (4.2.18), (4.2.22). Действительно, вариации (4.2.18) — (4.2.22) являются линейными и однородными функциями самих варьируемых величин, поэтому в силу уравнений поля обращаются в нуль. Также легко убедиться в инвариантности перестановочных соотношений. Необходимо отметить, что эта инвариантность достигается только благодаря тому, что поля  $c$ ,  $\bar{c}$  (и  $b_\mu$ ,  $\bar{b}_\mu$ ) являются ферми-полями, а не бозе-полями. Это следует из того, что если бы эти поля были бозевскими, то вариация поля  $c^a$  обращалась бы в нуль (в силу того, что  $f^{abc} = -f^{acb}$ ) и достичь инвариантности уравнений поля по отношению к преобразованиям (4.2.16) было бы невозможно. Преобразования (4.2.16), оставляющие инвариантным лагранжиан (4.2.6), называются преобразованиями Бекки, Руэ, Стора [7], Тютинна [8].

Можно показать, что из инвариантности лагранжиана (4.2.6) следует закон сохранения 4-тока

$$\partial_\mu s^\mu(x) = 0, \quad (4.2.24)$$

где

$$s^\mu(x) = -F^{a\mu\nu} b_\nu^a - \frac{1}{\xi} \varphi^a b^{a\mu} - \frac{i}{2} g \bar{b}^{a\mu} (c \times c)^a - g c^a \bar{q} \gamma^\mu T_a q \quad (4.2.25)$$

и, следовательно, закон сохранения заряда  $Q = \int d^3x s^0(x)$ . Величина  $G = i\xi Q$  представляет собой генератор преобразований (4.2.16), т. е.

$$\delta\mathcal{X} = i[G, \mathcal{X}], \quad G = i\xi Q = i\xi \int d^3x s^0(x), \quad (4.2.25')$$

где  $\mathcal{X}$  — любая из величин  $A_\mu^a, c, \bar{c}, b, \bar{b}, q, \bar{q}$ . Отметим, что, в отличие от известных нам выражений для токов, в ток  $s^\mu(x)$  входит не четное, а нечетное число фермионных операторов. Это связано с тем, что преобразования (4.2.16), (4.2.16') — по сути преобразования суперсимметрии (см. гл. 8), групповым параметром  $\xi$  которых является элемент грассмановой алгебры.

Обратим внимание на то, что рассмотренные преобразования в силу уравнений поля можно интерпретировать как калибровочные преобразования полей  $A_\mu^a, F_{\mu\nu}^a$  (см. раздел 4.2.1) с калибровочной функцией

$$x) = i\xi c^a(x), \quad (4.2.26)$$

дополненные преобразованиями ферми-полей  $b, \bar{b}, c, \bar{c}$ . Таким образом, можно сказать, что наличие «духовых» ферми-полей, описываемых лагранжианом  $\mathcal{L}_c$ , восстанавливает калибровочную инвариантность теории, описываемой лагранжианом  $\mathcal{L}_a + \mathcal{L}_b$  на классе калибровочных преобразований, определяемых полем  $c^a(x)$ . Напомним, что часть лагранжиана  $\mathcal{L}_b$  (нарушающая инвариантность теории с одним только лагранжианом  $\mathcal{L}_a$ ) была необходима в квантовой теории для того, чтобы можно было выразить все переменные поля через динамически независимые переменные.

**4.2.3. Квантовая теория калибровочных и фермионных полей в пренебрежении взаимодействием.** Лагранжиан  $\mathcal{L}_a$  содержит слагаемые, пропорциональные константе  $g$ , описывающие эффекты самодействия калибровочного поля и эффекты взаимодействия калибровочного поля с дираковскими полями. Кроме того, константа  $g$  входит в лагранжиан  $\mathcal{L}_c$  и соответствующее слагаемое описывает взаимодействие калибровочного поля с фермионными полями  $\bar{c}^a, c^a, \bar{b}_\mu^a, b_\mu^a$ .

При построении теории возмущений естественно начать с рассмотрения свободного поля, которому соответствует приближение  $g = 0$ . В дальнейшем, как и в квантовой электродинамике, мы будем строить теорию возмущений по степеням величины  $g$ , которая будет играть роль константы связи, аналогичной величине  $e$  в квантовой электродинамике, которая описывает взаимодействие электромагнитного и электронно-позитронного полей. Таким образом, исходным приближением будет приближение свободных полей.

Вместо уравнения поля (4.2.8), (4.2.10) первого порядка для величин  $F, A, b, \bar{b}, c, \bar{c}, \varphi$  легко сформулировать уравнения поля второго порядка для операторов  $A_\mu^a, c^a, \bar{c}^a$ . При  $g = 0$  эти уравнения, очевидно, имеют вид

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu^a - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\nu \partial^\mu A_\mu^a = 0, \quad \partial^\mu \partial_\mu c^a = \partial^\mu \partial_\mu \bar{c}^a = 0. \quad (4.2.27)$$

Динамически независимые переменные  $A_\nu^a, \partial_0 A_\nu^a, c^a, \partial_0 c^a, \bar{c}^a, \partial_0 \bar{c}^a$  удовлетворяют, согласно (4.2.7), следующим одновременным перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\partial_0 \bar{c}^a(x), c^b(x')]_{t=t'} &= \delta_{ab} \delta(x-x'), \\ [\partial_0 c^a(x), \bar{c}^b(x')]_{t=t'} &= -\delta_{ab} \delta(x-x'), \\ [\partial_0 A_k^a(x), A^{bl}(x')]_{t=t'} &= i\delta_k^l \delta_{ab} \delta(x-x'), \\ [\partial_0 A_0^a(x), A_0^b(x')]_{t=t'} &= i\xi \delta_{ab} \delta(x-x') \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

(здесь выписаны только нетривиальные перестановочные соотношения). Решение задачи Коши для уравнения  $\partial^\mu \partial_\mu \varphi = 0$  имеет вид

$$\varphi(x) = \int d^3x' \{ \mathcal{D}(x-x') \partial'_0 \varphi(x') + \varphi(x') \partial_0 \mathcal{D}(x-x') \},$$

где  $\mathcal{D}(x)$  — та же функция, которую мы ввели при квантовании свободного электромагнитного поля (см. раздел 2.3.4). Отсюда и из (4.2.28) следуют релятивистски инвариантные разновременные перестановочные соотношения для полей  $c^a$ ,  $\bar{c}^a$ :

$$\begin{aligned} \{ \bar{c}^a(x), c^b(x') \} &= \delta_{ab} \mathcal{D}(x-x'), \\ \{ c^a(x), c^b(x') \} &= \{ \bar{c}^a(x), \bar{c}^b(x') \} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Согласно (4.2.27), (4.2.28), при  $\xi = 1$  разновременные перестановочные соотношения для полей  $A_\mu^a(x)$  будут иметь вид

$$[A_\mu^a(x), A_\nu^b(x')] = i \delta_{ab} g_{\mu\nu} \mathcal{D}(x-x').$$

Для произвольного  $\xi$  перестановочные соотношения для этих полей имеют вид

$$[A_\mu^a(x), A_\nu^b(x')] = i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x', \xi), \quad (4.2.30)$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} \frac{d^4k}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) e^{-ikx},$$

где интегрирование по  $k_0$  производится по контуру  $C_0$ , изображенному на рис. 1.

Действительно, функция  $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi)$  удовлетворяет уравнению

$$\left( \partial^\lambda \partial_\lambda \delta_\nu^\mu - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\nu \partial^\mu \right) \mathcal{D}_{\mu\rho}(x; \xi) = 0, \quad (4.2.31)$$

так как

$$\begin{aligned} \left( -k^2 \delta_\nu^\mu + \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\mu k_\nu \right) \left( g_{\mu\rho} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\rho}{k^2} \right) = -k^2 g_{\nu\rho}, \\ k^2 = k^\mu k_\mu \end{aligned}$$

и, следовательно, подынтегральное выражение для функции  $\left( \partial^\lambda \partial_\lambda \delta_\nu^\mu - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\nu \partial^\mu \right) \mathcal{D}_{\mu\rho}(x; \xi)$  не будет содержать особенности  $1/k^2$ , поэтому при интегрировании по  $k_0$  вдоль контура  $C_0$  мы получим нуль. Наконец, легко видеть, что справедливы формулы

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathcal{D}_{k\lambda}(x; \xi)|_{t=0} &= g_{k\lambda} \delta(x), \quad \partial_0 \mathcal{D}_{0\lambda}(x; \xi)|_{t=0} = \xi g_{0\lambda} \delta(x), \\ \mathcal{D}_{\mu\nu}(x; \xi)|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.2.31), учитывая перестановочные соотношения (4.2.28) и уравнения поля (4.2.27), мы приходим к соотношению (4.2.30).

Определим теперь связи операторов свободного поля. С этой целью заметим, что положительно частотные части операторов являются операторами уничтожения, т. е.

$$A_\mu^{a(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad c^{a(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad \bar{c}^{a(+)}(x) \Phi_0 = 0 \quad (4.2.32)$$

( $\Phi_0$  — вектор состояния вакуума), а отрицательно частотные части полевых операторов  $A_\mu^{a(-)}$ ,  $c^{a(-)}$ ,  $\bar{c}^{a(-)}$  являются операторами рождения. Связи между двумя операторами, как и в электродинамике, определяются как разность  $T$ - и  $N$ -произведений этих операторов или как среднее по вакууму от  $T$ -произведения этих же операторов. Поэтому

$$\underline{\bar{c}^a(x) c^b(x')} = \begin{cases} (\Phi_0 \{ \bar{c}^{a(+)}(x), c^{b(-)}(x') \} \Phi_0), & t > t' \\ -(\Phi_0 \{ \bar{c}^{a(-)}(x), c^{b(+)}(x') \} \Phi_0), & t < t'. \end{cases}$$

Из перестановочных соотношений (4.2.29) вытекает, что

$$\begin{aligned} \{ \bar{c}^{a(+)}(x), c^{b(-)}(x') \} &= \delta_{ab} \mathcal{D}^{(+)}(x-x'), \\ \{ \bar{c}^{a(-)}(x), c^{b(+)}(x') \} &= \delta_{ab} \mathcal{D}^{(-)}(x-x') \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\underline{\bar{c}^a(x) c^b(x')} = \begin{cases} \delta_{ab} \mathcal{D}^{(+)}(x-x'), & t > t', \\ -\delta_{ab} \mathcal{D}^{(-)}(x-x'), & t < t'. \end{cases}$$

Отсюда, используя определение (2.1.27) функции  $\mathcal{D}^c(x)$ , имеем

$$\underline{\bar{c}^a(x) c^b(x')} = \delta_{ab} \mathcal{D}^c(x-x'), \quad \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; 1) \equiv g_{\mu\nu} \mathcal{D}^c(x). \quad (4.2.33)$$

Поступая аналогичным образом, найдем связь между операторами  $A_\mu^a(x)$  и  $A_\nu^b(x')$

$$\begin{aligned} \underline{A_\mu^a(x) A_\nu^b(x')} &= \begin{cases} i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{(+)}(x-x'; \xi), & t > t' \\ -i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{(-)}(x-x'; \xi), & t < t' \end{cases} \\ &= i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi). \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

Как и в квантовой электродинамике, легко видеть, что функцию  $\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x; \xi) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi), \\ \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) &= -\frac{1}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right). \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Связи между остальными парами операторов равны нулю:

$$\underline{cc} = \underline{\bar{c}\bar{c}} = \underline{cA} = \underline{\bar{c}A} = 0. \quad (4.2.36)$$

Как мы увидим в следующем параграфе, гамильтониан взаимодействия содержит производные от операторов  $A_\mu^a$ . Поэтому мы найдем еще связи между операторами  $A_\mu^a$ ,  $\partial_\mu A_\lambda^a$ . Необходимо отметить, что для бозевских операторов  $u$  и  $v$  справедлива общая формула

$$\partial_\mu T(u(x)v(x')) = T(\partial_\mu u(x)v(x')) + \delta_\mu^0 \delta(t-t')[u(x), v(x')].$$

Эта формула следует из того, что

$$T(u(x)v(x')) = \theta(t-t')u(x)v(x') + \theta(t'-t)v(x')u(x), \\ \partial_0 \theta(t-t') = \delta(t-t'). \quad (4.2.37)$$

Поэтому, дифференцируя формулу (4.2.34) по  $x_\lambda$  и учитывая, что  $\delta(t-t')[A_\mu^a(x), A_\nu^b(x')] = 0$ , получаем

$$\partial_\lambda \underline{A_\mu^a(x) A_\nu^b(x')} = (\Phi_0, T(\partial_\lambda A_\mu^a(x) A_\nu^b(x')) \Phi_0) = \\ = i\delta_{ab} \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi). \quad (4.2.38)$$

Дифференцируя эту формулу по  $x'_\rho$  и используя (4.2.37) и одновременные перестановочные соотношения (4.2.28), находим

$$\partial_\lambda \underline{A_\mu^a(x) \partial'_\rho A_\nu^b(x')} = \\ = -i\delta_{ab} \partial_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) - i\delta_{\rho\lambda} \delta_{\mu\nu}^0 \bar{g}_{\mu\nu} \delta_{ab} \delta(x-x'), \quad (4.2.39)$$

где

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - (1-\xi) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0.$$

Вводя оператор

$$F_{\lambda\mu}^a(x) \equiv \partial_\lambda A_\mu^a(x) - \partial_\mu A_\lambda^a(x),$$

совпадающий с оператором  $F_{\lambda\mu}^a$  (см. (4.2.8)) при  $g=0$ , найдем связь между операторами  $F_{\lambda\mu}^a(x)$  и  $F_{\rho\nu}^b(x')$ :

$$\underline{F_{\lambda\mu}^a(x) F_{\rho\nu}^b(x')} = i\delta_{ab} \{ \partial_\mu \partial_\rho \mathcal{D}_{\lambda\nu}^c(x-x'; \xi) - \partial_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) + \\ + \partial_\lambda \partial_\nu \mathcal{D}_{\mu\rho}^c(x-x'; \xi) - \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{D}_{\lambda\rho}^c(x-x'; \xi) \} - \\ - i\delta_{ab} \{ \delta_\rho^0 \delta_\lambda^0 \bar{g}_{\mu\nu} - \delta_\nu^0 \delta_\lambda^0 \bar{g}_{\mu\rho} + \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 \bar{g}_{\lambda\rho} - \delta_\rho^0 \delta_\mu^0 \bar{g}_{\lambda\nu} \} \delta(x-x').$$

Используя определение величин  $\bar{g}_{\mu\nu}$ , эту формулу можно представить в виде

$$\underline{F_{\lambda\mu}^a(x) F_{\rho\nu}^b(x')} = i\delta_{ab} \{ \partial_\mu \partial_\rho \mathcal{D}_{\lambda\nu}^c(x-x'; \xi) - \partial_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) + \\ + \partial_\lambda \partial_\nu \mathcal{D}_{\mu\rho}^c(x-x'; \xi) - \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{D}_{\lambda\rho}^c(x-x'; \xi) \} - \\ - i\delta_{ab} \{ \delta_\rho^0 \delta_\lambda^0 g_{\mu\nu} - \\ - \delta_\nu^0 \delta_\lambda^0 g_{\mu\rho} + \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 g_{\lambda\rho} - \delta_\rho^0 \delta_\mu^0 g_{\lambda\nu} \} \delta(x-x'). \quad (4.2.40)$$

Мы рассмотрели свободные калибровочные и «духовые» фермионные поля. Перейдем теперь к рассмотрению свободных фермионных (кварковых) полей. Уравнения движения этих полей имеют вид

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q(x) = 0, \quad (i\bar{\gamma}^\mu \partial_\mu + m)\bar{q}(x) = 0. \quad (4.2.41)$$

Отсюда, согласно одновременным перестановочным соотношениям (4.2.7), так же как и в разделе 2.4.4, можно получить разновременные перестановочные соотношения

$$\{q(x), \bar{q}(x')\} = -iS(x-x') \quad (4.2.42)$$

и найти связи операторов  $q, \bar{q}$

$$\underline{q(x) \bar{q}(x')} = -iS^c(x-x'), \quad (4.2.43)$$

где функции  $S(x), S^c(x)$  определяются формулами (2.4.44), (2.4.69). Для вакуума фермионного поля справедливо соотношение

$$q^{(+)}(x)\Phi_0 = \bar{q}^{(+)}(x)\Phi_0 = 0. \quad (4.2.44)$$

Приведем в заключение этого раздела разложение операторов полей на плоские волны. Разложение полей  $A_\mu^a(x)$  мы выпишем в фейнмановской калибровке  $\xi=1$  (общий случай рассмотрен в разделе 2.3.2),

$$A_\mu^a(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=0}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{ e_{k\mu}^{(\lambda)} c_{k\lambda}^a e^{-ikx} + e_{k\mu}^{(\lambda)*} c_{k\lambda}^{a+} e^{ikx} \}, \quad (4.2.45)$$

где  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  — векторы поляризации, аналогичные векторам поляризации электромагнитного поля, определяемые формулами (2.3.15), (2.3.16);  $c_{k\lambda}^a, c_{k\lambda}^{a+}$  — операторы уничтожения и рождения, удовлетворяющие, согласно (4.2.28), перестановочным соотношениям

$$[c_{k\lambda}^a, c_{k'\lambda'}^{b+}] = \zeta_{\lambda\lambda'} \delta_{ab} \delta_{kk'} \delta_{kk'} \quad (4.2.46)$$

( $\zeta_\lambda = 1$  для  $\lambda = 1, 2, 3$  и  $\zeta_\lambda = -1$  для  $\lambda = 0$ ). Операторы  $c_{k\lambda}^a, c_{k\lambda}^{a+}$  для  $\lambda = 3, 0$  являются операторами уничтожения и рождения продольных и скалярных (по отношению к группе Лоренца) частиц, которые реально не существуют («духи»). Состояние вакуума в соответствии с (4.2.32) определяется как

$$c_{k\lambda}^a \Phi_0 = 0.$$

При этом благодаря перестановочным соотношениям (4.2.46) пространство векторов состояний обладает индефинитной метрикой (векторы состояний  $\Phi$  с нечетным числом скалярных частиц обладают отрицательной нормой,  $(\Phi, \Phi) < 0$ ).

Чтобы ввести операторы рождения и уничтожения фермионных «духов», введем вместо эрмитовых фермионных полей  $c^a(x)$ ,  $\bar{c}^a(x)$  неэрмитово поле

$$d^a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c^a(x) + i\bar{c}^a(x)) \quad (4.2.47)$$

и сопряженное ему поле

$$d^{a+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (c^a(x) - i\bar{c}^a(x)).$$

Из перестановочных соотношений (4.2.29) для  $c^a$ ,  $\bar{c}^a$  следуют перестановочные соотношения для полей  $d^a$ ,  $d^{a+}$ :

$$\begin{aligned} \{d^a(x), d^b(x')\} &= \{d^{a+}(x), d^{b+}(x')\} = 0, \\ \{d^a(x), d^{b+}(x')\} &= i\delta_{ab}\delta(x-x'). \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

Раскладывая поле  $d^a(x)$  на плоские волны

$$d^a(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{d_k^a e^{-ikx} + f_k^{a+} e^{ikx}\},$$

$$d^{a+}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{d_k^{a+} e^{ikx} + f_k^a e^{-ikx}\}, \quad (4.2.49)$$

получаем следующие перестановочные соотношения для операторов  $d_k^a$ ,  $f_k^a$ :

$$\{d_k^a, d_{k'}^{b+}\} = -\delta_{ab}\delta_{kk'}, \quad \{f_k^a, f_{k'}^{b+}\} = \delta_{ab}\delta_{kk'} \quad (4.2.50)$$

(остальные антикоммутируют равны нулю). Вакуум, как обычно, удовлетворяет условиям

$$c^{a(+)}(x)\Phi_0 = \bar{c}^{a(+)}(x)\Phi_0 = 0$$

или

$$d^{a(+)}(x)\Phi_0 = d^{a\pm(+)}(x)\Phi_0 = 0.$$

Тогда

$$d_k^a\Phi_0 = f_k^a\Phi_0 = 0,$$

откуда следует, что операторы  $d_k^a$ ,  $f_k^a$  являются операторами уничтожения, а операторы  $d_k^{a+}$ ,  $f_k^{a+}$  — операторами рождения фермионных «духов» с импульсом  $k$ . Обратим внимание на то, что поскольку  $\{d_k^a, d_k^{a+}\} = -1$ , то метрика в пространстве состояний фермионных «духов» является индефинитной (состояния, в которых присутствует нечетное число «духов» типа  $d$ , обладают отрицательной нормой). Напомним, что аналогич-

ная ситуация имела место и для бозонных состояний, связанных со скалярными степенями свободы поля  $A_\mu^a(x)$ .

Разложение фермионных (кварковых) полей  $q(x)$ ,  $\bar{q}(x)$  определяется формулами (2.4.63), (2.4.64)

$$\begin{aligned} q_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \{a_{\mathbf{p}\mu i} u^\mu(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}\mu i}^+ u^\mu(\mathbf{p})^c e^{ipx}\}, \\ \bar{q}_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \{a_{\mathbf{p}\mu i}^+ \bar{u}^\mu(\mathbf{p}) e^{ipx} + b_{\mathbf{p}\mu i} \bar{u}^\mu(\mathbf{p})^c e^{-ipx}\}, \end{aligned} \quad (4.2.51)$$

где операторы рождения и уничтожения кварков и антикварков удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} \{a_{\mathbf{p}\mu i}, a_{\mathbf{p}'\mu' i'}^+\} &= \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{ii'}, \quad \{b_{\mathbf{p}\mu i}, b_{\mathbf{p}'\mu' i'}^+\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{ii'} \\ (i = 1, 2, \dots, n - \text{индекс фундаментального представления группы } SU(n); \text{ цвет, если } n = 3). \end{aligned}$$

Мы исследовали квантование калибровочных полей, используя стандартный операторный метод квантования, в котором классические скобки Пуассона функций поля заменяются на коммутаторы операторов поля. Существует, однако, альтернативный метод квантования калибровочных полей, приводящий к тем же результатам и основанный на идее континуального интегрирования (этот метод был предложен Фадеевым и Поповым [13, 14]) с использованием стандартного калибровочно инвариантного лагранжиана для калибровочных полей.\* Мы, однако, не будем излагать этот метод, с которым можно познакомиться по монографиям [15, 16].

### § 4.3. Матрица рассеяния

**4.3.1. Переход к представлению взаимодействия.** В предыдущем разделе была развита квантовая теория калибровочных и фермионных полей в отсутствие взаимодействия ( $g = 0$ ). В этом разделе мы перейдем от уравнений взаимодействующих полей в гейзенберговском представлении (которые рассматривались в разделе 4.2.1) к уравнениям взаимодействующих полей в представлении взаимодействий.

Согласно (4.2.1), (4.2.2), (4.2.5), плотность энергии взаимодействующих полей определяется формулой

$$\omega(x) = \frac{1}{4} F_{kl}^a F^{akl} - \frac{1}{2} F_{0k}^a F^{a0k} - F^{a0k} \partial_k A_0^a +$$

\* На необходимость модификации диаграммной техники указал Фейнман [12]. Квантование калибровочных полей в произвольной калибровке было также проведено де Виттом [9]. Каноническое квантование калибровочных полей предложено Фрадким и Тютиным [10, 11].

$$\begin{aligned}
& + gF^{a0k} (A_0 \times A_k)^a - \frac{1}{2} \bar{q} (i\gamma^k \partial_k - m) q - \\
& - \frac{1}{2} q (i\tilde{\gamma}^k \partial_k + m) \bar{q} - g\mathcal{F}_\mu^a A^{a\mu} - \\
& - \frac{1}{2\xi} (\varphi^a \varphi^a - 2\varphi^a \partial^k A_k^a) + i\bar{b}_k^c \mathcal{Q}^k c^a + i\bar{b}_0^a \cdot g (A_0 \times c)^a + \\
& + i\bar{b}_k^a \partial^k \bar{c}^a - i\bar{b}_\mu^a b^{a\mu}.
\end{aligned}$$

В это выражение входят как динамически независимые компоненты поля, так и компоненты поля, определяемые уравнениями связей:

$$\begin{aligned}
F_{kl}^a &= \partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a - g (A_k \times A_l)^a, \\
b_k^a &= \mathcal{Q}_k c^a, \quad \bar{b}_k^a = -\partial_k \bar{c}^a.
\end{aligned}$$

Мы должны выразить  $\omega(x)$  только через динамически независимые компоненты поля. Учитывая уравнения связи, получаем

$$\omega(x) = \omega_0(x) + \omega_{\text{int}}(x),$$

где  $\omega_0(x)$  — плотность гамильтониана свободного поля

$$\begin{aligned}
\omega_0(x) &= \frac{1}{4} (\partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a)^2 - \frac{1}{2} F_{0k}^a F^{a0k} - F^{a0k} \partial_k A_0^a - \\
& - \frac{1}{2\xi} (\varphi^a \varphi^a - 2\varphi^a \partial^k A_k^a) - \frac{1}{2} \bar{q} (i\gamma^k \partial_k - m) q - \\
& - \frac{1}{2} q (i\tilde{\gamma}^k \partial_k + m) \bar{q} + i\partial_k c^a \partial^k \bar{c}^a - i\bar{b}_0^a b^{a0} \quad (4.3.1)
\end{aligned}$$

и  $\omega_{\text{int}}(x)$  — плотность гамильтониана взаимодействия

$$\begin{aligned}
\omega_{\text{int}}(x) &= \frac{1}{2} g (\partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a) (A^k \times A^l)^a + \\
& + \frac{1}{4} g^2 (A^k \times A^l)^a (A_k \times A_l)^a + gF^{a0k} (A_0 \times A_k)^a - gA_\mu^a \mathcal{F}^{a\mu} + \\
& + ig\bar{b}_0^a (A^0 \times c)^a - ig\partial_k \bar{c}^a (A^0 \times c)^a. \quad (4.3.2)
\end{aligned}$$

Чтобы перейти к представлению взаимодействия, мы должны, согласно разделу 1.5.1, произвести унитарное преобразование операторов поля

$$\chi(x) \rightarrow \tilde{\chi}(x) = S(t, 0) \chi(x) S^\dagger(t, 0),$$

где оператор  $S(t, 0)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial S(t, 0)}{\partial t} = \int d^3x \omega_{\text{int}}(x) S(t, 0), \quad S(0, 0) = 1. \quad (4.3.3)$$

Динамически независимые переменные поля удовлетворяют в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия уравнениям

$$i\partial_0 \chi(x) = [\mathcal{H}, \chi(x)], \quad i\partial_0 \tilde{\chi}(x) = [\mathcal{H}_0, \tilde{\chi}(x)], \quad (4.3.4)$$

где  $\mathcal{H}_0 = \int d^3x \omega_0(x)$ . Так как одновременные перестановочные соотношения в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия совпадают, то уравнения движения для динамически независимых компонент поля в представлении взаимодействия совпадают с уравнениями движения для динамически независимых компонент поля в гейзенберговском представлении при  $g = 0$ . В частности,

$$\partial_0 A^{ak} - \partial^k A^{a0} = F^{a0k}, \quad \partial_0 \bar{c}^a = -\bar{b}_0^a. \quad (4.3.5)$$

Поэтому, согласно (4.3.2), (4.3.5),

$$\omega_{\text{int}}(x) = \underline{v}(x) + \underline{v}'(x), \quad (4.3.6)$$

где

$$\begin{aligned}
\underline{v}(x) &= \frac{1}{2} g F_{\mu\nu}^a (A^\mu \times A^\nu)^a + \frac{g^2}{4} (A_\mu \times A_\nu)^a (A^\mu \times A^\nu)^a - \\
& - ig\partial_\mu \bar{c}^a (A^\mu \times c)^a - gA_\mu^a \mathcal{F}^{a\mu}, \quad F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a, \\
\underline{v}'(x) &= -\frac{g^2}{2} (A_0 \times A_k)^a (A^0 \times A^k)^a.
\end{aligned}$$

Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия для вектора состояния  $\Phi(t)$  имеет вид

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = (\underline{V}(t) + \underline{V}'(t)) \Phi(t), \quad (4.3.7)$$

$$\underline{V}(t) = \int d^3x \underline{v}(x), \quad \underline{V}'(t) = \int d^3x \underline{v}'(x).$$

Так как в представлении взаимодействия одновременные перестановочные соотношения и уравнения движения для динамически независимых компонент поля совпадают с одновременными перестановочными соотношениями и уравнениями движения для свободного поля ( $g = 0$ ), то разновременные перестановочные соотношения для операторов поля в представлении взаимодействия совпадают с перестановочными соотношениями для свободных полей,

$$\begin{aligned}
[\bar{c}^a(x), c^b(x')] &= \delta_{ab} \mathcal{Q}(x - x'), \quad [A_\mu^a(x), A_\nu^b(x')] = \\
& = i\delta_{ab} \mathcal{Q}_{\mu\nu}(x - x', \xi), \\
\{q(x), \bar{q}(x')\} &= -iS(x - x'). \quad (4.3.8)
\end{aligned}$$



Кроме того, связи между операторами  $c, \bar{c}, q, \bar{q}, A, \partial A$  определяются формулами (4.2.33), (4.2.34), (4.2.38), (4.2.39), (4.2.43).

Перейдя к представлению взаимодействия, мы можем (см. раздел 2.1.1) определить матрицу рассеяния

$$S = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} dt (V(t) + \bar{V}(t)) \right). \quad (4.3.9)$$

Заметим, что это выражение, в отличие от выражения для матрицы рассеяния в квантовой электродинамике, не является явно релятивистски инвариантным: оно содержит релятивистски неинвариантное выражение  $\int_{-\infty}^{\infty} dt V(t)$  (интеграл же

$\int_{-\infty}^{\infty} dt V(t)$  представляет собой релятивистский скаляр). При этом выражение для связей операторов  $\partial_\lambda A(x)$  и  $\partial_\lambda \bar{A}(x')$  (4.2.39), необходимое для определения матричных элементов  $S$ -матрицы, также содержит релятивистски неинвариантное слагаемое. Однако можно переопределить связи и  $S$ -матрицу так, чтобы они не содержали релятивистски неинвариантных выражений. Именно матрицу рассеяния  $S$  можно записать в виде

$$S = T \exp \left( -i \int d^4x v(x) \right), \quad (4.3.10)$$

если связи между бозонными операторами определить не формулами (4.2.34), (4.2.38), (4.2.39), а формулами

$$\begin{aligned} \underbrace{A_\mu^a(x)} A_\nu^b(x') &= i \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi), \quad \partial_\lambda \underbrace{A_\mu^a(x)} A_\nu^b(x') = \\ &= i \delta_{ab} \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi), \quad \partial_\lambda \underbrace{A_\mu^a(x)} \partial_\rho \underbrace{A_\nu^b(x')} = \\ &= -i \delta_{ab} \partial_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

(связи между фермионными  $c, \bar{c}, q, \bar{q}$  операторами остаются прежними).

Чтобы убедиться в этом, произведем, согласно (1.6.51),  $N$ -упорядочение  $S$ -матрицы (4.3.9) по переменным  $F_{\mu\nu}^a$

$$S = N_F T_{AC} e^{\Lambda + \Lambda'} \exp \left( -i \int d^4x \omega_{\text{int}}(x) \right), \quad (4.3.12)$$

где  $N_F$  — символ  $N$ -упорядочения по полям  $F_{\mu\nu}^a$ ;  $T_{AC}$  — символ  $I$ -упорядочения по полям  $A, c, \bar{c}$  и, согласно (4.4.43),

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{\delta}{\delta F_{\lambda\mu}^a(x_1)} \underbrace{F_{\lambda\mu}^a(x_1)} F_{\rho\nu}^b(x_2) \frac{\delta}{\delta F_{\rho\nu}^b(x_2)}, \quad (4.3.13)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{F_{\lambda\mu}^a(x)} F_{\rho\nu}^b(x') &= i \delta_{ab} \{ \partial_\mu \partial_\rho \mathcal{D}_{\lambda\nu}^c(x-x'; \xi) - \partial_\rho \partial_\lambda \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) + \\ &+ \partial_\lambda \partial_\nu \mathcal{D}_{\mu\rho}^c(x-x'; \xi) - \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{D}_{\lambda\rho}^c(x-x'; \xi) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta' &= -\frac{1}{8} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{\delta}{\delta F_{\lambda\mu}^a(x_1)} i \delta_{ab} (\delta_\rho^0 \delta_\lambda^0 g_{\mu\nu} - \delta_\nu^0 \delta_\lambda^0 g_{\mu\rho} + \\ &+ \delta_\nu^0 \delta_\mu^0 g_{\lambda\rho} - \delta_\rho^0 \delta_\mu^0 g_{\lambda\nu}) \delta(x_1 - x_2) \frac{\delta}{\delta F_{\rho\nu}^b(x_2)}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\frac{\delta}{\delta F_{\lambda\mu}^a(x_1)} \frac{1}{i} \int d^4x \omega_{\text{int}}(x) = -ig (A^\lambda \times A^\mu)^a,$$

мы можем в выражении для  $\Delta'$  заменить операторы функционального дифференцирования  $\delta/\delta F_{\lambda\mu}^a(x)$  в применении к экспоненте  $\exp \frac{1}{i} \int d^4x \omega_{\text{int}}(x)$  множителем  $-ig (A^\lambda \times A^\mu)^a$ . В результате выражение (4.3.12) для  $S$ -матрицы может быть приведено к виду

$$S = N_F T_{AC} e^{\Lambda} \exp \left( -i \int d^4x v(x) \right) \quad (4.3.14)$$

(см. определение (4.3.6) операторов  $v$  и  $\bar{v}$ ), где оператор функционального дифференцирования определяется, согласно (4.3.13), формулой

$$\Delta = \frac{1}{8} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \frac{\delta}{\delta F_{\lambda\mu}^a(x_1)} \underbrace{F_{\lambda\mu}^a(x_1)} \underbrace{F_{\rho\nu}^b(x_2)} \frac{\delta}{\delta F_{\rho\nu}^b(x_2)}, \quad (4.3.15)$$

в которой использовано релятивистски-инвариантное определение связей (4.3.13), (4.3.11).

Заметим, что выражение для  $\bar{v}(x)$  формально совпадает с выражением для  $-v'$ ,  $\bar{v} = -\bar{v}'$ , где  $\mathcal{L}'$  — лагранжиан взаимодействия. Формула (4.3.14), очевидно, эквивалентна формулам (4.3.10), (4.3.11).

Обратим внимание на то, что в выражение для  $\bar{v}(x)$  входят производные  $\partial_\mu \bar{c}^a$ . Но так как, согласно (4.2.28),

$$\partial_\mu \bar{c} c = \partial_\mu (\bar{c} c), \quad \partial_\mu \bar{c} \partial_\nu \bar{c} = 0,$$

то производные  $\partial_\mu \bar{c}$  не приводят к нековариантным слагаемым в  $S$ -матрице.

**4.3.2. Переход к импульсному представлению.** Имея выражение для матрицы рассеяния  $S$  и предполагая константу

связи малой, мы можем построить теорию возмущений, разложив  $S$  в ряд по степеням  $g$ . С этой целью удобно представить матрицу рассеяния в виде

$$S = T \exp iW', \quad W' = W_1 + W_2 + W_3 + W_4. \quad (4.3.16)$$

Действие  $W_1$  описывает взаимодействие калибровочного поля с фермионными «духами»

$$W_1 = igf^{abc} \int d^4x \bar{\psi}^a A_\mu^b \psi^c, \quad (4.3.17)$$

действие  $W_2$  — тройное взаимодействие калибровочных полей

$$W_2 = -\frac{1}{2} gf^{abc} \int d^4x \bar{A}^{b\mu} \bar{A}^{c\nu} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a), \quad (4.3.18)$$

действие  $W_3$  — четверное взаимодействие калибровочных полей

$$W_3 = -\frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} \int d^4x \bar{A}_\mu^b \bar{A}_\nu^c \bar{A}^{d\mu} \bar{A}^{e\nu} \quad (4.3.19)$$

и, наконец, действие  $W_4$  описывает взаимодействие калибровочного поля с фермионным полем

$$W_4 = g \int d^4x \bar{\psi}^a A_\mu^a \psi^a, \quad \mathcal{S}^{a\mu} = \bar{q} \gamma^\mu T_a q. \quad (4.3.20)$$

Так же как и в случае квантовой электродинамики, мы должны  $N$ -упорядочить матрицу рассеяния, т. е. воспользоваться для преобразования  $T$ -произведения в сумму  $N$ -произведений правилами Вика. Можно, однако, непосредственно воспользоваться формулой (1.6.51)

$$TF(A, q, c, \bar{c}) =: \exp(\Delta + \Sigma + \Xi) F(A, q, c, \bar{c}) :, \quad (4.3.21)$$

где

$$\Delta = \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x'; \xi) \frac{\delta}{\partial A_\mu^a(x)} \frac{\delta}{\partial A_\nu^a(x')},$$

$$\Xi = \int d^4x d^4x' \mathcal{D}^c(x-x') \frac{\delta}{\delta c^a(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a(x')},$$

$$\Sigma = i \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta q(x)} S^c(x-x') \frac{\delta}{\delta \bar{q}(x')}.$$

В результате действия оператора  $\exp(\Delta + \Sigma + \Xi)$  на произведение операторов полей мы получим сумму их  $N$ -произведений, в которых операторы полей связаны всеми возможными связями (теорема Вика).

В соответствии с (4.3.21)  $S$ -матрицу можно представить в виде

$$S =: e^{\Delta + \Sigma + \Xi} \exp iW' :. \quad (4.3.22)$$

Заметим, что функции Грина полей  $\chi \equiv \{A, q, c, \bar{c}\}$  в лоренцевской калибровке (см. (1.6.52))

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{S_0} (\Phi_0 T \{ \chi(x_1) \dots \chi(x_n) S \} \Phi_0)$$

(индекс 0 означает усреднение по вакууму свободных полей) имеют аналогичную структуру (см. § 1.6):

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{S_0} e^{\Delta + \Sigma + \Xi} \{ \chi(x_1) \dots \chi(x_n) e^{iW'} \} |_{\chi=0}. \quad (4.3.23)$$

Перейдем снова к  $S$ -матрице (4.3.22). В формуле (4.3.22) величину  $\exp iW'$  (под знаком  $N$ -произведения) можно представить в виде

$$\exp iW' = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \times \\ \times \sum_{m_1 + \dots + m_4 = N} \frac{N!}{m_1! \dots m_4!} (iW_1)^{m_1} (iW_2)^{m_2} (iW_3)^{m_3} (iW_4)^{m_4}. \quad (4.3.24)$$

Операторы  $W_1, W_2$  содержат производные по координатам от операторов полей. Поэтому, в отличие от квантовой электродинамики,  $N$ -упорядочение  $S$ -матрицы удобно производить, перейдя предварительно в импульсное представление:

$$A_\mu^a(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} A_\mu^a(k),$$

$$c^a(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} c^a(k), \quad (4.3.25)$$

$$q(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} q(p).$$

Матричные элементы оператора  $A_\mu^a(x)$ , согласно (4.2.45), равны

$$\langle 1_{kl}^b | A_\mu^a(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_{kl}^{(b)} \delta_{ab} e^{-ikx},$$

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | 1_{kl}^b \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e_{kl}^{(b)} \delta_{ab} e^{-ikx},$$

а операторов  $q_\alpha(x), \bar{q}^\alpha(x)$  равны

$$\langle \bar{1}_{p\mu\alpha} | q_{\alpha'}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} u^\mu(\vec{p})^c \delta_{\alpha\alpha'} e^{ipx},$$

$$\langle 0 | q_{\alpha'}(x) | 1_{p\mu\alpha} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} u^\mu(\vec{p}) \delta_{\alpha\alpha'} e^{-ipx},$$

$$\langle 1_{\rho\mu\alpha} | \bar{q}^{\alpha'}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0 V}} \bar{u}^\mu(\vec{p})^c \delta_{\alpha\alpha'} e^{ipx},$$

$$\langle 0 | \bar{q}^{\alpha'}(x) | \bar{1}_{\rho\mu\alpha} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0 V}} \bar{u}^\mu(\vec{p})^c \delta_{\alpha\alpha'} e^{-ipx},$$

где  $|1_{k\lambda}^b\rangle = c_{k\lambda}^{\dagger} |0\rangle$ ,  $|1_{\rho\mu\alpha}^+\rangle = a_{\rho\mu\alpha}^{\dagger} |0\rangle$ ,  $|\bar{1}_{\rho\mu\alpha}^-\rangle = b_{\rho\mu\alpha}^{\dagger} |0\rangle$  и т. д. Отсюда следует, что

$$\langle 1_{k\lambda}^b | A_{\mu}^a(k') | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_{k\mu}^{(\lambda)*} \delta_{ab} (2\pi)^4 \delta(k + k'),$$

$$\langle 0 | A_{\mu}^a(k') | 1_{k\lambda}^b \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e_{k\mu}^{(\lambda)} \delta_{ab} (2\pi)^4 \delta(k - k') \quad (4.3.26)$$

и

$$\langle 0 | q_{\alpha'}(\rho') | 1_{\rho\mu\alpha} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0 V}} u^\mu(\vec{p}) \delta_{\alpha\alpha'} (2\pi)^4 \delta(\rho - \rho'),$$

$$\langle 1_{\rho\mu\alpha} | \bar{q}^{\alpha'}(\rho') | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\rho_0 V}} \bar{u}^\mu(\vec{p}) \delta_{\alpha\alpha'} (2\pi)^4 \delta(\rho + \rho'). \quad (4.3.26')$$

Операторы  $W_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), согласно (4.3.25), могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} W_1 &= g (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3) V_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3) \times \\ &\quad \times A^{b\mu}(k_1) \bar{c}^a(k_3) c^c(k_2), \\ W_2 &= g (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3) \bar{V}_{\mu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) \times \\ &\quad \times A^{a\mu}(k_1) A^{b\nu}(k_2) A^{c\lambda}(k_3), \\ W_3 &= g^2 (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \\ &\quad \times \bar{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) A^{a\mu}(k_1) A^{b\nu}(k_2) A^{c\lambda}(k_3) A^{d\rho}(k_4), \\ W_4 &= g (2\pi)^4 \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3) : \bar{q}(k_1) \times \\ &\quad \times V_{\mu}^a q(k_2) : A^{a\mu}(k_3), \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

где функции  $V_{\mu}^{abc}$ ,  $\bar{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $\bar{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$ ,  $V_{\mu}^a$  определяются формулами

$$V_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = f^{abc} k_{3\mu},$$

$$\bar{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = \frac{i}{6} f^{abc} \{k_{1\nu} g_{\mu\lambda} - k_{1\lambda} g_{\mu\nu} + k_{2\lambda} g_{\mu\nu} - k_{2\mu} g_{\nu\lambda} +$$

$$+ k_{3\mu} g_{\nu\lambda} - k_{3\nu} g_{\mu\lambda}\},$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -\frac{1}{4!} \{f^{gac} f^{gbd} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + \\ &+ f^{gad} f^{gbc} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f^{gab} f^{gcd} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda})\}, \end{aligned}$$

$$V_{\mu}^a = \gamma_{\mu} T_a. \quad (4.3.28)$$

В импульсном пространстве функциональные операторы  $\Delta$ ,  $\Xi$ ,  $\Sigma$  имеют следующий вид:

$$\Delta = \frac{i}{2} (2\pi)^4 \int d^4 k \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) \frac{\delta}{\delta A_{\mu}^a(k)} \frac{\delta}{\delta A_{\nu}^a(-k)},$$

$$\Xi = (2\pi)^4 \int d^4 k \mathcal{D}^c(k) \frac{\delta}{\delta c^a(k)} \frac{\delta}{\delta c^a(-k)}, \quad (4.3.29)$$

$$\Sigma = i (2\pi)^4 \int d^4 p \frac{\delta}{\delta q(p)} S^c(p) \frac{\delta}{\delta \bar{q}(-k)},$$

где

$$\mathcal{D}^c(k) = -\frac{1}{k^2 + i0}, \quad S^c(p) = \frac{1}{m - \hat{p} - i0},$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) = -\frac{1}{k^2 + i0} g_{\mu\nu} - \left( (1 - \xi) \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2 + i0} \right).$$

**4.3.3. Графическое представление матрицы рассеяния и правила Фейнмана.** Величинам  $W_1, W_2, W_3, W_4$  можно сопоставить диаграммы, изображенные на рис. 16 (мы будем называть их преддиаграммами). Вершинам этих преддиаграмм сопоставляются функции  $V_{\mu}^{abc}$ ,  $\bar{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $\bar{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$ ,  $V_{\mu}^a$ , умноженные на  $(2\pi)^4 \delta(\Sigma k_i)$ , где  $k_i$  — импульсы линий преддиаграмм, по которым производится интегрирование,  $\int \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4}$ ; внешним концам сопоставляются фурье-компоненты операторов полей; волнистые линии соединяют вершину с операторами калибровочных полей, пунктирные линии — вершину с операторами «духовых» фермионных полей и, наконец, сплошные линии — вершину с операторами фермионных (кварковых) полей.

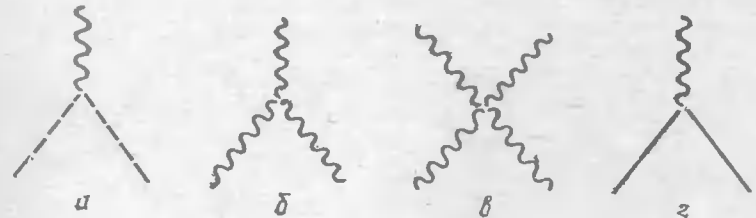


Рис. 16.

Выражению  $W_1^{m_1} W_2^{m_2} W_3^{m_3} W_4^{m_4}$  соответствует  $m_1$  преддиаграмм рис. 16, а,  $m_2$  — преддиаграмм рис. 16, б,  $m_3$  — преддиаграмм рис. 16, в и  $m_4$  — преддиаграмм рис. 16, г. На это выражение действует функциональный оператор  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$ . Так как

$$\Delta \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} A_\mu^a(k_1) A_\nu^b(k_2) \dots = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) \delta_{ab} \dots,$$

$$\Xi \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \bar{c}^a(k_1) c^b(k_2) \dots = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{D}^c(k) \delta_{ab} \dots,$$

$$\Sigma \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} q(k_1) \bar{q}(k_2) \dots = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i) S^c(k) \dots,$$

то в результате действия этого оператора образуются всевозможные связи между парами операторов калибровочных полей, парами операторов «духовых» ферми-полей  $c$  и  $\bar{c}$  и парами операторов фермионных (кварковых) полей. Мы видим, что образованию связей в результате действия функциональных операторов  $\Delta$ ,  $\Xi$ ,  $\Sigma$  соответствует замена двух интегрирований по  $k_1$  и  $k_2$  одним интегрированием по  $k$  и замена пар операторов  $A_\mu^a(k_1) A_\nu^b(k_2)$ , ... функциями  $i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) \delta_{ab}$ , .... Эту операцию можно графически интерпретировать как попарное закорачивание, т. е. объединение двух линий различных (или одной и той же) преддиаграмм в одну линию, которой теперь сопоставляются фурье-компоненты связей, т. е. функции  $\delta_{ab} i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi)$ ,  $\delta_{ab} \mathcal{D}^c(k)$ ,  $-i S^c(k)$ .

Так как функции  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  симметричны относительно перестановки своих аргументов (таким свойством не обладает функция  $V_\mu^{abc}$ ), то при применении оператора  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$  к члену  $W_1^{m_1} W_2^{m_2} W_3^{m_3} W_4^{m_4}$  возникает  $(3!)^{m_2} (4!)^{m_3} m_1! m_2! m_3! m_4!$  одинаковых членов. Множители  $3!$  и  $4!$  возникают в результате того, что линии преддиаграмм  $k_1, k_2, k_3$  для  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  и  $k_1, k_2, k_3, k_4$  для  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  могут быть закорочены с линиями других преддиаграмм соответственно  $3!$  и  $4!$  способами. Поэтому, переопределяя вершинные функции

$$V_{\mu\nu\lambda}^{abc} = 3! \tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}, \quad V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} = 4! \tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$$

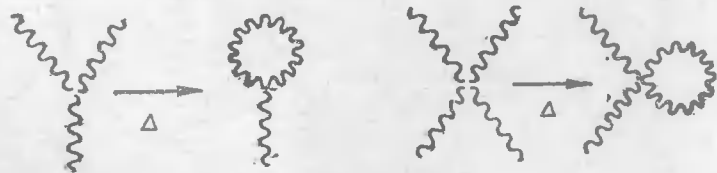


Рис. 17.

и учитывая наличие множителя  $(m_1! m_2! m_3! m_4!)^{-1}$  в разложении  $S$ -матрицы, мы можем не учитывать указанных перестановок и одновременно не учитывать множителя  $(m_1! m_2! m_3! m_4!)^{-1}$  в разложении  $S$ -матрицы (4.3.24). Это рассуждение справедливо, однако, только в том случае, если внешние линии преддиаграмм, связанные с вершинами  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$ , не «закорачиваются» друг на друга после применения операции функционального дифференцирования  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$ . Такое «закорачивание» внутри преддиаграмм в результате применения операции  $\Delta$  схематически изображено на рис. 17: В этом случае на каждую возникающую закороченную линию (II) должен быть введен множитель  $1/2$  (аналогичная ситуация не возникает в квантовой электродинамике, так как в последней гамильтониан взаимодействия представляет собой  $N$ -упорядоченный оператор). Действительно внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  внутренних закорачиваний может быть шесть. После внутренних закорачиваний оставшаяся линия преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  одним способом закорачивается с фиксированной векторной линией других преддиаграмм, а оставшиеся две линии преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  закорачиваются двумя способами с фиксированными векторными линиями других преддиаграмм. Таким образом, в случае закорачивания внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  возникают три эквивалентных слагаемых вместо  $3!$  слагаемых, а в случае закорачивания внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  возникают двенадцать эквивалентных слагаемых вместо  $4!$  слагаемых.

Кроме того, как и в квантовой электродинамике, необходимо учитывать, что при различных способах соединения линий преддиаграмм могут получаться эквивалентные диаграммы. Перед такими диаграммами следует ставить симметричный множитель  $\frac{1}{r}$ , где  $r$  — число способов, которыми эта диаграмма может быть получена из преддиаграмм.

Рассмотрим, например, две преддиаграммы, изображенные на рис. 18. Из этих преддиаграмм можно получить две экви-

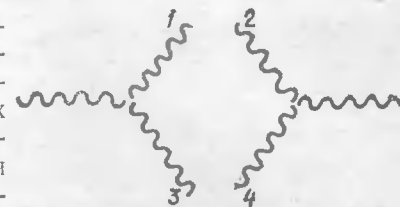


Рис. 18.

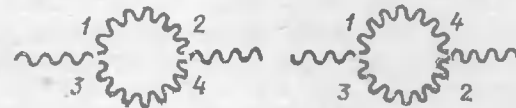


Рис. 19.

Выражению  $W_1^{m_1} W_2^{m_2} W_3^{m_3} W_4^{m_4}$  соответствует  $m_1$  преддиаграмм рис. 16, а,  $m_2$  — преддиаграмм рис. 16, б,  $m_3$  — преддиаграмм рис. 16, в и  $m_4$  — преддиаграмм рис. 16, г. На это выражение действует функциональный оператор  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$ . Так как

$$\Delta \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} A_\mu^a(k_1) A_\nu^b(k_2) \dots = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) \delta_{ab} \dots,$$

$$\Xi \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \bar{c}^a(k_1) c^b(k_2) \dots = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \mathcal{D}^c(k) \delta_{ab} \dots,$$

$$\Sigma \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} q(k_1) \bar{q}(k_2) \dots = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-i) S^c(k) \dots,$$

то в результате действия этого оператора образуются всевозможные связи между парами операторов калибровочных полей, парами операторов «духовых» ферми-полей  $c$  и  $\bar{c}$  и парами операторов фермионных (кварковых) полей. Мы видим, что образованию связей в результате действия функциональных операторов  $\Delta$ ,  $\Xi$ ,  $\Sigma$  соответствует замена двух интегрирований по  $k_1$  и  $k_2$  одним интегрированием по  $k$  и замена пар операторов  $A_\mu^a(k_1) A_\nu^b(k_2)$ , ... функциями  $i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) \delta_{ab}$ , .... Эту операцию можно графически интерпретировать как попарное закорачивание, т. е. объединение двух линий различных (или одной и той же) преддиаграмм в одну линию, которой теперь сопоставляются фурье-компоненты связей, т. е. функции  $\delta_{ab} i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi)$ ,  $\delta_{ab} \mathcal{D}^c(k)$ ,  $-i S^c(k)$ .

Так как функции  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  симметричны относительно перестановки своих аргументов (таким свойством не обладает функция  $V_\mu^{abc}$ ), то при применении оператора  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$  к члену  $W_1^{m_1} W_2^{m_2} W_3^{m_3} W_4^{m_4}$  возникает  $(3!)^{m_3} (4!)^{m_4} m_1! m_2! m_3! m_4!$  одинаковых членов. Множители  $3!$  и  $4!$  возникают в результате того, что линии преддиаграмм  $k_1, k_2, k_3$  для  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  и  $k_1, k_2, k_3, k_4$  для  $\tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  могут быть закорочены с линиями других преддиаграмм соответственно  $3!$  и  $4!$  способами. Поэтому, переопределяя вершинные функции

$$V_{\mu\nu\lambda}^{abc} = 3! \tilde{V}_{\mu\nu\lambda}^{abc}, \quad V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} = 4! \tilde{V}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$$

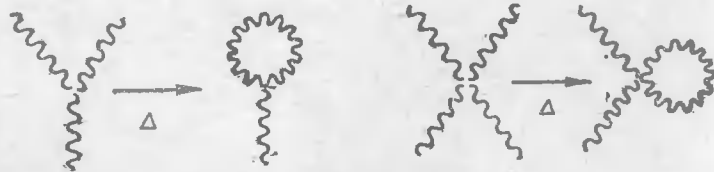


Рис. 17.

и учитывая наличие множителя  $(m_1! m_2! m_3! m_4!)^{-1}$  в разложении  $S$ -матрицы, мы можем не учитывать указанных перестановок и одновременно не учитывать множителя  $(m_1! m_2! m_3! m_4!)^{-1}$  в разложении  $S$ -матрицы (4.3.24). Это рассуждение справедливо, однако, только в том случае, если внешние линии преддиаграмм, связанные с вершинами  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$ , не «закорачиваются» друг на друга после применения операции функционального дифференцирования  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$ . Такое «закорачивание» внутри преддиаграмм в результате применения операции  $\Delta$  схематически изображено на рис. 17. В этом случае на каждую возникающую закороченную линию (II) должен быть введен множитель  $1/2$  (аналогичная ситуация не возникает в квантовой электродинамике, так как в последней гамильтониан взаимодействия представляет собой  $N$ -упорядоченный оператор). Действительно внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  внутренних закорачиваний может быть шесть. После внутренних закорачиваний оставшаяся линия преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  одним способом закорачивается с фиксированной векторной линией других преддиаграмм, а оставшиеся две линии преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  закорачиваются двумя способами с фиксированными векторными линиями других преддиаграмм. Таким образом, в случае закорачивания внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$  возникают три эквивалентных слагаемых вместо  $3!$  слагаемых, а в случае закорачивания внутри преддиаграммы  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$  возникают двенадцать эквивалентных слагаемых вместо  $4!$  слагаемых.

Кроме того, как и в квантовой электродинамике, необходимо учитывать, что при различных способах соединения линий преддиаграмм могут получаться эквивалентные диаграммы. Перед такими диаграммами следует ставить симметричный множитель  $\frac{1}{r}$ , где  $r$  — число способов, которыми эта диаграмма может быть получена из преддиаграмм.

Рассмотрим, например, две преддиаграммы, изображенные на рис. 18. Из этих преддиаграмм можно получить две экви-

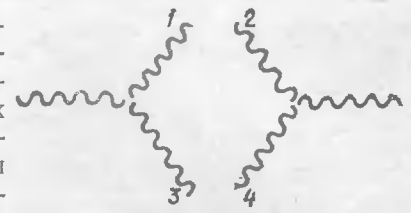


Рис. 18.

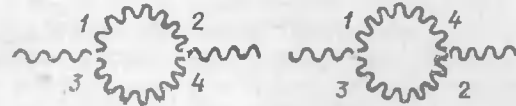


Рис. 19.

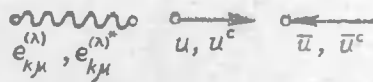


Рис. 20.

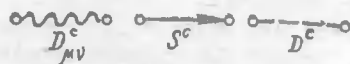


Рис. 21.

валентные диаграммы, изображенные на рис. 19. Поэтому ясно, что в этом случае  $r = 2$ . Наконец, как и в квантовой электродинамике, каждой замкнутой фермионной «духовой» или кварковой петле следует сопоставлять множитель  $-1$ .

Таким образом, в результате  $N$ -упорядочения  $S$ -матрицы (применения оператора  $\exp(\Delta + \Xi + \Sigma)$  к преддиаграммам, связанным с выражением  $W_1^{m_1} W_2^{m_2} W_3^{m_3} W_4^{m_4}$ ) возникают фейнмановские диаграммы, изображающие различные процессы и получающиеся из преддиаграмм всевозможными закорачиваниями внешних линий.

Из изложенного следует, что элементы  $S$ -матрицы, соответствующие различным процессам, могут быть получены из соответствующих диаграмм с помощью следующих правил\*.

1. Векторной частице (глюону), изображаемой в виде внешней волнистой линии (рис. 20), соответствует множитель  $\frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_{k\mu}^{(\lambda)}$  для начальной частицы и множитель  $\frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_{k\mu}^{(\lambda)*}$  для конечной частицы.

2. Спинорной частице (кварку), изображаемой внешней сплошной линией, выходящей из вершины (рис. 20), соответствуют множители  $\frac{u^\mu}{\sqrt{2Vp_0}}$ ,  $\frac{\bar{u}^\mu}{\sqrt{2Vp_0}}$  в зависимости от того, соответствует ли линия кварку в начальном или антикварку в конечном состоянии.

3. Спинорной частице (кварку), изображаемой внешней сплошной линией, входящей в вершину (рис. 20), соответствуют множители  $\frac{\bar{u}^\mu}{\sqrt{2Vp_0}}$ ,  $\frac{u^\mu}{\sqrt{2Vp_0}}$  в зависимости от того, соответствует ли линия антикварку в начальном или кварку в конечном состоянии.

4. Внутренней волнистой линии, изображающей распространение векторной частицы (рис. 21), соответствует пропагатор

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi) \delta_{ab} = -\frac{i\delta_{ab}}{k^2 + i0} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right).$$

5. Внутренней сплошной линии, изображающей распространение спинорной частицы (см. рис. 20), соответствует про-

\* Теория возмущений для неабелевых калибровочных полей развивается в работах [17—19].

пагатор

$$-iS^c(p) = \frac{-i}{m - \hat{p} - i0}.$$

6. Внутренней пунктирной линии, изображающей пространство скалярного фермионного «духа» (см. рис. 21), соответствует пропагатор

$$\mathcal{D}^c(k) \delta_{ab} = -\frac{\delta_{ab}}{k^2 + i0}.$$

7. Вершине, изображенной на рис. 16, б, соответствует величина

$$V_{\alpha\beta\gamma}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = i f^{abc} \{ k_{1\beta} g_{\alpha\gamma} - k_{1\gamma} g_{\alpha\beta} + k_{2\gamma} g_{\alpha\beta} - k_{2\alpha} g_{\beta\gamma} + k_{3\alpha} g_{\beta\gamma} - k_{3\beta} g_{\alpha\gamma} \}.$$

8. Вершине, изображенной на рис. 16, в, соответствует величина

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) = f^{gac} f^{gbd} (g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta}) + f^{gad} f^{gbc} (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta}) + f^{gab} f^{gcd} (g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}).$$

9. Вершине, изображенной на рис. 16, а, соответствует величина

$$V_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = f^{abc} k_{3\mu}.$$

10. Вершине, изображенной на рис. 16, г, соответствует величина

$$V_{\mu}^a = \gamma_{\mu} T_a.$$

11. Каждой внутренней линии с 4-импульсом  $k$  соответствует интегрирование  $d^4k/(2\pi)^4$ .

12. Каждой вершине соответствует множитель  $(2\pi)^{4\delta} (\Sigma k)$ , где  $k$  — 4-импульсы частиц, связанные с данной вершиной.

13. Диаграмме должен быть сопоставлен множитель  $(-1)^l \frac{1}{r} 2^{-s} (ig)^{m_1+m_2+m_3} (ig^2)^{m_4}$ , где  $l$  — число замкнутых фермионных петель;  $r$  — симметричный множитель,  $s$  — число закороченных векторных линий (закорачивание происходит внутри вершины), связанных с вершинами  $V_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}$ ,  $V_{\alpha\beta\gamma}^{abc}$ ,  $m_1, m_2, m_3, m_4$  — числа вершин типа  $V_{\mu}^{abc}$ ,  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$ ,  $V_{\mu}^a$ .

14. Все спинорные величины должны быть расположены в том порядке, в котором они встречаются, если двигаться против направления кварковой линии.

4.3.4. Унитарность матрицы рассеяния. Построенная нами матрица рассеяния для калибровочных и фермионных полей является унитарной в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой,  $S^+ S = 1$ . Это пространство содержит как

реальные физические состояния, так и «духовые» состояния, т. е. состояния, содержащие скалярные и продольные глюоны и скалярные фермионные «духи». Мы покажем теперь, что, как и в квантовой электродинамике, условие унитарности справедливо и в физическом подпространстве, т. е.

$$\sum_r (\Phi_a, S^+ \Phi_r) (\Phi_r, S \Phi_b) = (\Phi_a, \Phi_b), \quad (4.3.30)$$

где  $\Phi_a, \Phi_b$  — производные физические векторы состояний; суммирование производится по всем векторам, содержащим только реальные частицы.

Введем с этой целью оператор

$$\mathcal{S}(\xi) = \mathfrak{N} e^{\xi A + B}, \quad (4.3.31)$$

где оператор  $A$  содержит операторы рождения и уничтожения «духовых» состояний

$$A = \sum_{ka} (c_{k3}^{a+} c_{k3}^a - c_{k0}^{a+} c_{k0}^a + f_k^{a+} f_k^a - d_k^{a+} d_k^a), \quad (4.3.32)$$

а оператор  $B$  — операторы рождения и уничтожения реальных частиц

$$B = \sum_{ka} \sum_{\lambda=1}^2 c_{k\lambda}^{a+} c_{k\lambda}^a + \sum_{\rho\mu i} a_{\rho\mu i}^+ a_{\rho\mu i} + \sum_{\rho\mu i} b_{\rho\mu i}^+ b_{\rho\mu i}. \quad (4.3.33)$$

Здесь  $\mathfrak{N}$  — символ  $N$ -упорядочения операторов рождения и уничтожения (с учетом знакового множителя для фермионов) с последующей вставкой между операторами рождения и уничтожения вакуумного проектора  $|0\rangle\langle 0|$ .

Тогда условие полноты векторов состояний можно сформулировать в виде (см. [20])

$$\mathcal{S}(1) = I \quad (4.3.34)$$

(знак минус перед операторами  $c_{k0}^{a+} c_{k0}^a$  и  $d_k^{a+} d_k^a$  в формуле для  $A$  связан с индефинитностью метрики в пространстве скалярных глюонов и фермионных «духов» типа  $d$ ). Оператор  $\mathcal{S}(0)$ , очевидно, представляет собой проектор  $\mathcal{P}_r$  на подпространство реальных частиц

$$\mathcal{S}(0) = \mathcal{P}_r. \quad (4.3.35)$$

Введем функцию

$$g(\xi) = (\Phi_a, S^+ \mathcal{S}(\xi) S \Phi_b), \quad (4.3.36)$$

где  $\Phi_a, \Phi_b$  — произвольные векторы состояний реальных частиц. Эта функция, как мы покажем, не зависит от параметра  $\xi$ . Поэтому

$$(\Phi_a, S^+ \mathcal{S}(1) S \Phi_b) = (\Phi_a, S^+ \mathcal{S}(0) S \Phi_b),$$

откуда, учитывая (4.3.34), (4.3.35), мы и получаем соотношение (4.3.30).

Чтобы показать независимость  $g(\xi)$  от  $\xi$ , воспользуемся инвариантностью теории по отношению к преобразованиям (4.2.16). Так как взаимодействие при  $t = \pm\infty$  выключается, то  $S$ -матрица должна коммутировать с генератором  $G$  этих преобразований при константе связи  $g$ , равной нулю (напомним, что  $S$ -матрица коммутирует не с генератором временных трансляций  $\mathcal{H}$ , а с генератором временных трансляций при  $g = 0$ , т. е. со свободным гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ ). Проведем формальное доказательство этого утверждения. Согласно (4.2.25'), генератор  $G \equiv G(g)$  можно представить в виде  $G = G_0 + G_1$ , где  $G_0$  не зависит от  $g$ , а оператор  $G_1$  пропорционален  $g$ . Гамильтониан  $\mathcal{H}$  также можно представить в виде  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$  (см. (4.3.1), (4.3.2)), где  $\mathcal{H}_i \sim g^i$  ( $i = 0, 1, 2$ ). Так как  $G$  представляет собой интеграл движения, то  $[\mathcal{H}, G] = 0$  или, в представлении взаимодействия

$$[\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(t) + \mathcal{H}_2(t), G_0(t) + G_1(t)] = 0.$$

Отсюда имеем

$$[\mathcal{H}_0, G_0(t)] = 0; \quad (4.3.37)$$

$$[\mathcal{H}_0, G_1(t)] + [\mathcal{H}_1(t), G_0(t)] = 0; \quad (4.3.38)$$

$$[\mathcal{H}_1(t), G_1(t)] + [\mathcal{H}_2(t), G_0(t)] = 0; \quad (4.3.39)$$

$$[\mathcal{H}_2(t), G_1(t)] = 0. \quad (4.3.40)$$

Первое соотношение показывает, что оператор  $G_0(t) \equiv G_0$  не зависит от  $t$ . Матрицу рассеяния  $S$  в терминах  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  можно представить в виде

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n! m!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m T(\mathcal{H}_1(t_1) \dots \mathcal{H}_1(t_n) \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [G_0, S] = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+m}}{n! m!} \left\{ n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m \times \right. \\ & \times T([G_0, \mathcal{H}_1(t_1)] \dots \mathcal{H}_1(t_n) \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m) + \\ & + m \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m T(\mathcal{H}_1(t_1) \dots \mathcal{H}_1(t_n) \times \\ & \left. \times [G_0, \mathcal{H}_2(t'_1)] \dots \mathcal{H}_2(t'_m) \right\}. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что, согласно (4.3.38),

$$[G_0, \mathcal{H}_1(t)] = -i \frac{\partial G_1(t)}{\partial t}.$$

Поэтому, используя (4.3.38), имеем

$$\begin{aligned} [G_0, S] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+m}}{n! m!} \left\{ -in \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots \right. \\ &\dots dt'_m \frac{\partial}{\partial t_1} T(G_1(t_1) \mathcal{H}_1(t_2) \dots \mathcal{H}_1(t_n) \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m)) + \\ &\quad + in(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m \delta(t_1 - t'_1) \times \\ &\quad \times T([G_1(t_1), \mathcal{H}_1(t_2)] \mathcal{H}_1(t_3) \dots \mathcal{H}_1(t_n) \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m) + \\ &\quad + m \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m T(\mathcal{H}_1(t_1) \dots \\ &\quad \dots \mathcal{H}_1(t_n) [G_0, \mathcal{H}_2(t'_1)] \dots \mathcal{H}_2(t'_m)). \end{aligned}$$

Мы учли при этом, что

$$\frac{\partial}{\partial t} T(a(t) b(t')) = T\left(\frac{\partial a(t)}{\partial t} b(t')\right) + \delta(t-t') [a(t), b(t')].$$

Используя соотношение (4.3.39), получаем

$$\begin{aligned} [G_0, S] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n+m}}{n! m!} \left\{ -in(n-1) \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots dt_n \times \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m \dots T([G_0, \mathcal{H}_2(t_2)] \mathcal{H}_1(t_3) \dots \mathcal{H}_1(t_n) \times \\ &\quad \times \mathcal{H}_2(t'_1) \dots \mathcal{H}_2(t'_m)) + m \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 \dots dt'_m \times \\ &\quad \times T(\mathcal{H}_1(t_1) \dots \mathcal{H}_1(t_n) [G_0, \mathcal{H}_2(t'_1)] \dots \mathcal{H}_2(t'_m)) \left. \right\} \end{aligned}$$

или, переобозначая индексы суммирования, мы и приходим к соотношению

$$[G_0, S] = 0. \quad (4.3.41)$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение: если  $G(g)$  — интеграл движения,  $[G(g), \mathcal{H}(g)] = 0$ , то  $[G(0), S] = 0$ . Вернемся к доказательству независимости  $g(\xi)$  от  $\xi$ .

Выпишем интересующие нас преобразования (4.4.16) для фейнмановской калибровки ( $\xi = 1$ ) и при  $g = 0$

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= A_\mu^a + i\zeta \partial_\mu c^a, \quad \bar{c}_\mu^a = c^a - \zeta \partial^\mu A_\mu^a, \quad c'^a = c^a, \\ q' &= q, \quad \bar{q}' = \bar{q}. \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

Подставляя сюда разложения (4.2.45), (4.2.49) операторов на плоские волны, получаем

$$c'_{k3} = c_{k3}^a + \frac{\zeta k_0}{V^2} (d_k^a + f_k^a), \quad c'_{k0} = c_{k0}^a + \frac{\zeta k_0}{V^2} (d_k^a + f_k^a),$$

$$d_k^a = d_k^a + \frac{\zeta k_0}{V^2} (c_{k3}^a - c_{k0}^a), \quad f_k^a = f_k^a - \frac{\zeta k_0}{V^2} (c_{k3}^a - c_{k0}^a),$$

$$a'_{\rho\mu i} = a_{\rho\mu i}, \quad b'_{\rho\mu i} = b_{\rho\mu i}.$$

Вводя общее обозначение  $K$  для операторов  $c, d, f$ , и учитывая перестановочные соотношения для этих операторов, представляем формулы (4.3.42) в виде

$$K' - K = i[G_0, K],$$

где

$$G_0 = i\zeta \sum_{ka} \frac{k_0}{V^2} \{ (c_{k3}^{a+} - c_{k0}^{a+}) (d_k^a + f_k^a) + (d_k^{a+} + f_k^{a+}) (c_{k3}^a - c_{k0}^a) \}.$$

Таким образом, оператор  $G_0$  и будет генератором преобразований (4.3.42) (оператор  $G_0$  совпадает с оператором  $i\zeta Q$  (см. (4.2.25') при  $g = 0$  и  $\xi = 1$ ). Вводя оператор  $Q_0$  с помощью соотношения  $G_0 = i\zeta Q_0$  (очевидно  $Q_0^+ = Q_0$ ), перепишем формулы (4.3.42) в виде

$$\begin{aligned} [Q_0, c_{k3}^a] &= -\frac{k_0}{V^2} (d_k^a + f_k^a), \quad [Q_0, c_{k0}^a] = -\frac{k_0}{V^2} (d_k^a + f_k^a), \\ [Q_0, d_k^a] &= -\frac{k_0}{V^2} (c_{k3}^a - c_{k0}^a), \quad [Q_0, f_k^a] = -\frac{k_0}{V^2} (c_{k3}^a - c_{k0}^a). \end{aligned} \quad (4.3.43)$$

Как мы говорили,  $S$ -матрица коммутирует с оператором  $G_0$ . А так как  $S$ -матрица содержит четное число фермионных полей, то она будет коммутировать и с оператором  $Q_0$

$$[S, Q_0] = 0. \quad (4.3.44)$$

Покажем теперь, что

$$[\mathcal{F}(\xi), Q_0] = 0. \quad (4.3.45)$$

Заметим с этой целью, что поскольку  $Q_0 \Phi_0 = 0$ , то

$$[Q_0, K^+ \mathcal{F}_0 K] = [Q_0, K^+] \mathcal{F}_0 K + K^+ \mathcal{F}_0 [Q_0, K],$$



где  $K$  — любой из операторов  $c_{k3}^a, d_k^a, c_{k0}^a, f_k^a$ . Используя формулы (4.3.43), получаем

$$[Q_0, c_{k3}^{a+} \mathcal{P}_0 c_{k3}^a - c_{k0}^{a+} \mathcal{P}_0 c_{k0}^a + f_k^{a+} \mathcal{P}_0 f_k^a - d_k^{a+} \mathcal{P}_0 d_k^a] = 0,$$

откуда и следует, согласно определению  $\mathcal{Z}(\xi)$ , формула (4.3.45).

Найдем теперь  $\dot{\mathcal{Z}}(\xi) \equiv d\mathcal{Z}(\xi)/d\xi$ . Согласно (4.3.31),

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{Z}}(\xi) &= \sum_{ka} \{ c_{k3}^{a+} \mathcal{Z}(\xi) c_{k3}^a - c_{k0}^{a+} \mathcal{Z}(\xi) c_{k0}^a + f_k^{a+} \mathcal{Z}(\xi) f_k^a - \\ &- d_k^{a+} \mathcal{Z}(\xi) d_k^a \} = \sum_{ka} \{ (c_{k3}^{a+} - c_{k0}^{a+}) \mathcal{Z}(\xi) c_{k3}^a + c_{k0}^{a+} \mathcal{Z}(\xi) (c_{k3}^a - c_{k0}^a) + \\ &+ (f_k^{a+} + d_k^{a+}) \mathcal{Z}(\xi) f_k^a - d_k^{a+} \mathcal{Z}(\xi) (d_k^a + f_k^a) \}. \end{aligned}$$

Используя (4.3.43), находим отсюда

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{Z}}(\xi) &= \sum_{ka} \frac{V\sqrt{2}}{k_0} \{ - \{ Q_0, d_k^{a+} \} \mathcal{Z}(\xi) c_{k3}^a + c_{k0}^a \mathcal{Z}(\xi) \{ Q_0, f_k^a \} - \\ &- [Q_0, c_{k0}^{a+}] \mathcal{Z}(\xi) f_k^a + d_k^{a+} \mathcal{Z}(\xi) [Q_0, c_{k3}^a] \} \end{aligned}$$

или, учитывая (4.3.45),

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{Z}}(\xi) &= \sum_{ka} \frac{V\sqrt{2}}{k_0} \{ - Q_0 d_k^{a+} \mathcal{Z}(\xi) c_{k3}^a - d_k^{a+} \mathcal{Z}(\xi) c_{k3}^a Q_0 + \\ &+ c_{k0}^{a+} \mathcal{Z}(\xi) f_k^a Q_0 + Q_0 c_{k0}^{a+} \mathcal{Z}(\xi) f_k^a \}. \end{aligned}$$

Так как для физических векторов состояний  $Q_0 \Phi_a = Q_0 \Phi_b = 0$  и  $[S, Q_0] = 0$ , то, согласно определению (4.3.36),  $g(\xi) = 0$ , что и требовалось доказать.

#### § 4.4. Перенормируемость теории неабелевых калибровочных полей

**4.4.1. Классификация ультрафиолетовых расходимостей неабелевых калибровочных полей.** Элементы  $S$ -матрицы и функции Грина калибровочных полей расходятся в высших приближениях теории возмущений как в области больших, так и в области малых 4-импульсов виртуальных частиц. Расходимости в области больших импульсов называются ультрафиолетовыми, расходимости в области малых импульсов — инфракрасными. Последние связаны с отсутствием массы у глюонов (и кварков, если мы считаем их массы равными нулю). При этом, если не пользоваться теорией возмущений, то, как и в

квантовой электродинамике, вероятность процессов с участием конечного числа глюонов будет равна нулю (в теории возмущений этот нуль соответствует инфракрасной расходимости  $S$ -матрицы). Мы не будем касаться проблемы инфракрасных расходимостей, тесно связанных с проблемой удержания кварков в адронах (см. раздел 5.3.2). В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением ультрафиолетовых расходимостей в матрице рассеяния и покажем, что, как и в квантовой электродинамике, в теории неабелевых калибровочных полей имеется только конечное число основных расходимостей, которые могут быть устранены с помощью процедуры перенормировки.

Для простоты рассмотрим калибровочное поле в отсутствие фермионов, т. е. глюонное поле с самодействием без кварков. При анализе расходимостей мы будем считать, что в интегралах, определяющих матричные элементы  $S$ -матрицы, произведен поворот в комплексной плоскости  $p_0$  на угол  $\pi/2$ , в результате чего 4-импульсы виртуальных частиц становятся эвклидовыми (а не псевдоэвклидовыми, см. раздел 3.3.1). Кроме того, чтобы иметь дело с конечными величинами, мы произведем промежуточную регуляризацию с помощью одного из описанных в § 3.3 способов, например путем введения граничного импульса  $\mathcal{M}$ , который в дальнейшем (после перенормировки) должен быть устремлен к бесконечности.

В рассматриваемой нами квантовой динамике глюонов матричные элементы  $S$ -матрицы содержат в качестве основных величин функцию распространения глюонов  $i\delta_{ab}\mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k; \xi)$ , функцию распространения фермионных скалярных «духов»  $\delta_{ab}\mathcal{D}^c(k)$  и три типа вершинных функций:  $V_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3)$  (тройная глюонная вершина),  $V_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3)$  (тройная глюон-«духовая» вершина) и  $V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4)$  (четверная глюонная вершина). Эти функции ведут себя в области больших импульсов как

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu\lambda}^{abc} &\sim k_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad V_{\mu}^{abc} \sim k_3, \quad \mathcal{D}^c(k) \sim \frac{1}{k^2}, \\ V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} &\sim k_i^0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(k, \xi) \sim \frac{1}{k^2}. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Мы рассмотрим сначала неприводимые диаграммы, т. е. диаграммы, не содержащие внутри себя собственно энергетических и вершинных частей (т. е. функций распространения  $G_{\mu\nu}$ ,  $G$  и вершинных функций  $\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ ,  $\Gamma_{\mu}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu\rho}$  в высших порядках теории возмущений; нулевым приближением для этих функций являются функции (4.4.1)). Такая неприводимая диаграмма содержит в общем случае  $N$  внешних глюонных линий,

$N_c$  внешних «духовых» линий (если данная диаграмма является внутренней частью более сложной диаграммы),  $F$  — внутренних глюонных линий,  $F_c$  — внутренних «духовых» линий,  $n_3, n_4$  — тройных и четверных глюонных вершин и, наконец,  $n_c$  — тройных глюон-«духовых» вершин.

Так как в каждую глюон-«духовую» вершину входит одна «духовая» линия (и одна «духовая» линия выходит), то число «духовых» вершин будет равно  $F_c + \frac{1}{2} N_c$  (только половина внешних «духовых» линий входит в глюон-«духовые» вершины рассматриваемой диаграммы),

$$n_c = F_c + \frac{1}{2} N_c.$$

Так как с вершиной  $V_{\mu\nu\rho}$  связано четыре глюонные линии, с вершиной  $V_{\mu\nu\lambda}$  — три глюонных линии и с вершиной  $V_\mu$  — одна глюонная линия, то число  $4n_4 + 3n_3 + n_c$  будет равно удвоенному числу внутренних глюонных линий (глюонная линия всегда связана с двумя какими-либо вершинами) плюс число внешних глюонных линий (каждая внешняя глюонная линия связана только с какой-либо одной вершиной),

$$4n_4 + 3n_3 + n_c = 2F + N.$$

Из этих формул можно выразить число внутренних линий  $F, F_c$  через числа вершин и внешних линий:

$$F_c = \frac{1}{2} (2n_c - N_c), \quad F = \frac{1}{2} (4n_4 + 3n_3 + n_c - N). \quad (4.4.2)$$

Как и в квантовой электродинамике (см. § 3.3), интеграл  $\mathcal{I}$ , соответствующий рассматриваемой неприводимой диаграмме, согласно (4.4.2), можно схематически представить в виде

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4\omega_1 p}{p^{\omega_1}},$$

где

$$\omega_1 = F + F_c - (n - 1), \quad \omega_2 = 2F + 2F_c - n_3 - n_c \quad (4.4.3)$$

и  $n = n_3 + n_4 + n_c$ . Поскольку мы рассматриваем связанную неприводимую диаграмму, то подынтегральная функция не распадается на множители, содержащие независимые переменные. Поэтому сходимость интеграла определяется разностью  $4\omega_1 - \omega_2$  (она называется индексом расходимости диаграммы)

$$\omega = 4\omega_1 - \omega_2.$$

Используя формулы (4.4.2), (4.4.3), имеем

$$\omega = 4 - N - N_c. \quad (4.4.4)$$

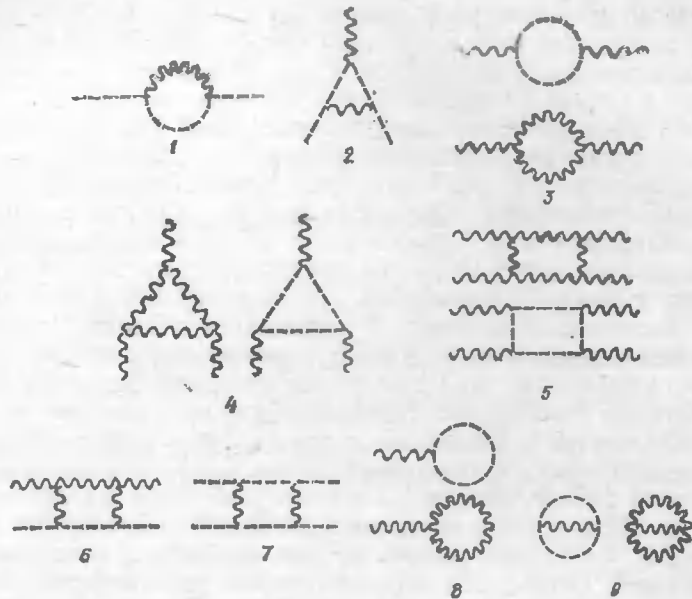


Рис. 22.

При  $\omega < 0$  интеграл  $\mathcal{I}$  сходится, при  $\omega \geq 0$  — расходится. Здесь, также как и в квантовой электродинамике, величина  $\omega$  не зависит от числа вершин  $n_3, n_4, n_c$ .

Из (4.4.4) следует, что имеется ограниченное число типов расходимостей (а именно девять), соответствующих следующим значениям  $N$  и  $N_c$ :

Характеристика диаграммы	Тип расходимостей								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N$	0	1	2	3	4	2	0	1	0
$N_c$	2	2	0	0	0	2	4	0	0
$\omega$	2	1	2	1	0	0	0	3	4

Типичные диаграммы, соответствующие этим типам расходимостей, изображены на рис. 22. Заметим, что диаграммы, соответствующие случаям 7 и 6, в действительности не приводят к логарифмическим расходимостям и, следовательно, являются сходящимися. Это связано с тем, что «духовая» вершина  $V_\mu$  пропорциональна импульсу только входящей «духовой» линии. Диаграммы же 7 и 6 обязательно содержат хотя бы одну внешнюю вершину с входящей внешней «духовой» линией, по которой не производится интегрирование. Поэтому при

определении степени расходимости мы завязали ее в этих случаях по крайней мере на единицу, следовательно, интегралы, соответствующие случаям 7 и 6, будут сходящимися. Диаграммы типа 8 могут, очевидно, не рассматриваться, так как соответствующие интегралы представляют собой 4-векторы, причем 4-импульс внешней линии диаграммы равен нулю и, следовательно, в силу релятивистской инвариантности соответствующих интегралы обращаются в нуль. Наконец, вакуумные диаграммы типа 9, также как и в случае квантовой электродинамики, могут не учитываться, поскольку они приводят только к фазовому множителю с бесконечной фазой в матричных элементах  $S$ -матрицы. В оставшихся случаях, соответствующих диаграммам типа 1—5, мы также имеем завязанные степени расходимости. Однако если учесть требования релятивистской и калибровочной инвариантности промежуточной регуляризации, то мы получаем для диаграмм типа 1—5 только логарифмические расходимости (см. § 3.3). В этом смысле ситуация с расходимостями в теории неабелевых калибровочных полей аналогична ситуации в квантовой электродинамике.

**4.4.2. Перенормируемость теории неабелевых калибровочных полей.** Оставшиеся логарифмические расходимости могут быть устранены, как и в квантовой электродинамике, путем перенормировки константы связи  $g$ , а также требованием, чтобы масса глюона после перенормировки оставалась равной нулю. Кроме того, если рассматривать калибровочно неинвариантные величины, то должна быть перенормирована также константа  $\xi$ , фиксирующая калибровку.

Функции Грина и вершинные функции, соответствующие диаграммам типов 1—5, обозначим через  $G^{ab}(p)$ ,  $G_{\mu\nu}^{ab}(p)$ ,  $\Gamma_{\mu}^{abc}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ ,  $\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}$ . Эти функции учитывают все радиационные поправки к элементарным функциям Грина и вершинным функциям, поэтому

$$G^{ab}(p)|_{g=0} = \delta_{ab} \mathcal{D}^c(p), \quad G_{\mu\nu}^{ab}(p)|_{g=0} = \delta_{ab} \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(p; \xi), \quad (4.4.5)$$

$$\Gamma_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3)|_{g=0} = V_{\mu}^{abc}(k_1, k_2, k_3),$$

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3)|_{g=0} = V_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3),$$

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4)|_{g=0} = V_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4).$$

Они соответствуют эффективным линиям и эффективным вершинам, которые должны подставляться в скелетные (неприводимые) диаграммы.

Расходимости в функциях Грина и вершинных функциях, как и в квантовой электродинамике, выделяются в виде множителей

$$G^{ab}(g, \xi) = \tilde{z}_3^{-1} \underline{G}^{ab}(g, \xi), \quad G_{\mu\nu}^{ab}(g, \xi) = z_3 \underline{G}_{\mu\nu}^{ab}(g, \xi),$$

$$\Gamma_{\mu}^{abc}(g, \xi) = \tilde{z}_1^{-1} \underline{\Gamma}_{\mu}^{abc}(g, \xi), \quad \Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(g, \xi) = z_1^{-1} \underline{\Gamma}_{\mu\nu\lambda}^{abc}(g, \xi),$$

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(g, \xi) = z^{-1} \underline{\Gamma}_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd}(g, \xi), \quad (4.4.6)$$

где черта снизу служит для обозначения перенормированных величин (для краткости импульсные переменные во всех функциях опущены).

Далее мы покажем, что функция  $G_{\mu\nu}^{ab}$  имеет следующую структуру:

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k, \xi) = G_t^{ab}(k, \xi) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) - \xi \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2)^2} \delta_{ab}, \quad (4.4.7)$$

где  $G_t^{ab}$  — поперечная часть функции Грина, содержащая расходимости;  $\xi \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2)^2}$  — продольная часть функции Грина, не испытывающая влияния взаимодействия. Считая, что перенормированная функция  $\underline{G}_{\mu\nu}^{ab}$  определяется формулой, аналогичной (4.4.7):

$$\underline{G}_{\mu\nu}^{ab}(k, \bar{\xi}) = \underline{G}_t^{ab}(k, \bar{\xi}) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) - \bar{\xi} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2)^2} \delta_{ab}, \quad (4.4.8)$$

мы приходим к соотношению

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{z_3}. \quad (4.4.9)$$

Связь перенормированной константы связи  $g$  с перенормированной константой связи  $g$  установим несколько позже, а пока заметим, что величины  $z$  и перенормированные функции  $\underline{G}$ ,  $\underline{\Gamma}$  определяются соотношениями (4.4.6) неоднозначно, именно эти величины определены с точностью до конечных множителей  $z'$  и  $z'^{-1}$ . Для устранения этого произвола потребуем, чтобы функции  $G$ ,  $\underline{G}_t$  и  $\underline{\Gamma}_{\mu}^{abc} k_3^{\mu}$  при  $k^2 = -\mu^2$  и  $k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = -\mu^2$  (где  $\mu^2 > 0$  — некоторая константа) вели себя так, как и функции  $G$ ,  $G_t$  и  $\Gamma_{\mu}^{abc} k_3^{\mu}$  при  $k^2 = -\mu^2$  и  $k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = -\mu^2$  и  $g = 0$  \*:

$$\underline{G}^{ab}(p)|_{p^2=-\mu^2} = \delta_{ab} \mathcal{D}^c(p)|_{p^2=-\mu^2},$$

$$\underline{G}_{(+)}^{ab}(k)|_{k^2=-\mu^2} = \delta_{ab} \mathcal{D}^c(k)|_{k^2=-\mu^2}, \quad (4.4.10)$$

$$k_3^{\lambda} \underline{\Gamma}_{\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3)|_{k_1^2=k_2^2=k_3^2=-\mu^2} = k_3^{\lambda} V_{\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3)|_{k_1^2=k_2^2=k_3^2=-\mu^2}.$$

\* В квантовой электродинамике перенормированную вершинную функцию мы нормировали несколько иначе (см. (3.3.51)).

Эти соотношения определяют величины  $\tilde{z}_3, z_3, \tilde{z}_1$ . Величины  $z_1$  и  $z$  мы доопределим далее исходя из требования выполнения соотношения (4.4.12). Напомним, что аналогичным образом мы определяли перенормированные функции и в квантовой электродинамике, считая, что вблизи массовой поверхности частиц ( $k^2 = 0, p^2 = m^2$ ) они ведут себя как соответствующие функции свободных частиц. В рассматриваемом случае точку нормировки  $p^2 = -\mu^2$  мы считаем отличной от нуля, так как ввиду равенства нулю массы глюона выбор  $\mu = 0$  приводил бы к инфракрасным расходимостям. Считая  $\mu^2 > 0$ , мы добиваемся того, что все константы  $z$  будут вещественными, поскольку для пространственно подобных импульсов функции  $G, \Gamma$  являются вещественными.

Заметим, что наличие величины  $\mu$  является существенным для всей дальнейшей теории и она будет входить во все конечные результаты. Вместе с тем выбор величины  $\mu$  является произвольным и это обстоятельство будет использовано нами при выводе уравнений ренормализационной группы.

Если считать, что

$$\underline{g} = g \frac{z_3^{3/2}}{z_1} \quad (4.4.11)$$

и предположить, что величины  $z$  связаны между собой соотношениями

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_3}, \quad z = \frac{z_1}{z_3}, \quad (4.4.12)$$

то из отсутствия расходимостей в функциях  $\underline{G}, \underline{\Gamma}$  будет следовать отсутствие расходимости и в матричных элементах  $S$ -матрицы. Соотношения (4.4.12) будут доказаны нами в следующем разделе (они называются тождествами Уорда).

Для доказательства сделанного утверждения рассмотрим некую скелетную (неприводимую) диаграмму, содержащую  $N$  внешних глюонных линий,  $N_c$  внешних, «духовых» линий,  $n_4$  четверных вершин,  $n_3$  тройных глюонных вершин и  $n_c$  тройных глюон-«духовых» вершин. Эта диаграмма содержит также  $F$  внутренних глюонных линий и  $F_c$  внутренних «духовых» линий. Соответствующую этой диаграмме внутреннюю часть (без внешних линий) обозначим через  $g^{2n_4+n_3+n_c} U_n(G, \Gamma)$  (степень  $g$  соответствует тому, что каждая четверная вершина вносит вклад  $g^2$ , а каждая тройная — вклад  $g$ ). Величина  $U_n(G, \Gamma)$  представляет собой некоторый функционал функций Грина  $G$  и вершинных функций  $\Gamma$ , соответствующих эффективным линиям и вершинам, входящим в рассматриваемую диаграмму.

Матричный элемент  $S$ -матрицы (без внешних линий) будет определяться величиной

$$U(G, \Gamma, g) = \sum_n g^{2n_4+n_3+n_c} U_n(G, \Gamma), \quad (4.4.13)$$

где суммирование производится по всем скелетным диаграммам, относящимся к рассматриваемому процессу. Используя соотношения (4.4.10), (4.4.11), эту величину можно переписать в виде

$$U(G, \Gamma, g) = \sum_n \underline{g}^{2n_4+n_3+n_c} U_n(\underline{G}, \underline{\Gamma}) z^{-n_4} \tilde{z}_1^{-n_c} \tilde{z}_3^{F_c} z_1^{2n_4+n_c} \times \\ \times z_3^{F - \frac{3}{2}(2n_4+n_3+n_c)}.$$

Входящее сюда произведение множителей  $z$  в силу (4.4.2) равно

$$z^{-n_4} \tilde{z}_1^{-n_c} \tilde{z}_3^{F_c} z_1^{2n_4+n_c} z_3^{F - \frac{3}{2}(2n_4+n_3+n_c)} = \\ = \tilde{z}_3^{-\frac{1}{2}N_c} z_3^{-\frac{1}{2}N} \left( \frac{z_3}{z_1} \right)^{n_c} z^{-n_4} z_1^{2n_4+n_c} \tilde{z}_3^{-n_4-n_c}.$$

Поэтому, используя (4.4.12), получаем

$$U(G, \Gamma, g) = z_3^{-\frac{1}{2}N_c} z_3^{-\frac{1}{2}N} \sum_n \underline{g}^{2n_4+n_3+n_c} U_n(\underline{G}, \underline{\Gamma}),$$

откуда следует, что

$$U(G, \Gamma, g) = z_3^{-\frac{1}{2}N_c} z_3^{-\frac{1}{2}N} U(\underline{G}, \underline{\Gamma}, \underline{g}). \quad (4.4.14)$$

Величины  $\underline{G}, \underline{\Gamma}$  в области больших импульсов с точностью до множителей, ведущих себя как логарифмы импульсов, имеют такое же поведение, как и поведение соответствующих функций свободных частиц (см. § 3.3). Поэтому, используя данные раздела 3.3.7, можно прийти к выводу, что величина  $U(\underline{G}, \underline{\Gamma}, \underline{g})$  (в рамках теории возмущений) не будет содержать расходимостей.

Как и в квантовой электродинамике, внешние линии содержат радиационные вставки, благодаря которым внешние линии заменяются некоторыми эффективными внешними линиями. Эффективным линиям сопоставляются эффективные векторы поляризации глюонов  $\bar{e}^{(\lambda)}$ , связанные с исходными векторами поляризации  $e^{(\lambda)}$  (которые сопоставляются обычным внешним линиям) соотношением

$$\bar{e}^{(\lambda)} = z_3^{1/2} e^{(\lambda)} \quad (4.4.15)$$

(формальное соотношение для «духовых» частиц, аналогичное (4.4.15), имеет вид  $c = \bar{z}_3^{1/2} c$ ). Таким образом, согласно (4.4.14), (4.4.15) матричные элементы  $S$ -матрицы определяются формулой

$$S_{i \rightarrow j} = (e^{\lambda_j})^N U(G, \Gamma, g) = (e^{\lambda_i})^N U(\underline{G}, \underline{\Gamma}, \underline{g}) \quad (4.4.16)$$

и являются, следовательно, конечными в теории возмущений по  $g$  (мы положили здесь  $N_c = 0$ ). Это соотношение и выражает свойство перенормируемости теории неабелева калибровочного поля.

Как мы видим, соотношения Уорда (4.4.12) играют фундаментальную роль при выводе перенормируемости теории неабелева калибровочного поля. Такой роли не играют тождества Уорда в квантовой электродинамике (см. раздел 3.2.4).

Формула (4.4.16) позволяет найти с помощью теории возмущений конечные матричные элементы произвольного физического процесса, если известно разложение в ряд по степеням  $\underline{g}$  перенормированных функций Грина  $\underline{G}$  и перенормированных вершинных функций  $\underline{\Gamma}$ . Построение теории возмущений по степеням  $\underline{g}$  для величин  $\underline{G}, \underline{\Gamma}$  производится, как и в квантовой электродинамике, и приводит к вычитательной процедуре, т. е. в низших порядках теории возмущений из вершинных функций и массовых операторов функций Грина должно быть вычтено  $\omega + 1$  первых членов разложения этих величин в ряд Тейлора ( $\omega$  — индекс расходимости соответствующей величины).

**4.4.3. Тождества Уорда.** В предыдущем разделе при доказательстве перенормируемости теории неабелева калибровочного поля использовались тождества Уорда, представляющие собой некоторые соотношения между перенормировочными константами  $z$ . В этом разделе мы разъясним как выводятся эти тождества.

Напомним сначала определение функций Грина калибровочного поля  $G_{\mu\nu}^{ab}(k)$  и «духового» поля  $G^{ab}(p)$  (см. формулы (4.4.5), а также (1.6.52)):

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i \int d^4x e^{ikx} \langle 0 | T (A_\mu^a(x) A_\nu^b(0)) | 0 \rangle, \quad (4.4.17)$$

$$G^{ab}(p) = \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T (\bar{c}^a(x) c^b(0)) | 0 \rangle.$$

Здесь  $A_\mu^a, c^a, \bar{c}^a$  — операторы глюонных и «духовых» полей в гейзенберговском представлении, усреднение производится по вакууму взаимодействующих полей. Используя одновременные перестановочные соотношения (4.2.28)

$$\delta(t-t') \{\partial_\alpha c^a(x), \bar{c}^b(x')\} = -\delta(x-x') \delta_{ab}$$

и замечая, что  $\partial_0 \theta(t) = \delta(t)$ , имеем

$$\partial_\mu \partial_\mu \langle 0 | T (c^a(x) \bar{c}^b(0)) | 0 \rangle = \langle 0 | T (\partial^\mu \partial_\mu c^a(x) \bar{c}^b(0)) | 0 \rangle - \delta(x) \delta_{ab}. \quad (4.4.18)$$

Согласно уравнениям поля (4.2.10),

$$\partial^\mu \partial_\mu c^a(x) = -g \partial^\mu (A_\mu(x) \times c(x))^a.$$

Поэтому, учитывая (4.4.17), (4.4.18), находим

$$-ip^2 G^{ab}(p) = i\delta_{ab} + \Sigma^{ac}(p) G^{cb}(p),$$

где матрица  $\Sigma^{ac}(p)$  определяется соотношением

$$\Sigma^{ac}(p) G^{cb}(p) = g \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T ((A_\mu(x) \times c(x))^a \bar{c}^b(0)) | 0 \rangle. \quad (4.4.19)$$

Величину  $\Sigma(p)$  можно представить в виде

$$\Sigma(p) = p^\mu \Sigma_\mu(p), \quad \Sigma_\mu(p) = \frac{p_\mu}{p^2} \Sigma(p), \quad (4.4.20)$$

где  $\Sigma_\mu(p)$  определяется уравнением

$$i\Sigma_\mu^{ac}(p) G^{cb}(p) = g \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T ((A_\mu(x) \times c(x))^a \bar{c}^b(0)) | 0 \rangle. \quad (4.4.21)$$

Таким образом, «духовая» функция Грина представима в виде

$$G(p) = -\frac{1}{p^2 + \Sigma(p)}, \quad (4.4.22)$$

так что

$$G = \mathcal{D} + \mathcal{D}^c \Sigma G \quad (4.4.23)$$

и, следовательно, матрица  $\Sigma^{ac}$  играет роль массового оператора функции Грина  $G^{ab}$ .

Рассмотрим теперь тройную глюон-«духовую» вершинную функцию  $\Gamma_\mu^{abc}(p, q)$ . Эта функция связана с фурье-компонентой, соответствующей функции Грина, соотношением

$$\int d^4x d^4y e^{ipx+iqy} \langle 0 | T (c^d(x) \bar{c}^e(y) A_\mu^f(0)) | 0 \rangle = -g \Gamma_\mu^{abc}(p, q) G^{ad}(p) G^{be}(q) G_\mu^{fd}(k), \quad p+q+k=0 \quad (4.4.24)$$

(сравним с аналогичной формулой (3.2.21) в квантовой электродинамике).

Поступая как и при выводе соотношения (4.4.18) и учитывая, что  $\langle 0 | A_\mu^a | 0 \rangle = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} & \partial^\mu \partial_\mu \langle 0 | T (c^d(x) \bar{c}^e(y) A_\nu^f(0)) | 0 \rangle = \\ & = -g \partial^\mu \langle 0 | T ((A_\mu(x) \times c(x))^d \bar{c}^e(y) A_\nu^f(0)) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

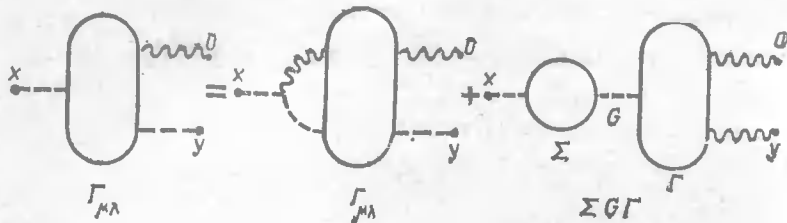


Рис. 23.

Поэтому

$$ip^2 g \Gamma_{\mu}^{abc}(p, q) G^{ad}(p) G^{be}(q) G_{\nu}^{c\lambda}(k) = gp^{\mu} \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{dbc}(p, q) G^{bc}(q) G_{\nu}^{f\lambda}(k)$$

или

$$ip^2 \Gamma_{\mu}^{abc}(p, q) G^{ad}(p) = p^{\nu} \bar{\Gamma}_{\nu\mu}^{dbc}(p, q), \quad (4.4.25)$$

где функция  $\bar{\Gamma}_{\nu\mu}$  определяется с помощью соотношения

$$\begin{aligned} i \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{dbc}(p, q) G^{be}(q) G_{\nu}^{c\lambda}(k) = \\ = -i \int d^4x d^4y e^{ipx+iqy} \langle 0 | T \{ (A_{\mu}(x) \times c(x))^d \bar{c}^e(y) A_{\nu}^f(0) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

Используя (4.4.23), (4.4.21), соотношение (4.4.25) можно представить в виде

$$\Gamma_{\mu}^{abc}(p, q) = ip^{\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^{abc}(p, q), \quad (4.4.27)$$

где

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{abc}(p, q) = \bar{\Gamma}_{\lambda\mu}^{abc}(p, q) + i(\Sigma_{\lambda}(p) G(p))^{da} \Gamma_{\mu}^{abc}(p, q). \quad (4.4.28)$$

Это соотношение допускает простую диаграммную интерпретацию. Именно, функция  $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}(x, y, 0)$  соответствует диаграмме, изображенной в левой части диаграммного равенства на рис. 23 (точке  $x$  соответствует совмещенные в этой точке полевые операторы  $A_{\mu}$  и  $c$ ). Первая диаграмма в правой части этого равенства соответствует всем компактным (т. е. не разделяющимся на две части путем пересечения только одной линии) частям величины  $\bar{\Gamma}_{\lambda\mu}$ ; второй член правой части диаграммного равенства соответствует некомпактным частям величины  $\Gamma_{\lambda\mu}$ .

Выписанные нами в этом разделе формулы являлись определением функций Грина и вершинных функций в терминах вакуумных средних произведений полевых операторов. Используем теперь инвариантность теории по отношению к преобразованиям (4.2.16) [6]. Покажем сначала, что продольная часть глюонной функции Грина не модифицируется взаимо-

действием и определяется формулой

$$q^{\nu} G_{\mu\nu}^{ab}(q) = -\xi \frac{q_{\mu}}{q^2} \delta_{ab}. \quad (4.4.29)$$

Генератором преобразований (4.4.16) является оператор  $G$ , определяемый формулой (4.2.25'). Считая, что  $G|0\rangle = 0$ , имеем

$$\langle 0 | [G, T \{ A_{\mu}^a(x) \bar{G}^b(0) \}] | 0 \rangle = 0.$$

Так как  $i[G, \mathcal{Q}] = \delta\mathcal{Q}$  ( $\mathcal{Q}$  — операторы глюонных и «духовых» полей), то замечая, что (см. (4.2.16), (4.2.16'))

$$\begin{aligned} \delta A_{\mu}^a(x) = i\xi \mathcal{Q}_{\mu} c^a(x), \quad \delta \bar{c}^a(x) = -\frac{1}{\xi} \xi \partial^{\mu} A_{\mu}^a(x), \\ \delta c^a(x) = -\frac{i}{2} g \xi (c(x) \times c(x))^a, \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

получаем

$$\begin{aligned} i\xi \langle 0 | T \{ \mathcal{Q}_{\mu} c^a(x) \bar{c}^b(0) \} | 0 \rangle - \\ - \frac{1}{\xi} \xi \langle 0 | T \{ A_{\mu}^a(x) \partial^{\nu} A_{\nu}^b(0) \} | 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Так как операторы  $A_{\mu}^a(x)$  коммутируют между собой в один и тот же момент времени, то

$$\partial^{\nu} \langle 0 | T \{ A_{\mu}^a(x) A_{\nu}^b(0) \} | 0 \rangle = -i\xi \langle 0 | T \{ \mathcal{Q}_{\mu} c^a(x) \bar{c}^b(0) \} | 0 \rangle.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{Q}_{\mu} c^a(x) = \partial_{\mu} c^a(x) + g (A_{\mu}(x) \times c(x))^a$$

и используя определение величины  $\Sigma_{\mu}(q)$ , получаем отсюда для фурье-компонент

$$-ik^{\nu} G_{\mu\nu}^{ab}(k) = -i\xi k_{\mu} G^{ab}(k) - i\xi (\Sigma_{\mu}(k) G(k))^{ab}. \quad (4.4.31)$$

Используя формулы (4.4.23), (4.4.20), мы приходим к соотношению (4.4.29). Таким образом, функцию Грина глюонов можно представить в виде

$$G_{\mu\nu}^{ab}(k) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2} \right) G_i^{ab}(k) - \xi \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2)^2} \delta_{ab}, \quad (4.4.32)$$

где  $G_i^{ab}(k)$  — поперечная часть функции Грина.

Покажем теперь, что между введенными в этом разделе вершинными функциями  $\Gamma_{\mu}^{abc}$ ,  $\Gamma_{\mu\lambda}^{abc}$  и функциями Грина имеет место соотношение

$$\begin{aligned} - \left( \Gamma_{\mu\lambda}^{aef}(p, q) + i \frac{p_{\mu}}{p^2} \Gamma_{\lambda}^{aef}(p, q) \right) G^{eb}(q) k^{\lambda} + \\ + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{def}(p, q) G^{d\alpha\alpha}_{\mu}(p) \frac{q^{\beta}}{q^2} k^{\gamma} = 0, \end{aligned} \quad (4.4.33)$$

Для доказательства заметим, что справедливо соотношение

$$\langle 0 | [G, T(A_\mu^a(x) \bar{c}^b(y) \partial^\nu A_\nu^c(0))] | 0 \rangle = 0.$$

Используя формулы (4.4.30) и замечая, что  $\delta \partial^\nu A_\nu^c(x) = 0$ , имеем

$$-\frac{1}{\xi} \langle 0 | T(A_\mu^a(x) \partial^\lambda A_\lambda^b(y) \partial^\nu A_\nu^c(0)) | 0 \rangle + i \partial_\mu \langle 0 | T(c^a(x) \bar{c}^b(y) \times \\ \times \partial^\nu A_\nu^c(0)) | 0 \rangle + ig \langle 0 | T((A_\mu(x) \times c(x))^a \bar{c}^b(y) \partial^\nu A_\nu^c(0)) | 0 \rangle = 0 \quad (4.4.34)$$

(мы при этом учли, что  $\langle 0 | A_\nu^c | 0 \rangle = 0$ ).

Трехглюонная вершинная функция определяется формулой, аналогичной формуле (4.4.24):

$$g \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{def}(p, q) G^{da\alpha}_\mu(p) G^{eb\beta}_\lambda(q) G^{fc\gamma}_\nu(k) = \\ = \int d^4x d^4y e^{ipx+iqy} \langle 0 | T\{A_\mu^a(x) A_\lambda^b(y) A_\nu^c(0)\} | 0 \rangle, \quad p+q+k=0. \quad (4.4.35)$$

Используя определения величин  $\Gamma_\mu^{abc}(p, q)$ ,  $\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{abc}(p, q)$ , а также соотношение (4.4.29), перепишем формулу (4.4.34) в виде

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{def}(p, q) G^{da\alpha}_\mu(p) \frac{q^\beta k^\gamma}{q^2 k^2} + ip_\mu \Gamma_\alpha^{def}(p, q) G^{da}(p) G^{eb}(q) \frac{k^\alpha}{k^2} - \\ - \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{def}(p, q) G^{eb}(q) \frac{k^\lambda}{k^2} = 0.$$

Замечая, что, согласно (4.4.28), (4.4.22),

$$\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^{def}(p, q) - ip_\mu \Gamma_{\mu\lambda}^{def}(p, q) G^{da}(p) = \Gamma_{\mu\lambda}^{def}(p, q) + i \frac{p_\mu}{p^2} \Gamma_\lambda^{def}(p, q),$$

мы приходим к формуле (4.4.33).

Так как  $\Gamma_\mu^{abc}(p, q) = ip^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^{abc}(p, q)$  (см. (4.4.27)), то из (4.4.33) вытекает, что

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{abc}(p, q) p^\alpha q^\beta k^\gamma = 0 \quad (4.4.36)$$

и, следовательно, согласно (4.4.32),

$$-\left( \Gamma_{\mu\lambda}^{def}(p, q) + i \frac{p_\mu}{p^2} \Gamma_\lambda^{def}(p, q) \right) G^{eb}(q) k^\lambda + \\ + \Gamma_{\mu\beta\lambda}^{def}(p, q) \frac{q^\beta}{q^2} k^\lambda G_i^{da}(p) = 0, \quad k = -p - q. \quad (4.4.37)$$

Соотношения (4.4.36), (4.4.37) называются соотношениями Уорда для неабелевого калибровочного поля. Мы воспользуемся этими соотношениями для вывода первого из тождества (4.4.12) для перенормировочных констант. Заметим, что если

величина  $\Gamma_{\lambda\mu}^{abc}$  перенормируется с помощью некоторой константы  $z_1'$  (см. также раздел 5.6.5)

$$\Gamma_{\lambda\mu}(p, q) = (z_1')^{-1} \Gamma_{\lambda\mu}(p, q),$$

то, согласно (4.4.27), эта константа будет совпадать с величиной  $\tilde{z}_1$ ,  $z_1' = z_1$ . Поэтому, согласно (4.4.37),

$$-\tilde{z}_1^{-1} \tilde{z}_3 \left( \Gamma_{\mu\lambda}^{def}(p, q) + i \frac{p_\mu}{p^2} \Gamma_\lambda^{def}(p, q) \right) G^{eb}(q) k^\lambda + \\ + \tilde{z}_1^{-1} z_3 \Gamma_{\mu\beta\lambda}^{def}(p, q) \frac{q^\beta}{q^2} k^\lambda G_i^{da}(p) = 0, \quad k = -p - q.$$

Так как функции перед множителями  $\tilde{z}_1^{-1} \tilde{z}_3$  и  $z_1^{-1} z_3$  конечны (в теории возмущений), то конечной (в теории возмущений) будет также и величина  $\tilde{z}_1^{-1} \tilde{z}_3 / z_1^{-1} z_3$ . Учитывая, что конечная перенормировка величины  $z_1$  нами не была фиксирована, мы можем считать, что  $z_1/z_3 = \tilde{z}_1/\tilde{z}_3$  (см. (4.4.12)). Таким образом, тождество Уорда (4.4.37) для перенормированных и неперенормированных величин будет иметь одинаковый вид\*.

Замечая, что  $\langle 0 | [G, T(A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) A_\lambda^c(x_3) A_\rho^d(x_4))] | 0 \rangle = 0$ , можно получить соотношение Уорда, аналогичное соотношению (4.4.37), в которое будет входить четырехглюонная вершина  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}$ . Мы не будем приводить этого соотношения, заметим лишь, что из него вытекает второе из соотношений (4.4.12):  $z = z_1^2/z_3$ .

## § 4.5. Функции Грина и константы перенормировки во втором порядке теории возмущений

**4.5.1. Функция Грина и константа перенормировки скалярного фермионного поля.** Мы вычислим теперь функции Грина и константы перенормировки во втором приближении теории возмущений по константе связи  $g$ . При этом будем пользоваться методом размерной регуляризации, поскольку этот метод является явно калибровочно инвариантным. Начнем с рассмотрения функции Грина скалярного фермионного или «духового» поля.

Массовый оператор этой функции Грина во втором приближении теории возмущений определяется диаграммой, изображенной на рис. 24. Соответствующая величина  $\Sigma^{(2)ab}(p)$ ,

\* Тождества Уорда для неабелевых калибровочных полей были получены Славновым [21] и Тейлором [22].

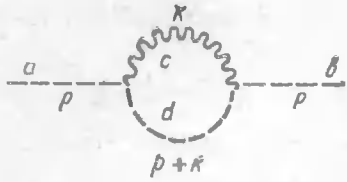


Рис. 24.

согласно правилам Фейнмана, определяется формулой

$$\Sigma^{(2)ab}(p) = -ig^2 f^{adc} f^{bcd} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ \times (p+k)^\alpha p^\beta \frac{i}{(p+k)^2} \frac{-i}{k^2} \times \\ \times \left( g_{\alpha\beta} - (1-\xi) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right). \quad (4.5.1)$$

В методе размерной регуляризации величина  $d^d k / (2\pi)^d$  должна быть заменена на  $d^d k / (2\pi)^d$  ( $d$  — размерность пространства) и, кроме того, безразмерная константа связи  $g^2$  должна быть заменена на  $g^2 \mu^{4-d}$  ( $\mu$  — произвольная величина, имеющая размерность импульса). При этом сохранится прежняя размерность массового оператора, а следовательно, и правильная размерность функции Грина (эта замена, как мы видели, обеспечивает правильную размерность действия). Не нарушая общности, можно считать, что величина  $\mu$  совпадает с точкой нормировки  $\mu$ , введенной в разделе 4.4.2. Обратим внимание на то, что в методе размерной регуляризации еще до процедуры вычитания возникает величина  $\mu$  размерности массы, которая будет входить даже в перенормированные величины, содержащие в качестве параметров  $\mu$  и  $d-4$ . Таким образом, в  $d$ -мерном пространстве массовый оператор имеет вид

$$\Sigma^{(2)ab}(p) = -ig^2 \mu^{4-d} f^{adc} f^{bcd} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+k)^\alpha p^\beta}{(p+k)^2 k^2} \times \\ \times \left( g_{\alpha\beta} - (1-\xi) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) = ig^2 \mu^{4-d} n \delta_{ab} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ \times \left\{ \frac{p^2}{k^2 (p+k)^2} + \frac{1+\xi}{2} \frac{kp}{k^2 (p+k)^2} = \frac{1-\xi}{2} \frac{kp}{(k^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1-\xi}{2} \frac{p^2 kp}{(k^2)^2 (k+p)^2} \right\}.$$

Мы учли при этом, что  $f^{acd} f^{bcd} = n \delta_{ab}$  (см. раздел 4.1.1). Для вычисления этого и других подобных интегралов будем использовать формулу

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax + b(1-x)]^{\alpha+\beta}}. \quad (4.5.2)$$

Полагая в ней  $a = (k+p)^2$ ,  $b = k^2$  и используя формулы (3.3.29), (3.3.30), мы приходим к следующим выражениям для

интегралов в  $d$ -мерном пространстве:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1; k_\mu}{k^2 (k+p)^2} = \\ = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{1; -xp_\mu}{(x^2 p^2 - xp^2)^{2 - \frac{d}{2}}}, \quad (4.5.3) \\ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1; k_\mu}{(k^2)^2 (k+p)^2} = \\ = -\frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \cdot x \frac{1; -xp_\mu}{(x^2 p^2 - xp^2)^{3 - \frac{d}{2}}}.$$

Используя эти формулы, получаем

$$\Sigma^{(2)ab}(p) = g^2 \mu^{4-d} \frac{-p^2}{(4\pi)^{d/2}} n \delta_{ab} \int_0^1 dx \left\{ \left[ \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \times \right. \right. \\ \times (x^2 p^2 - xp^2)^{\frac{d}{2}-2} - \frac{(1+\xi)}{2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) x (x^2 p^2 - xp^2)^{\frac{d}{2}-2} \left. \right] - \\ \left. - \frac{(1-\xi)}{2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) p^2 x (1-x) (x^2 p^2 - xp^2)^{\frac{d}{2}-3} \right\}.$$

При  $d \rightarrow 4$  расходится только первое слагаемое. Замечая, что справедлива формула (см. (3.3.33))

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) f(d) = \frac{f(4)}{2 - \frac{d}{2}} - C f(4) - 2 \frac{\partial f(4)}{\partial d} + \dots, \quad d \rightarrow 4,$$

где  $f(d)$  — регулярная функция при  $d = 4$ , и полагая в ней

$$f(d) = \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{d/2}} (x^2 p^2 - xp^2)^{\frac{d}{2}-2},$$

получаем

$$\Sigma^{(2)ab}(p) = -\frac{g^2}{16\pi^2} p^2 n \delta_{ab} \left\{ \left( \frac{3}{4} - \frac{\xi}{4} \right) \left( \eta - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} \right) + 1 \right\},$$

где

$$\eta = \frac{2}{4-d} - C + \ln 4\pi. \quad (4.5.4)$$

Функция Грина «духовой» частицы  $G^{ab}(p)$  связана с массовым оператором соотношением

$$G^{ab}(p) = -\frac{1}{p^2 + \Sigma(p)}.$$



Поэтому с точностью до членов второго порядка по  $g$  имеем

$$G^{ab}(p) = -\delta_{ab} \frac{1}{p^2} d(p), \quad (4.5.5)$$

$$d(p) = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} n \left\{ \left( \frac{3}{4} - \frac{\xi}{4} \right) \left( \eta - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} \right) + 1 \right\}.$$

В рассматриваемом приближении функцию Грина  $\underline{G}^{ab}$  можно представить в виде

$$\underline{G}^{ab}(p) = \tilde{z}_3 \underline{G}^{ab}(p), \quad (4.5.6)$$

где

$$\tilde{z}_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} n \left\{ \left( \frac{3}{4} - \frac{\xi}{4} \right) \eta + 1 \right\} \quad (4.5.7)$$

и перенормированная функция Грина  $\underline{G}^{ab}$  определяется формулой

$$\underline{G}^{ab}(p) = -\delta_{ab} \frac{1}{p^2} \underline{d}(p), \quad (4.5.8)$$

$$\underline{d}(p) = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} n \left( \frac{3}{4} - \frac{\xi}{4} \right) \ln \frac{-p^2}{\mu^2}.$$

В соответствии с требованием (4.4.10) мы учли, что

$$\underline{G}^{ab}(p) |_{p^2 = -\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} \delta_{ab}.$$

Заметим, как и в квантовой электродинамике, при использовании промежуточной регуляризации, основанной на введении предельного импульса  $\mathcal{M}$ , величину  $\eta$  в формуле для  $\tilde{z}_3$  следует заменить на  $\ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}$ ,

$$\eta \rightarrow \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}.$$

При этом произвольная величина  $\mu$  в формуле (4.5.5) сокращается.

**4.5.2. Функция Грина и константа перенормировки глюонного поля.** Перейдем теперь к вычислению глюонной функции Грина, которая связана с поляризационным оператором  $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q)$  формулой

$$G(q) = D^c(q; \xi) + D^c(q; \xi) \Pi(q) G(q).$$

Во втором порядке теории возмущений поляризационному оператору соответствуют четыре диаграммы, изображенные на рис. 25. Первые две ( $\Pi_1^{(2)}$ ,  $\Pi_2^{(2)}$ ) соответствуют взаимодействию глюонов друг с другом, третья ( $\Pi_3^{(2)}$ ) соответствует взаимодей-

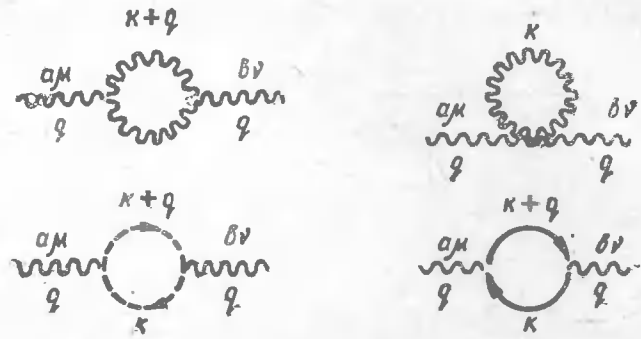


Рис. 25.

ствием глюона с фермионным «духом» и, наконец, четвертая диаграмма соответствует взаимодействию глюона с кварками.

Согласно правилам Фейнмана, величина  $\Pi_1^{(2)}(q)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)ab}(q) = & -\frac{i}{2} \mu^{4-d} g^2 f^{acd} f^{bcd} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 (k+q)^2} (g_{\mu\rho} (q-k)_\lambda + \\ & + g_{\rho\lambda} (q+2k)_\mu - g_{\lambda\mu} (k+2q)_\rho) \left( g_{\rho\sigma} - (1-\xi) \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2} \right) \times \\ & \times (g_{\sigma\nu} (2k+q)_\nu - g_{\nu\nu} (k+2q)_\sigma + g_{\nu\sigma} (q-k)_\nu) \times \\ & \times \left( g_{\nu\lambda} - (1-\xi) \frac{(k+q)_\nu (k+q)_\lambda}{(k+q)^2} \right) \end{aligned}$$

или после раскрытия скобок и учета того, что  $f^{abc} f^{abd} = n \delta_{cd}$ ,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)ab}(q) = & \frac{i}{2} \mu^{4-d} g^2 n \delta_{ab} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ & \times \left\{ \frac{g_{\mu\nu} (2k^2 + 2kq + 5q^2) + (4d-6) k_\mu k_\nu}{k^2 (k+q)^2} + \right. \\ & + \frac{(d-6) q_\mu q_\nu + (2d-3) (q_\mu k_\nu + q_\nu k_\mu)}{k^2 (k+q)^2} - \frac{(1-\xi)}{k^2 (k+q)^4} \times \\ & \times (g_{\mu\nu} (k^2 - q^2)^2 - kq (k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu) + q_\mu q_\nu (2k^2 - q^2) + \\ & + k_\mu k_\nu (2q^2 - k^2)) - \frac{1-\xi}{k^4 (k+q)^2} (g_{\mu\nu} (k^2 + 2kq)^2 - (k^2 + 3kq) \times \\ & \times (k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu) + k^2 q_\mu q_\nu + k_\mu k_\nu (q^2 - k^2 - 2kq)) + \\ & \left. + \frac{(1-\xi)^2}{k^4 (k+q)^4} (q^4 k_\mu k_\nu + (kq)^2 q_\mu q_\nu - q^2 kq (k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu)) \right\}. \end{aligned}$$

Используя формулы (4.5.3), а также формулы

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (k+q)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{x^2 q_\mu q_\nu}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2 - \frac{d}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{g_{\mu\nu}}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \right\}, \quad (4.5.9)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1; k_\mu}{k^2 (k+q)^4} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x \frac{1; -xq_\mu}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2 - \frac{d}{2}}},$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (k+q)^4} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \frac{x^4 q_\mu q_\nu}{(x^2 q^2 - xq^2)^{3 - \frac{d}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \frac{xg_{\mu\nu}}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \right\},$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4 (k+q)^4} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) \frac{x^8 (1-x) q_\mu q_\nu}{(x^2 q^2 - xq^2)^{4 - \frac{d}{2}}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \frac{x(1-x) g_{\mu\nu}}{(x^2 q^2 - xq^2)^{3 - \frac{d}{2}}} \right\},$$

получаем

$$\Pi_{1\mu\nu}^{(2)ab}(q) = \frac{i}{2} n \delta_{ab} g^2 \left(-\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{\frac{d}{2}-2} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx (x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \times \\ \times \left\{ 4q^3 g_{\mu\nu} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + (2d-3) q^2 g_{\mu\nu} x(1-x) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) + \right. \\ \left. + (d-6) q_\mu q_\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) - (4d-6) q_\mu q_\nu x(1-x) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \right. \\ \left. + (1-\xi)(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \left(\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) - 4\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right)\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1-\xi)^2 (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \right\}.$$

Для нахождения асимптотики этого выражения при  $d \rightarrow 4$  нам необходимо воспользоваться формулами (3.3.33). В ре-

зультате получим

$$\Pi_{1\mu\nu}^{(2)ab}(q) = -n \delta_{ab} \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ q^2 g_{\mu\nu} \left( \frac{19}{12} \eta - \frac{19}{12} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{58}{18} \right) + \right. \\ \left. + q_\mu q_\nu \left( -\frac{11}{6} \eta + \frac{11}{6} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - \frac{67}{18} \right) + \right. \\ \left. + (1-\xi)(q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \left( \frac{1}{2} \eta - \frac{1}{2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (1-\xi)^2 (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \right\}. \quad (4.5.10)$$

Перейдем к нахождению  $\Pi_{2\mu\nu}^{(2)ab}(q)$  и  $\Pi_{3\mu\nu}^{(2)ab}(q)$ . Согласно правилам Фейнмана, имеем

$$\Pi_{2\mu\nu}^{(2)ab}(q) = -\frac{i}{2} \mu^{4-d} g^2 \delta^{cd} \{ f^{ab} f^{de} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}) + \\ + f^{ac} f^{de} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bc} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}) \} \times \\ \times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \left( g_{\lambda\rho} - (1-\xi) \frac{k_\lambda k_\rho}{k^2} \right),$$

откуда

$$\Pi_{1\mu\nu}^{(2)ab}(q) = -i \mu^{4-d} g^2 f^{ace} f^{bce} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ \times \left\{ (d-1) \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} - (1-\xi) \frac{k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu}{(k^2)^2} \right\}.$$

Так как, согласно (3.3.28),

$$\int \frac{d^d k}{k^2} = 0,$$

то

$$\Pi_{2\mu\nu}^{(2)ab}(q) = 0. \quad (4.5.11)$$

Согласно правилам Фейнмана и формулам (4.5.3), (4.5.9),

$$\Pi_{3\mu\nu}^{(2)ab}(q) = i \mu^{4-d} q^2 f^{acd} f^{bcd} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu (k+q)_\nu}{k^2 (k+q)^2} = \\ = g^2 n \delta_{ab} \frac{\mu^{4-d}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left\{ q_\mu q_\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) x^2 (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-2} - \right. \\ \left. - q_\mu q_\nu x (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-1} \right\}.$$

Используя формулы (3.3.33), находим отсюда асимптотику этого выражения при  $d \rightarrow 4$

$$\begin{aligned} \Pi_{3\mu\nu}^{(2)ab}(q) = & n\delta_{ab} \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ -\frac{\eta}{12} g_{\mu\nu} q^2 - \frac{\eta}{6} q_\mu q_\nu + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12} g_{\mu\nu} q^2 \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{1}{6} q_\mu q_\nu \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{2}{9} g_{\mu\nu} q^2 - \frac{5}{18} q_\mu q_\nu \right\}, \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Таким образом, согласно (4.5.10), (4.5.11), (4.5.12), имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{1\mu\nu}^{(2)ab}(q) + \Pi_{2\mu\nu}^{(2)ab}(q) + \Pi_{3\mu\nu}^{(2)ab} = & -n\delta_{ab} \frac{g^2}{16\pi^2} (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \times \\ & \times \left\{ \left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - 1 \right) + \frac{175}{36} + \frac{\xi^2}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

Отметим, что только в выписанной сумме (но не в отдельных слагаемых) выделяется множитель  $g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu$ , соответствующий поперечному характеру поляризационного оператора (см. формулу (4.4.32)). Отметим также, что в это выражение (в отличие от квантовой электродинамики) входит величина  $\xi$ , связанная с выбором калибровки. Это связано с тем, что сам по себе поляризационный оператор не является наблюдаемой величиной. В величине же  $\langle 0 | T(F_{\mu\nu}(x) F_{\lambda\rho}(x')) | 0 \rangle$  постоянная  $\xi$  отсутствует.

Вычислим теперь вклад в поляризационный оператор, вносимый кварковой петлей в величину  $\Pi_{\mu\nu}^{(2)ab}(q)$ , считая массу кварка равной нулю. Согласно правилам Фейнмана, этот вклад определяется формулой

$$\Pi_{4\mu\nu}^{(2)ab}(q) = -g^2 \mu^{4-d} (\text{sp } T_a T_b) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu (\hat{k} + \hat{q})}{k^2 (k+q)^2},$$

откуда, вычисляя шпур от произведения дираковских матриц, имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{4\mu\nu}^{(2)ab}(q) = & -4g^2 \mu^{4-d} i (\text{sp } T_a T_b) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} 2^{\frac{d}{2}-2} \times \\ & \times \frac{2k_\mu k_\nu + k_\mu q_\nu + k_\nu q_\mu - g_{\mu\nu} (k^2 + kq)}{k^2 (k+q)^2}. \end{aligned}$$

Используя формулу (4.5.3), а также формулы (4.5.9), определяющие  $d$ -мерные интегралы, получаем

$$\Pi_{4\mu\nu}^{(2)ab}(q) = 2g^2 \mu^{4-d} \frac{2^{\frac{d}{2}-2}}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \left\{ g_{\mu\nu} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-1} + q^2 g_{\mu\nu} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) x (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-2} - \\ & \left. - 2q_\mu q_\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) x (1-x) (x^2 q^2 - xq^2)^{\frac{d}{2}-2} \right\}. \end{aligned}$$

В пределе  $d \rightarrow 4$  эта формула принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_{4\mu\nu}^{(2)ab}(q) = & -\frac{2}{3} \frac{g^2}{16\pi^2} (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \delta_{ab} \times \\ & \times \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{5}{3} - \ln 2 \right) \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

(мы учли при этом, что  $\text{Sp } T_a T_b = \frac{1}{2} \delta_{ab}$ , матрицы  $T_a$  относятся к фундаментальному представлению группы  $SU(n)$ ). Эта формула справедлива и при массе кварка  $m$ , отличной от нуля, если только рассматривать асимптотическую область  $-q^2 \gg m^2$ .

Если в процессе взаимодействия участвует не один кварк, а  $n_f$  различных сортов кварков, то выражение для  $\Pi_{4\mu\nu}^{(2)ab}(q)$  должно быть умножено на  $n_f$ .

Просуммировав вклады всех диаграмм, изображенных на рис. 25, найдем

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)ab}(q) = & -\frac{g^2}{16\pi^2} \delta_{ab} (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \left\{ n \left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) \times \right. \\ & \times \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} - 1 \right) - \frac{2}{3} n_f \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} + \frac{5}{3} - \ln 2 \right) + \\ & \left. + \frac{175}{36} n + \frac{\xi^2}{4} n \right\}. \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

Отсюда может быть найдена функция Грина глюона с учетом поправки второго порядка по  $g$  (мы опускаем конечные при  $d \rightarrow 4$  слагаемые в  $z_3$ ):

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{ab}(q) = & z_3 \underline{G}_{\mu\nu}^{ab}(q), \\ z_3 = & 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \eta \left( n \left( \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right) - \frac{2}{3} n_f \right), \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

где поперечная перенормированная функция Грина глюона  $\underline{G}_{\mu\nu}^{ab}(q)$  определяется формулой

$$\underline{G}_{\mu\nu}^{ab}(q) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \underline{G}_t^{ab}(q), \quad (4.5.17)$$

$$\underline{G}_t^{ab}(z) = -\frac{1}{q^2} \left( 1 + \frac{q^2}{16\pi^2} \left( n \left( \frac{\xi}{2} - \frac{13}{6} \right) + \frac{2}{3} n_f \right) \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right).$$

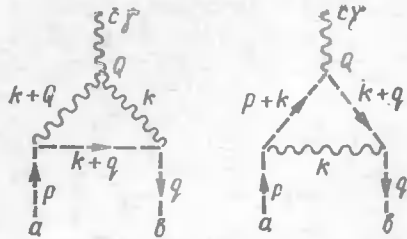


Рис. 26.

Мы учли при этом, что  $G_i^{ab}(q)|_{q^2=-\mu^2} = \mu^{-2} \delta_{ab}$ , а под  $g$  подразумеваем перенормированную константу связи  $g$ , поскольку здесь учитываются только поправки второго порядка.

Заметим, что при использовании предельного импульса величина  $\eta$  долж-

на быть заменена на  $\ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}$ ,  $\eta \rightarrow \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}$ . При этом величина  $\mu$  не будет входить в функцию  $G_i$ .

**4.5.3. Глюон-«духовая» вершина и ее константа перенормировки.** Вычислим теперь константу перенормировки  $z_1$  (во втором порядке теории возмущений), которая будет нам необходима при изучении уравнений ренормализационной группы. С этой целью достаточно исследовать глюон-«духовую» вершину, определяемую диаграммами рис. 26. Согласно правилам Фейнмана, вклады этих диаграмм в вершинную функцию  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  определяется формулами

$$g\Gamma_{1\nu}^{abc}(p, q) = -\left(\mu^{2-\frac{d}{2}} g\right)^3 f^{dga} f^{bed} f^{cge} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k+q)_\mu q_\sigma}{(k+q)^2} \times$$

$$\times (g_{\nu\rho}(k+2Q)_\delta - g_{\rho\delta}(2k+Q)_\nu + g_{\delta\nu}(k-Q)_\rho) \frac{1}{k^2} \times$$

$$\times \left( g_{\delta\sigma} - (1-\xi) \frac{k_\delta k_\sigma}{k^2} \right) \frac{-i}{(k+Q)^2} (g_{\mu\rho} - (1-\xi) \times$$

$$\times \frac{(k+Q)_\mu (k+Q)_\rho}{(k+Q)^2}),$$

$$g\Gamma_{2\nu}^{abc}(p, q) = -\left(\mu^{2-\frac{d}{2}} g\right)^3 f^{dga} f^{bed} f^{cge} q_\beta \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} i \frac{(p+k)_\alpha}{(p+k)^2} \times$$

$$\times (k+q)_\nu \frac{1}{(k+q)^2} \frac{1}{k^2} \left( g^{\alpha\beta} - (1-\xi) \frac{k^\alpha k^\beta}{k^2} \right).$$

Для вычисления константы перенормировки  $z_1$  достаточно вычислить эти величины в симметричной точке  $p^2 = q^2 = Q^2$ . Так как  $q = p + Q$ , то отсюда следует, что  $2pq = 2qQ = -2pQ = q^2$ . Чтобы найти коэффициент в  $z_1$  при величине  $\eta$  нам достаточно удерживать в формулах соответственно для  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  члены вида

$$\frac{k_\nu k_\delta}{k^2 (k+q)^2 (k+Q)^2}, \quad \frac{k_\alpha k_\nu}{k^2 (k+p)^2 (k+q)^2},$$

которые приводят к наиболее сильным расходимостям. Вклад этих наиболее сильно расходящихся членов в  $\Gamma_1$  определяется формулой

$$g\Gamma_{1\nu}^{abc}(p, q) = -i \left(\mu^{2-\frac{d}{2}} g\right)^3 \frac{n}{2} f^{abc} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times$$

$$\times \frac{1}{k^2 (k+q)^2 (k+Q)^2} \{-kqk_\nu + k^2 q_\nu -$$

$$- (1-\xi)(-kqk_\nu + k^2 q_\nu)\} = -i \left(\mu^{2-\frac{d}{2}} g\right)^3 \times$$

$$\times \frac{\xi n}{2} f^{abc} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2 q_\nu - kqk_\nu}{k^2 (k+q)^2 (k+Q)^2}.$$

Мы учли при этом, что, согласно (4.1.24),

$$f^{adg} f^{gce} f^{bed} = -\frac{n}{2} f^{abc}.$$

Используя формулу

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta c^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times$$

$$\times \frac{y^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} (1-x)^{\gamma-1}}{[ay + b(x-y) + c(1-x)]^{\alpha+\beta+\gamma}} \quad (4.5.18)$$

и полагая в ней  $a = (k+Q)^2$ ,  $b = (k+q)^2$ ,  $c = k^2$ , получаем

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{kqk_\nu}{k^2 (k+q)^2 (k+Q)^2} = \Gamma(3) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times$$

$$\times \frac{kqk_\nu}{[k^2 + 2k(xq - yp) + xq^2]^3} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \int_0^x dy \times$$

$$\times \left\{ \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) (ypq - xq^2) (yp_\nu - xq_\nu) B^{\frac{d}{2}-3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} q_\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) B^{\frac{d}{2}-2} \right\},$$

$$B = -q^2(x(1-x) + y(x-y)).$$

Заметим далее, что, согласно (4.5.3),

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k+q)^2 (k+Q)^2} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 \times$$

$$\times \frac{dx}{(x^2 q^2 - xq^2)^{2-\frac{d}{2}}}.$$

Поэтому, отбрасывая регулярное при  $d \rightarrow 4$  слагаемое, пропорциональное  $\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right)$ , имеем

$$g\Gamma_{1\nu}^{abc}(p, q) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (\mu^{2-\frac{d}{2}} g)^3 \frac{\xi n}{2} f^{abc} q_\nu (-q^2)^{\frac{d}{2}-2} \times \\ \times \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \left\{ (x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^x dy (x(1-x) + y(x-y))^{\frac{d}{2}-2} \right\}.$$

При  $d \rightarrow 4$  получим отсюда

$$\Gamma_{1\nu}^{abc}(p, q) = f^{abc} \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} q_\nu \left( \frac{3}{4} \eta - \frac{3}{4} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right) \quad (4.5.19)$$

(в скобках не учитываются постоянные, не зависящие от  $q$  члены).

Аналогично может быть найдена и величина  $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_{2\nu}^{abc}(p, q) = f^{abc} \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} q_\nu \left( \frac{1}{4} \eta - \frac{1}{4} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (4.5.20)$$

Таким образом, вершинная функция  $\Gamma_\nu^{abc}$  при  $p^2 = q^2 = Q^2$  имеет вид

$$\Gamma_\nu^{abc}(p, q) = f^{abc} q_\nu \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} \left( \eta - \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right) \right\} \quad (4.5.21)$$

или

$$\Gamma_\nu^{abc}(p, q) = \tilde{z}_1^{-1} \Gamma_\nu^{abc}(p, q), \quad (4.5.22)$$

где

$$\tilde{z}_1^{-1} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} \eta,$$

$$\Gamma_\nu^{abc}(p, q) = f^{abc} q_\nu \left( 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\xi n}{2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right) \quad (4.5.23)$$

мы учли, что  $\Gamma_\nu^{abc}(p, q)|_{p^2=q^2=Q^2=-\mu^2} = f^{abc} q_\nu$ .

Из формулы (4.5.21) видно, что при использовании предельного импульса величина  $\eta$  должна быть заменена на  $\ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}$  с тем, чтобы величина  $\mu$  не входила в величину  $\Gamma$ .

Мы приведем в заключение этого параграфа константы перенормировки  $\tilde{z}_1, \tilde{z}_3, \tilde{z}_3$  во втором порядке теории возмущений (см. формулы (4.5.7), (4.5.16), (4.5.23)), выраженные не через

$\eta$ , а через предельный импульс  $\mathcal{M}$ :

$$\tilde{z}_1^{-1} = 1 + \frac{ng^2}{16\pi^2} \xi \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}, \quad \tilde{z}_3 = 1 + \frac{ng^2}{16\pi^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{\xi}{2} \right) \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}, \\ z_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( n \left( \frac{13}{3} - \xi \right) - \frac{4}{3} n_f \right) \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}. \quad (4.5.24)$$

Остальные константы перенормировки  $z_1, z$  могут быть найдены из тождества Уорда (4.4.12):

$$z_1 = z_3 \frac{\tilde{z}_1}{z_3}, \quad z = z_3 \left( \frac{\tilde{z}_1}{z_3} \right)^2.$$

## § 4.6. Асимптотика функций Грина калибровочных полей в области больших импульсов

**4.6.1. Уравнения ренормализационной группы.** Как мы видели, свойство перенормируемости квантовой электродинамики позволяет установить асимптотическое поведение в области больших импульсов различных функций Грина. Теперь покажем, что аналогичная ситуация имеет место и в теории неабелевых калибровочных полей. Будем предполагать в начале, что кварковых полей нет.

Напомним свойство перенормируемости теории неабелевых калибровочных полей. Будем использовать общее обозначение  $\Gamma(p; g, \xi, \mathcal{M})$  для перенормированных обратных функций распространения глюонов  $(G^{-1})_{\mu\nu}$  и «духов»  $G^{-1}$ , а также вершинных функций, соответствующих любому числу внешних линий. Последние будем считать ампутированными или одночастично неприводимыми (это значит, что в соответствующей многочастичной функции Грина отброшены одночастичные функции Грина, которые сопоставляются внешним линиям). Функции  $\Gamma$  зависят от совокупности 4-импульса внешних линий  $p \equiv \{p_1, \dots, p_n\}$ , перенормированных константы связи  $g$  и калибровочной постоянной  $\xi$ , а также импульса обрезания  $\mathcal{M}$ . Согласно свойству перенормируемости, структура бесконечностей (логарифмических, т. е.  $\sim \ln \mathcal{M}$ ) в перенормированных функциях  $\Gamma$  такова, что они могут быть выделены в виде отдельного множителя  $z$ , не зависящего от импульсов  $p$ :

$$\Gamma(p; g, \xi, \mathcal{M}) = z(g, \xi, \mathcal{M}, \mu) \Gamma(p; \underline{g}, \underline{\xi}, \mu), \quad (4.6.1)$$

где функции  $\Gamma$  уже не содержат бесконечностей и называются перенормированными функциями. Здесь  $\underline{g}$  и  $\underline{\xi}$  — перенормированные константа связи и калибровочная постоянная, соответствующие точке нормировки  $p^2 = -\mu^2 < 0$ . Точку вычитания или нормировки мы выбираем пространственно подобной, так

как в этом случае функции Грина не будут содержать адсорбционных частей, соответствующих мнимым частям массовых операторов, следовательно, согласно (4.6.1), константы перенормировки  $z$  в этом случае будут вещественными. Подчеркнем, что в формуле (4.6.1) перенормированная величина  $\Gamma$  зависит от импульса обрезания  $\mathcal{M}$ , но не зависит от  $\mu$ , тогда как перенормированная величина  $\underline{\Gamma}$  зависит от  $\mu$ , но не зависит от  $\mathcal{M}$ .

Множители  $z$ , разные для различных функций  $\Gamma$ , могут быть выражены через пять универсальных констант перенормировки:  $z_1, \tilde{z}_1, z_3, \tilde{z}_3, z$ , введенных в разделе 4.4.2. При этом пять функций распространения и вершинным функциям (неприводимые диаграммы которых содержат расходимость), введенным в разделе 4.4.2, в связи с теорией перенормировок будут соответствовать следующие функции  $\Gamma$ :

$$(G^{-1})_{\mu\nu}^{ab} = \Gamma_1, \quad (G^{-1})^{ab} = \Gamma_2, \quad g\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc} = \Gamma_3, \\ g^2\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} = \Gamma_4, \quad g\Gamma_{\mu}^{abc} = \Gamma_5. \quad (4.6.2)$$

Функциям  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) и общим вершинным функциям, согласно (4.6.1), (4.4.14), соответствуют множители  $z$ :

$$z = (\tilde{z}_3)^{-\frac{n_c}{2}} (z_3)^{-\frac{n_A}{2}} \equiv z_{n_A n_c}, \quad (4.6.3)$$

где  $n_c$  и  $n_A$  — числа внешних «духовых» и глюонных линий в функциях  $\Gamma$ . При этом мы учли, что перенормированные константа связи  $g$  и калибровочная постоянная  $\xi$  связаны с перенормированными константой связи  $\underline{g} \equiv g_\mu$  и калибровочной постоянной  $\underline{\xi} \equiv \xi_\mu$  соотношениями

$$g_\mu = z_3^{3/2} z_1^{-1} g, \quad \xi_\mu = z_3^{-1} \xi, \quad (4.6.4)$$

а константы перенормировки  $z$  удовлетворяют тождествам Уорда

$$\tilde{z}_1 \tilde{z}_3 = \tilde{z}_1 z_3, \quad z z_3 = z_1^2.$$

Напомним, что константы перенормировки  $\tilde{z}_1, z_3, \tilde{z}_3$  определяются из условия равенства перенормированных функций  $\underline{G}_{\mu\nu}^{ab}, \underline{G}^{ab}, \underline{\Gamma}_\lambda^{abc}$  в симметричной точке  $p_1 = p_2 = p$  (или  $p_1 = p$ ) при  $\bar{p}^2 = -\mu^2$  соответствующим свободным функциям (константы  $z_1, z$  определяются из тождеств Уорда (4.4.12)).

Так как функции  $\Gamma \equiv \Gamma_{n_A n_c}$  не зависят от выбора произвольной точки вычитания  $\mu$ , то

$$\frac{1}{z_{n_A n_c}} \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_{n_A n_c}(p; g, \xi, \mathcal{M}) = 0,$$

откуда, используя (4.6.1), имеем\*

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\underline{g}, \underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} + \delta(\underline{g}, \underline{\xi}) \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} - \right. \\ \left. - \gamma_{n_A n_c}(\underline{g}, \underline{\xi}) \right\} \underline{\Gamma}_{n_A n_c}(p; \underline{g}, \underline{\xi}; \mu) = 0, \quad (4.6.5)$$

$$\text{где } \beta(\underline{g}, \underline{\xi}) = \mu \frac{\partial \underline{g}}{\partial \mu}, \quad \delta(\underline{g}, \underline{\xi}) = \mu \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \mu}, \quad \gamma_{n_A n_c}(\underline{g}, \underline{\xi}) = \\ = -\mu \frac{\partial \ln z_{n_A n_c}}{\partial \mu} \quad (4.6.6)$$

(производные в определении функций  $\beta, \delta, \gamma_{n_A n_c}$  вычисляются при постоянных  $g, \xi, \mathcal{M}$ ).

Подчеркнем, что функции  $\beta, \delta, \gamma$  являются безразмерными и не зависят от импульсов  $p$ . Поэтому они могли бы зависеть от отношения  $\frac{\mu}{\mathcal{M}}$ . Однако, так как функции  $\underline{\Gamma}$  конечны при  $\mathcal{M} \rightarrow \infty$ , то в пределе  $\mathcal{M} \rightarrow \infty$  величины  $\beta, \delta, \gamma$  не зависят от  $\mu$  и являются функциями только  $\underline{g}$  и  $\underline{\xi}$ . Подчеркнем также, что функции  $\beta$  и  $\delta$  являются универсальными, т. е. не зависят от рассматриваемой вершинной функции  $\Gamma_{n_A n_c}$ , величина же  $\gamma_{n_A n_c}$  зависит от числа внешних линий вершины  $\Gamma_{n_A n_c}$ . Согласно (4.6.3), имеем

$$\delta_{n_A n_c} = n_A \gamma_A + n_c \gamma_c, \quad \delta = -2\underline{\xi} \gamma_A, \quad (4.6.7)$$

где

$$\gamma_A = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln z_3}{\partial \mu}, \quad \gamma_c = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln \tilde{z}_3}{\partial \mu} \quad (4.6.8)$$

и функции  $\gamma_A, \gamma_c$ , как и  $\beta, \delta$ , уже не зависят от рассматриваемой вершинной функции.

Наконец отметим, что в калибровке Ландау ( $\xi = 0$ )  $\underline{\xi} = 0$ , поэтому  $\delta = 0$ .

Уравнение (4.6.5) называется уравнением ренормализационной группы (уравнением Калана — Симанчика). Это уравнение аналогично уравнению ренормализационной группы (3.3.89), которое мы рассматривали в квантовой электродинамике. Так как здесь мы рассматриваем безмассовую масштабно-инвариантную теорию, то роль массы электрона играет нормировочная постоянная  $\mu$ . Эта постоянная не содержится в исходном масштабно-инвариантном лагранжиане и появляется

\* Метод ренормализационной группы в теории неабелевых калибровочных полей впервые был применен Гроссом и Вильчеком [23], а также Политцером [24]. Уравнения ренормализационной группы в форме (4.6.5) рассматривались в работах [25, 26].

в регуляризованных величинах вместо импульса обрезания  $\Lambda$ , входящего в неперенормированные величины.

4.6.2. Структура функций Грина калибровочных полей в области больших импульсов. Уравнение ренормализационной группы (4.6.5) может быть использовано для исследования поведения функций Грина и вершинных функций в области больших импульсов. С этой целью сделаем масштабное преобразование  $p_i \rightarrow \lambda p_i$  и будем рассматривать функцию  $\underline{\Gamma}(\lambda p; \underline{g}, \mu)$  вместо функции  $\Gamma(p; \underline{g}, \mu)$  (в дальнейшем мы будем использовать калибровку Ландау,  $\xi = 0$ ). Если размерность функции  $\Gamma$  равна  $\mu^\kappa$ ,  $|\Gamma| = \mu^\kappa$ , то

$$\underline{\Gamma}(\lambda p; \underline{g}, \mu) = \mu^\kappa \tilde{\Gamma}\left(\frac{\lambda}{\mu} p; \underline{g}\right),$$

где  $\tilde{\Gamma}$  — безразмерная функция, зависящая только от аргументов  $\frac{\lambda}{\mu} p$  и  $\underline{g}$ . Из этой формулы видим, что

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \underline{\Gamma}(\lambda p; \underline{g}, \mu) = \left(-\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \kappa\right) \underline{\Gamma}(\lambda p; \underline{g}, \mu),$$

следовательно, уравнение (4.6.5) приобретает вид

$$\left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} - \kappa + \gamma_{n_A n_c}(\underline{g}) \right\} \times \\ \times \underline{\Gamma}_{n_A n_c}(\lambda p; \underline{g}, \mu) = 0 \quad (4.6.9)$$

(мы заменили  $\underline{g}$  на  $g$  и учли, что  $\xi = 0$ ). Введем функцию  $\bar{g}(\lambda, g)$ , зависящую от  $g$  и  $\lambda$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \bar{g} = \beta(\bar{g}) \quad (4.6.10)$$

и начальному условию

$$\bar{g}(1, g) = g. \quad (4.6.11)$$

Эта функция называется эффективной константой связи. Вводя вместо  $\lambda$  новую переменную  $t = \ln \lambda$ , перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, g) = \beta(\bar{g}(t, g)). \quad (4.6.12)$$

Это уравнение с учетом начального условия эквивалентно уравнению

$$t = \int_g^{\bar{g}(t, g)} \frac{dx}{\beta(x)} \quad (4.6.12')$$

и неявным образом определяет  $\bar{g}(t, g)$  как функцию  $t, g$ . Оно называется уравнением Гелл-Мана и Лоу. Дифференцируя это уравнение по  $g$  и используя (4.6.10), получаем

$$\left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} \right) \bar{g}(\lambda, g) = 0 \quad (4.6.13)$$

(мы снова вернулись к переменной  $\lambda$ ).

Эффективная константа связи  $\bar{g}(\lambda, g)$  имеет простой физический смысл: она представляет собой перенормированную константу связи в том случае, когда вычитание производится не в точке  $p^2 = -\mu^2$ , а в точке  $p^2 = -\mu^2 \lambda^2$ :

$$\bar{g}(\lambda, g_\mu) = g_{\lambda\mu}, \quad g_\mu \equiv \underline{g}. \quad (4.6.14)$$

Действительно, используя уравнение (4.6.13) и определение (4.6.6) функции  $\beta$ , легко видеть, что величина  $\bar{g}\left(\frac{s}{\mu}, g_\mu\right)$  не зависит от  $\mu$  (является ренорм-инвариантом):

$$\frac{d}{d\mu} \bar{g}\left(\frac{s}{\mu}, g_\mu\right) = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial \bar{g}(\lambda, g_\mu)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{g}(\lambda, g_\mu)}{\partial g_\mu} \frac{\partial g_\mu}{\partial \mu} = \\ = -\frac{1}{\mu} \left( \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \beta(g_\mu) \frac{\partial}{\partial g_\mu} \right) \bar{g}(\lambda, g_\mu) = 0, \quad \lambda = \frac{s}{\mu}.$$

Поэтому, используя (4.6.11), имеем

$$\bar{g}\left(\frac{s}{\mu}, g_\mu\right) = \bar{g}(1, g_s) = g_s.$$

Заменяя далее  $s$  на  $\mu\lambda$ , мы и приходим к соотношению (4.6.14).

Величина  $\kappa$  (каноническая размерность) определяется формулой

$$\kappa = 4 - n_A - n_c \equiv \kappa_{n_A n_c}. \quad (4.6.15)$$

Это вытекает из того, что размерность операторов  $A_\mu^a, c^a, \bar{c}^a$  равна  $\mu$  (см. (4.2.28)), и следовательно, размерность функций Грина в координатном представлении будет  $\mu^{n_A + n_c}$ ; в импульсном представлении размерность функции Грина (без учета размерности  $\delta(\Sigma p)$ , выражающей закон сохранения 4-импульса диаграммы в целом) будет  $\mu^{4 - 3(n_A + n_c)}$ , и следовательно, размерность  $n_A + n_c$  точечной вершины будет  $\mu^{4 - n_A - n_c}$ .

Учитывая определение (4.6.10) функции  $\bar{g}$  и формулу (4.6.13), решение уравнения (4.6.9) можно представить в виде

$$\underline{\Gamma}_{n_A n_c}(\lambda p; \underline{g}, \mu) = \underline{\Gamma}_{n_A n_c}(p; \bar{g}(\lambda, g), \mu) \times \\ \times \exp \int_0^{\ln \lambda} (\kappa_{n_A n_c} - \gamma_{n_A n_c}(\bar{g}(\lambda, g))) d \ln \lambda$$

или

$$\Gamma_{n_A n_c}(\lambda p; q, \mu) = \lambda^{n_A n_c} e^{-\int_0^{\lambda} dx \gamma_{n_A n_c}(\bar{g}(x, g))} \Gamma_{n_A n_c}(p; \bar{g}(t, g), \mu).$$

Переходя в этой формуле с помощью уравнения (4.6.10) от интегрирования по  $x = \ln \lambda$  к интегрированию по  $\bar{g}$ , получаем

$$\Gamma_{n_A n_c}(\lambda p; g, \mu) = \Gamma_{n_A n_c}(p; \bar{g}(\lambda, g), \mu) \lambda^{n_A n_c} \times \\ \times \exp \int_{\bar{g}(\lambda, g)}^g dg \frac{\gamma_{n_A n_c}(g)}{\beta(g)}, \quad (4.6.16)$$

где функции  $\beta$ ,  $\gamma_{n_A n_c}$  определяются формулами (4.6.6), (4.6.7).

Эта формула связывает перенормированную функцию  $\Gamma$  с импульсами  $\lambda p$  и константой связи  $g$  с перенормированной функцией  $\Gamma$  с импульсами  $p$  и константой связи  $\bar{g}(\lambda, g)$ . Поэтому, зная вершинные функции при конечных импульсах, эту формулу можно использовать для нахождения асимптотики вершинных функций в области больших импульсов, если считать, что  $\lambda \rightarrow \infty$ . При этом надо знать асимптотику  $\bar{g}(\lambda, g)$  в области больших  $\lambda$ .

Если уравнение (4.6.10) допускает решение, для которого существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{g}(\lambda, g) \equiv g_\infty, \quad (4.6.17)$$

то этот предел называют ультрафиолетово-стабильной фиксированной точкой. Из уравнения (4.6.12') следует, что  $g_\infty$  представляет собой нуль функции  $\beta(g)$ ,  $\beta(g_\infty) = 0$ . Кроме того, чтобы предел существовал, необходимо выполнение условия  $\frac{\partial \beta(g)}{\partial g} \Big|_{g=g_\infty} < 0$  (так как в этом случае, согласно (4.6.10),  $\beta(g) = \bar{g} \partial \ln \lambda > 0$  при  $\bar{g} < g_\infty$  и  $\beta(\bar{g}) = \bar{g} \partial \ln \lambda < 0$  при  $\bar{g} > g_\infty$ , следовательно, функция  $\bar{g}(\lambda, g)$  растет с увеличением  $\lambda$  при  $\bar{g} < g_\infty$  и убывает с ростом  $\lambda$  при  $\bar{g} > g_\infty$ ).

Аналогичным образом легко убедиться, что если  $\beta(g_0) = 0$  и  $\frac{\partial \beta(g)}{\partial g} \Big|_{g=g_0} > 0$ , то существует предел  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} g(\lambda, g) = g_0$ , который называется инфракрасно-стабильной фиксированной точкой.

Если  $g_\infty = 0$ , то теория называется асимптотически свободной.

**4.6.3. Асимптотика вершинных функций и функций Грина в теории возмущений.** Перейдем к нахождению вершинных

функций и функций Грина в области больших импульсов, предполагая справедливой теорию возмущений, т. е. считая  $g^2 \ll 1$ .

Весь анализ, проведенный в предыдущем разделе, справедлив, очевидно, и при учете кварков, если масса  $m$  последних равна нулю. Если масса кварков  $m$  отлична от нуля, то в аргументах вершинных функций, как и в квантовой электродинамике, появляется дополнительный безразмерный параметр  $m/p$ . В рамках теории возмущений можно показать, что в области больших пространственноподобных 4-импульсов  $p \equiv (p_1, \dots, p_n)$  этим параметром можно пренебречь. По этой причине для больших ( $|p| \gg m$ ) пространственно-подобных векторов  $p$  можно пренебречь в функциях  $\Gamma$  массой кварков и пользоваться формулами предыдущего раздела. При этом модифицируются величины  $\kappa_{n_A n_c}$  (см. (4.6.15)) и  $\gamma_{n_A n_c}$  (см. (4.6.7)). Именно величины  $\kappa_{n_A n_c}$ ,  $\gamma_{n_A n_c}$  заменяются величинами  $\kappa_{n_A n_c n_q}$ ,  $\gamma_{n_A n_c n_q}$  ( $n_q$  — число внешних кварковых линий в функции  $\Gamma \equiv \Gamma_{n_A n_c n_q}$ ), зависящими от числа внешних глюонных  $n_A$ , «духовых»  $n_c$  и кварковых  $n_q$  линий:

$$\kappa_{n_A n_c n_q} = 4 - n_A - n_c - \frac{3}{2} n_q, \quad (4.6.18)$$

$$\gamma_{n_A n_c n_q} = n_A \gamma_A + n_c \gamma_c + n_q \gamma_q, \quad \gamma_q = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln z_q}{\partial \mu}$$

( $z_q$  — константа перенормировки кварковой функции Грина).

При  $g^2 \ll 1$  перенормировочные константы в приближении  $g^2$  определяются формулами (4.5.24)

$$z_3 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( n \left( \frac{13}{3} - \xi \right) - \frac{4}{3} n_f \right) \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu},$$

$$\tilde{z}_3 = 1 + \frac{ng^2}{16\pi^2} \left( \frac{3}{2} - \frac{\xi}{2} \right) \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}, \quad (4.6.19)$$

$$\tilde{z}_1^{-1} = 1 + \frac{ng^2}{16\pi^2} \xi \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu},$$

$$z_q = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \xi \frac{n^2 - 1}{n} \ln \frac{\mathcal{M}}{\mu}$$

(выражение для  $z_q$  можно получить из выражения для  $z_2$  (см. (3.3.86)), если учесть формулу (4.1.20)). Поэтому, согласно (4.6.6), функция  $\beta(g)$  определяется формулой

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left( \frac{11}{3} n - \frac{2}{3} n_f \right) \equiv -b \frac{g^3}{16\pi^2}, \quad (4.6.20)$$



а функции  $\gamma_A$ ,  $\gamma_c$ ,  $\gamma_q$  — формулами

$$\begin{aligned} \gamma_A &= -\frac{g^2}{32\pi^2} \left\{ n \left( \frac{13}{3} - \xi \right) - \frac{4}{3} n_f \right\}, \quad \gamma_c = \\ &= -\frac{g^2}{32\pi^2} n \left( \frac{3}{2} - \frac{\xi}{2} \right), \quad \gamma_q = \frac{g^2}{32\pi^2} \xi \frac{n^2 - 1}{n}. \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

Обратим внимание на то, что в величину  $b$  через константу перенормировки, согласно § 4.5, отрицательный вклад вносит последняя диаграмма на рис. 25, а положительный — все остальные диаграммы.

Подставляя (4.6.20) в (4.6.10), находим

$$\bar{g}^2(\lambda, g) = \frac{g^2}{1 + \frac{g^2}{16\pi^2} b \ln \lambda}, \quad b = \frac{11}{3} n - \frac{2}{3} n_f \quad (4.6.22)$$

Аналогичную формулу для  $\bar{g}$  получали и в квантовой электродинамике (мы называли ее там инвариантным зарядом). Различие, однако, заключается в том, что в случае квантовой электродинамики константа  $b$  была отрицательной, тогда как для неабелевых калибровочных полей с самодействием  $b > 0$ , если число кварков не очень велико,  $n_f < \frac{11}{2} n$ . Благодаря

этому величина  $\bar{g}$  уменьшается с ростом  $\lambda$  и в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$  величина  $\bar{g}$  стремится к нулю. \* Отсюда вытекает, что использование теории возмущений в уравнении (4.6.16) будет тем более оправдано, чем больше будет величина  $\lambda$ .

Отсюда и из (4.6.21) следует, что если  $g^2 \ll 1$ , то для нахождения выражения в экспоненте формулы (4.6.16) мы также можем воспользоваться методом теории возмущений. Именно из (4.6.21) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_g^{\bar{g}} dg \frac{\gamma_{n_A n_c n_q}(g)}{\beta(g)} &= \frac{a}{2b} \ln \frac{\bar{g}^2}{g^2}, \quad a = \\ &= n_A \left( \frac{13}{6} n - \frac{2}{3} n_f \right) + n_c \frac{3}{4} n. \end{aligned}$$

Поэтому, согласно (4.6.16),

$$\begin{aligned} \Gamma_{n_A n_c n_q}(\lambda p, g, \mu) &= \Gamma_{n_A n_c n_q}(p, \bar{g}(\lambda, g); \mu) \lambda^x \times \\ &\times \left( 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} b \ln \lambda^2 \right)^{\frac{a}{2b}}. \end{aligned} \quad (4.6.23)$$

\* Наличие свойства асимптотической свободы для неабелевых калибровочных теорий вытекало из работы Хрипловича [18]. Это свойство затем было открыто Гроссом, Вильчеком [23] и Политцером [24], указавшими на его важность для объяснения характера сильных взаимодействий.

Мы видим, что зависимость от  $\lambda$  в этой формуле содержится не только в величине  $\Gamma(p, \bar{g}, \mu)$  (которую можно найти в рамках обычной теории возмущений, так как  $\bar{g}^2 \ll 1$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ), но и в множителе  $\lambda^x (\ln \lambda^2)^{a/2b}$ . Величина  $x$  определяет размерность функции  $\Gamma$  и называется канонической размерностью, а величина  $\gamma$  — аномальной размерностью.

Из этой формулы следует, что функция распространения глюонов в области  $k^2 \rightarrow \infty$  определяется формулой

$$\begin{aligned} G_i^{ab}(\lambda k) &\approx -\frac{1}{\lambda^2 k^2} \left( 1 + \frac{g^2 b}{16\pi^2} \ln \lambda^2 \right)^{-\frac{a}{2b}} \delta_{ab}, \quad a = \\ &= \frac{13}{3} n - \frac{4}{3} n_f. \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

## ТЕОРИЯ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### § 5.1. Квантовые числа кварков и мезонные и барионные супермультиплеты

**5.1.1. Нуклонные и кварковые поля.** В разделе 4.1.1 мы рассматривали дираковские поля  $\psi_i(x)$  с внутренними симметриями, где индекс  $i$  связан с наличием внутренней симметрии. В этом разделе мы рассмотрим конкретные поля с внутренними симметриями — нуклонное и кварковые поля. Начнем с нуклонного поля.

Нейтрон и протон, рассматриваемые как структурные элементы ядер, обладают сходными свойствами. Если поэтому не учитывать небольшое различие в массе (обусловленное электромагнитным взаимодействием), то их можно рассматривать как два состояния единой частицы — нуклона. При этом мы можем объединить два дираковских поля — протонное ( $\psi_p \equiv \psi_1$ ) и нейтронное ( $\psi_n \equiv \psi_2$ ) в единое нуклонное поле, описываемое двухкратным биспинором  $\psi$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

и удовлетворяющее уравнению Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.1.1)$$

где  $M$  — масса нуклона. Этим уравнениям соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L}_N = \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi_i - \frac{1}{2} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + M) \psi_i, \quad (5.1.2)$$

который инвариантен относительно фазовых преобразований

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = e^{i\alpha} \psi_i, \quad \bar{\psi}_i \rightarrow \bar{\psi}'_i = e^{-i\alpha} \bar{\psi}_i.$$

С инвариантностью по отношению к фазовым преобразованиям связан закон сохранения барионного заряда, который аналогичен электрическому заряду в случае электронно-позитронного поля. Кроме того, лагранжиан (5.1.2) инвариантен относительно преобразований, оставляющих инвариантной

квадратичную форму двух комплексных переменных

$$\bar{\psi}_i \psi_i \equiv \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2.$$

Эти преобразования связаны с внутренней симметрией нуклонного поля, которая называется изотопической.\*

Вторым примером обобщенного дираковского поля, обладающего внутренней симметрией, является кварковое поле. Кварками называются структурные элементы сильно взаимодействующих частиц — адронов, в структуре которых они играют такую же роль, как протоны и нейтроны в структуре ядра. Если отвлечься от существования так называемых очарованных и других более сложных адронов, то следует считать, что имеется три сорта или аромата кварков — протонный ( $u$ ), нейтронный ( $d$ ) и странный ( $s$ ) кварки и столько же сортов антикварков, причем каждый из кварков  $u$ ,  $d$ ,  $s$  может находиться в трех состояниях, которые называются цветовыми состояниями. Кварки обладают спином  $1/2$ , поэтому в простейшем случае (кварки  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ) кварковое поле должно описываться  $3 \times 3$ -кратным биспинором  $q_{\alpha i}(x)$ , где  $\alpha$  служит для обозначения сорта, а  $i$  — цвета кварка. Если учитывать очарованный кварк  $c$ , а также кварки  $b$ ,  $t$ , то нужно различать шесть сортов (ароматов) кварков  $u$ ,  $d$ ,  $s$  — кварки и  $c$ ,  $b$ ,  $t$  кварки, причем каждый из этих кварков по-прежнему может находиться в одном из трех цветовых состояний. В этом случае кварковое поле описывается  $6 \times 3$ -кратным биспинором  $q_{\alpha i}(x)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ;  $i = 1, 2, 3$ ), удовлетворяющим уравнению Дирака типа (5.1.1) с массой  $m_\alpha$ , зависящей от сорта кварка и не зависящей от цвета кварка (в действительности различие в массах  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков невелико, масса же кварков  $c$ ,  $b$ ,  $t$  значительно отличается от масс первых трех кварков). Кварковому полю соответствует лагранжиан

$$\mathcal{L}_q = \frac{1}{2} \sum_{\alpha i} \{ \bar{q}_{\alpha i} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_\alpha) q_{\alpha i} - \bar{q}_{\alpha i} (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m_\alpha) q_{\alpha i} \}. \quad (5.1.3)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований, оставляющих неизменной квадратичную форму трех комплексных величин  $\sum_i \bar{q}_{\alpha i} q_{\alpha i}$  (в ней остается фиксированным сорт кварков). Эта инвариантность называется цветовой симметрией. Если отвлечься от различия в массе  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков, то лагранжиан  $\mathcal{L}_q$  будет инвариантен также относительно преобразований, оставляющих неизменной квадратичную форму

\* Понятие изотопической инвариантности было введено В. Гейзенбергом [1].

трех комплексных величин  $\sum_{A=(u,d,s)} \bar{q}_{Ai} q_{Ai}$  (в ней остается фиксированным цвет кварков).\*

В случае нуклонного поля лагранжиан (5.1.2) инвариантен по отношению к группе преобразований  $SU(2)$ . Генераторы этой группы, представляющие собой эрмитовы матрицы второго порядка со шпуром, равным нулю, могут быть выбраны в виде

$$T_a = \frac{1}{2} \tau_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (5.1.4)$$

где  $\tau_a$  — матрицы Паули (см. (2.4.2)), действующие на индекс  $i$  функции  $\psi_i$  ( $i = 1, 2$ ; этот индекс называется изотопическим). Структурные постоянные этой группы, согласно (5.1.4), (1.1.27), равны  $f_{ab}^c = \epsilon_{abc}$  ( $\epsilon_{abc}$  — полностью антисимметричный единичный тензор).

В случае кваркового поля лагранжиан строго инвариантен по отношению к цветовой группе преобразований  $SU(3)_c$ . Генераторы этой группы, представляющие собой эрмитовы матрицы третьего порядка со шпуром, равным нулю, могут быть выбраны в виде

$$T_a = \frac{1}{2} \lambda_a, \quad a = 1, 2, \dots, 8, \quad (5.1.5)$$

где  $\lambda_a$  — восемь эрмитовых матриц со шпуром, равным нулю,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

\* Гипотеза кварков принадлежит Гелл-Манну и Цвейгу [2, 3]. Цвет кварков был введен в работах Гринберга, Боголюбова, Струминского, Гавхелидзе, а также Хана и Намбу [—6].

Эти матрицы аналогичны матрицам  $\tau_a$  в группе  $SU(2)$  и называются матрицами Гелл-Манна.

Нетрудно убедиться, что

$$\text{sp } \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab}. \quad (5.1.7)$$

Структурные постоянные группы  $SU(3)$ , определяемые с помощью формул

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c$$

или формул

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{ab}^c \lambda_c,$$

имеют, согласно (5.1.7), следующий вид:

$$f_{ab}^c = -\frac{i}{4} \text{sp } \lambda_c [\lambda_a, \lambda_b]. \quad (5.1.8)$$

При сделанном выборе матриц  $\lambda_a$  отличны от нуля следующие компоненты  $f_{ab}^c$ :

$$\begin{aligned} f_{12}^3 = 1, \quad f_{14}^7 = -f_{15}^6 = f_{24}^6 = f_{25}^7 = f_{34}^5 = -f_{36}^7 = \frac{1}{2}, \quad f_{45}^8 = \\ = f_{67}^8 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \quad (5.1.8')$$

(в нормировке (5.1.7) нет различия между ковариантными и контрвариантными индексами; см. раздел 4.1.1).

Антикоммутатор матриц  $\lambda_a$ , как и коммутатор, линеен по  $\lambda_b$

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3} \delta_{ab} + 2d_{abc} \lambda_c \quad (5.1.9)$$

(коэффициент при  $\delta_{ab}$  определяется из того, что  $\text{Sp } \{\lambda_a, \lambda_b\} = 4\delta_{ab}$  и  $\text{sp } \lambda_c = 0$ ). Коэффициенты  $d_{abc}$  определяются, очевидно, формулой

$$d_{abc} = \frac{1}{4} \text{sp } \lambda_c \{\lambda_a, \lambda_b\} \quad (5.1.10)$$

и поэтому симметричны по индексам  $a, b, c$ . Отличны от нуля следующие значения  $d_{abc}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d_{118} = \frac{1}{2} d_{228} = \frac{1}{2} d_{388} = -d_{448} = -d_{558} = -d_{668} = \\ = -d_{778} = -\frac{1}{2} d_{888} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad d_{146} = d_{157} = -d_{247} = \\ = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{356} = -d_{377} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.1.10')$$

**5.1.2. Квантовые числа кварков.** В лагранжиане (5.1.3) масса кварка  $m_A \equiv m_a$  не зависит от цвета кварка, но в прин-

ципе может зависеть от аромата кварка (в простейшей схеме предполагается, что масса  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) не зависит и от их аромата, масса же  $c$ -кварка ( $\alpha = 4$ ), а также кварков  $b, t$  ( $\alpha = 5, 6$ ), значительно больше массы  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков).

Из лагранжиана (5.1.3) вытекают одновременные перестановочные соотношения для полей  $q_A, \bar{q}^A$  ( $A = \alpha, i$ )

$$\{q_A(x), q_{A'}(x')\}_{t=t'} = \{\bar{q}^A(x), \bar{q}^{A'}(x')\}_{t=t'} = 0, \\ \{q_A(x), \bar{q}^{A'}(x')\}_{t=t'} = \delta_A^{A'} \gamma^0 \delta(x-x'), \quad (5.1.11)$$

аналогичные соотношения (2.4.41). Операторы  $q_A, \bar{q}^A$  могут быть разложены на плоские волны

$$q_A(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}\mu} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \{u^\mu(\vec{p}) e^{-ipx} a_{\vec{p}\mu A} + \\ + u^\mu(\vec{p})^c e^{ipx} b_{\vec{p}\mu A}^+\}, \quad (5.1.12)$$

где  $a_{\vec{p}\mu A}, b_{\vec{p}\mu A}^+$  — операторы уничтожения кварка и антикварка с квантовыми числами  $\mu$  (спиральность),  $p$  (импульс),  $A = (\alpha, i)$  (аромат и цвет). Операторы рождения кварка и антикварка мы будем обозначать через  $a_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger}$  и  $b_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger}$ ,  $a_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger} = (a_{\vec{p}\mu A})^+$ ,  $b_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger} = (b_{\vec{p}\mu A}^+)^+$ . Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{a_{\vec{p}\mu A}, a_{\vec{p}'\mu' A'}^{+\dagger}\} = \{b_{\vec{p}\mu A}, b_{\vec{p}'\mu' A'}^{+\dagger}\} = \delta_A^{A'} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\vec{p}\vec{p}'}, \quad (5.1.13)$$

аналогичным перестановочным соотношениям (2.4.62) (антикоммутаторы для остальных пар операторов  $a, a^+, b, b^+$  равны нулю).

Мы использовали здесь обозначения  $a, b, a^+, b^+$  для операторов уничтожения и рождения кварков с целью подчеркнуть аналогию между кварковым и электронно-позитронным полями. Но для разных сортов кварков используются обычно другие обозначения:

$$a_{\vec{p}\mu 1} \equiv u_{\vec{p}\mu}, \quad a_{\vec{p}\mu 2} \equiv d_{\vec{p}\mu}, \quad a_{\vec{p}\mu 3} \equiv s_{\vec{p}\mu}, \\ (5.1.14)$$

$$a_{\vec{p}\mu 4} \equiv c_{\vec{p}\mu}, \quad a_{\vec{p}\mu 5} \equiv b_{\vec{p}\mu}, \quad a_{\vec{p}\mu 6} \equiv t_{\vec{p}\mu}$$

(операторы уничтожения  $b_{\vec{p}\mu}^A$  ( $A = 1, \dots, 6$ ) антикварков обозначаются соответственно через  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}, \bar{t}$ ; индекс цвета мы не выписываем).

Лагранжиан (5.1.3) инвариантен, очевидно, относительно бесконечно малых фазовых преобразований

$$\delta q = -i\alpha q, \quad \delta \bar{q} = i\alpha \bar{q}, \quad \alpha = \alpha^*. \quad (5.1.15)$$

С этой инвариантностью связан закон сохранения барionного заряда. Чтобы сформулировать этот закон, заметим, что, согласно § 1.4, генератор этих преобразований имеет вид

$$G = \frac{1}{2} \int d^3x (i\bar{q}^A \gamma^0 \delta q_A + i q_A \gamma^0 \delta \bar{q}^A). \quad (5.1.16)$$

Подставляя сюда вариации (5.1.15), получаем

$$G = 3\alpha B,$$

где

$$B = \int d^3x \mathcal{J}^0(x), \quad \mathcal{J}^\mu = \frac{1}{3} \bar{q}^A \gamma^\mu q_A. \quad (5.1.17)$$

Сохраняющаяся величина  $\mathcal{J}^\mu$  называется барionным током кварков, а величина  $B$  — барionным зарядом кваркового поля. Так как (см. § 1.4)

$$i[G, q_A(x)] = \delta q_A(x), \quad i[G, \bar{q}^A(x)] = \delta \bar{q}^A(x),$$

то справедливы перестановочные соотношения

$$[B, q_A] = -\frac{1}{3} q_A, \quad [B, \bar{q}^A] = \frac{1}{3} \bar{q}^A. \quad (5.1.18)$$

Из этих формул и (5.1.12) следует, что

$$[B, a_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger}] = \frac{1}{3} a_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger}, \quad [B, b_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger}] = -\frac{1}{3} b_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger}. \quad (5.1.19)$$

Считая, что барionный заряд вакуума равен нулю, имеем

$$B a_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger} \Phi_0 = \frac{1}{3} a_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger} \Phi_0, \quad B b_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger} \Phi_0 = -\frac{1}{3} b_{\vec{p}\mu A}^{+\dagger} \Phi_0.$$

Отсюда следует, что барionный заряд кварка равен  $1/3$ , а антикварка  $-1/3$ . Здесь нужно сделать следующее замечание. Множитель  $1/3$  в формуле (5.1.18) связан с основной идеей кварковой гипотезы, согласно которой все барiony и барionные резонансы состоят из трех кварков, а все мезоны — из кварка и антикварка. Так как барionное число барiony равен единице, то кварку нужно приписать барionное число равное  $1/3$ .

Лагранжиан (5.1.3) инвариантен, очевидно, по отношению к преобразованиям

$$q_A \rightarrow q'_A = \sum_i U_{ii'} q_{\alpha i'}, \quad A \equiv \alpha, i, \quad (5.1.20)$$

оставляющим инвариантной квадратичную форму  $\sum_i q_{\alpha i} \bar{q}^{\alpha i}$ . Эти преобразования образуют группу  $SU(3)_c$  (индекс  $c$  служит для обозначения цвета), которая называется группой цветовой симметрии.

Если предполагать, что массы всех кварков одинаковы, то лагранжиан (5.1.3) будет инвариантен также по отношению к преобразованиям

$$q_A \rightarrow \dot{q}'_A = \sum_{\alpha'} U_{\alpha\alpha'} q_{\alpha'} \quad A = \alpha, i, \quad (5.1.21)$$

оставляющим инвариантной квадратичную норму  $\sum_{\alpha} q_{\alpha} \bar{q}^{\alpha}$ .

Эти преобразования образуют группу  $SU(n)_F$ , ( $n=3$ ) (индекс  $F$  служит для обозначения сорта;  $n$  — число ароматов кварков). Отметим, как, что тогда  $SU(3)_c$  является точной группой симметрии кваркового поля,  $SU(n)_F$  является приближенной группой. При этом лагранжиан будет инвариантен по отношению к группе  $SU(3)_c \times SU(n)_F$ , представляющей собой прямое произведение  $SU(3)_c$ - и  $SU(n)_F$ -групп.

С этими группами симметрии кваркового поля связаны определенные законы сохранения. Для установления этих законов построим генераторы  $G$  бесконечно малых преобразований группы  $SU(3)_c$ :

$$\delta q = -\frac{i}{2} \varepsilon^a \lambda_a q, \quad \delta \bar{q} = \frac{i}{2} \varepsilon^a \bar{q} \lambda_a, \quad (5.1.22)$$

где матрицы  $\lambda_a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) определяются формулами (5.1.6). Согласно (5.1.16), генератор этих преобразований

$$G = \frac{1}{2} \varepsilon^a \int d^3x \bar{q}^A \gamma^0 \lambda_a q_A$$

или

$$G = \varepsilon^a \int d^3x \mathcal{J}_a^{(c)0}(x), \quad (5.1.23)$$

где  $\mathcal{J}_a^{(c)\mu}$  — сохраняющиеся обобщенные токи группы  $SU(3)_c$ ,

$$\mathcal{J}_a^{(c)\mu} = \frac{1}{2} \bar{q}^A(x) \gamma^\mu \lambda_a q_A(x). \quad (5.1.24)$$

Соответствующие им обобщенные заряды группы  $SU(3)_c$  определяются формулами

$$Q_a^{(c)} = \int d^3x \mathcal{J}_a^{(c)0}(x). \quad (5.1.25)$$

Так как оператор  $\varepsilon^c Q_a^{(c)} = G$  является генератором преобразований (5.1.22), то

$$[Q_a^{(c)}, q] = -\frac{1}{2} \lambda_a q, \quad [Q_a^{(c)}, \bar{q}] = \frac{1}{2} \bar{q} \lambda_a. \quad (5.1.26)$$

Используя эти соотношения и формулы (5.1.24), (5.1.25), нетрудно показать, что заряды  $Q_a^{(c)}$  удовлетворяют перестановочным соотношениям (см. также раздел 1.4.3)

$$[Q_a^{(c)}, Q_b^{(c)}] = i f_{ab}^d Q_d^{(c)},$$

где  $f_{ab}^d$  — структурные постоянные группы  $SU(3)_c$ . Аналогичное рассмотрение справливо и для группы  $SU(n)_F$ . В частности, если  $n = 4$ , то число матриц  $\lambda_a$ , действующих на сортовой индекс, будет равно не восьми, а пятнадцати ( $n^2 - 1 = 15$  при  $n = 4$ ). В качестве таких беспшуровых матриц обычно выбираются (нумерация строк и столбцов матриц соответствует нумерации кварков:  $c, u, d, s$ )

$$\lambda_{1k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \lambda_k & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad \lambda_9 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{10} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{12} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{15} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.1.27)$$

где  $\lambda_n$  — трехрядные матрицы Гелл — Манна (5.1.6). Соответствующие этим матрицам структурные постоянные  $f_{ab}^c$  определяются из формул

$$\frac{1}{2} [\lambda_a, \lambda_b] = i f_{ab}^c \lambda_c, \quad a, b, c = 1, \dots, 15.$$

Явных значений структурных постоянных мы не будем выписывать. Пятнадцать зарядов, соответствующих этой группе,

определяются формулой, аналогичной (5.1.25):

$$Q_a^{(F)} = \int d^3x \mathcal{F}_a^{(F)0}(x), \quad \mathcal{F}_a^{(F)\mu} = \frac{1}{2} \bar{q}^A \gamma^\mu \lambda_a q_A, \quad a = 1, \dots, 15. \quad (5.1.28)$$

Эти заряды удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[Q_a^{(F)}, Q_b^{(F)}] = i f_{ab}^c Q_c^{(F)}. \quad (5.1.29)$$

Если  $a, b, c = 1, 2, 3$ , то  $f_{ab}^c = \epsilon^{abc}$  (см. (5.1.27), а также явный вид матрицы (5.1.6)) и операторы  $Q_1^{(F)} = I_1, Q_2^{(F)} = I_2, Q_3^{(F)} = I_3$  удовлетворяют перестановочным соотношениям группы  $SU(2)$ , которую естественно назвать группой изотопического спина. Она является, очевидно, подгруппой группы  $SU(4)_F$ . Заряд  $I_3$  можно назвать оператором третьей проекции изотопического спина.

Из перестановочных соотношений (5.1.26) операторов  $Q_a^{(F)}$  и явного вида матриц  $\lambda_a$  следует, что

$$[I_3, a_{\rho\mu}^{+A}] = \frac{1}{2} \lambda_3^{\alpha} a_{\rho\mu}^{+A}, \quad [I_3, b_{\rho\mu}^{+A}] = -\frac{1}{2} \lambda_3^{\alpha} b_{\rho\mu}^{+A} \quad (5.1.30)$$

( $\lambda_3^{\alpha}$  — собственные значения матрицы  $\lambda_3$ ,  $\lambda_3^c = \lambda_3^s = 0$ ,  $\lambda_3^u = -\lambda_3^d = 1$ ).

Будем предполагать, что все заряды  $Q_a^{(F)}$  ( $a = 1, \dots, 15$ ) для вакуума кваркового поля равны нулю. Тогда из формул (5.1.30) легко видеть, что однокварковые состояния

$$\Phi_u = u_{\rho\mu}^{+} \Phi_0, \quad \Phi_d = d_{\rho\mu}^{+} \Phi_0, \quad \Phi_s = s_{\rho\mu}^{+} \Phi_0, \quad \Phi_c = c_{\rho\mu}^{+} \Phi_0 \quad (5.1.30')$$

являются собственными состояниями оператора  $I_3$ , принадлежащими соответственно собственным значениям  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0$

(векторы  $\Phi_u = \bar{u}_{\rho\mu}^{+} \Phi_0, \dots$  описывают состояния  $u, d, s, c$  антикварков). Согласно (5.1.27), (5.1.6), с зарядами  $Q_1^{(F)}, Q_2^{(F)}, Q_3^{(F)}$ , связанными с изотопическим спином, коммутируют два заряда:  $Q_8^{(F)}, Q_{15}^{(F)}$ . Поэтому состояния  $\Phi_s, \Phi_u, \Phi_d, \Phi_c$  являются также собственными состояниями зарядов  $Q_8^{(F)}, Q_{15}^{(F)}$ . Введем вместо оператора  $Q_8^{(F)}$  оператор гиперзаряда  $Y$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} Q_8^{(F)}, \quad (5.1.31)$$

а вместо оператора  $Q_{15}^{(F)}$  — оператор очарования

$$C = \int d^3x \bar{q} c q, \quad (5.1.32)$$

$$C = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{6} \lambda_{15}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из формул (5.1.27), (5.1.30) следует, что

$$Y \Phi_s = -\frac{2}{3} \Phi_s, \quad Y \Phi_u =$$

$$= \frac{1}{3} \Phi_u, \quad Y \Phi_d =$$

$$= \frac{1}{3} \Phi_d, \quad Y \Phi_c = 0 \cdot \Phi_c,$$

$$C \Phi_s = 0 \cdot \Phi_s, \quad C \Phi_u = 0 \cdot \Phi_u, \quad C \Phi_d = 0 \cdot \Phi_d, \quad C \Phi_c = \Phi_c,$$

т. е. гиперзаряды  $s, u, d, c$  кварков равны соответственно  $-2/3, 1/3, 1/3, 0$  (гиперзаряды  $s, u, d, c$  антикварков равны соответственно  $2/3, -1/3, -1/3, 0$ ). Нормировка в формуле (5.1.31) находится в соответствии с тем, что гиперзаряд связан с барионным зарядом соотношением

$$Y = S + B - \frac{1}{3} C, \quad (5.1.33)$$

где  $S$  — странность, которая равна нулю для  $u, d, c$ -кварков, и  $-1$  или  $s$ -кварка. Согласно определению (5.1.32), очарование  $u, d, s$ -кварков равно нулю, а для  $c$ -кварка равно 1.

Квадратные числа кварков  $Y, I_3, C$  сведены в весовой (пространственной) диаграмме, изображенной на рис. 27.

Если исключить из рассмотрения  $c$ -кварк, то весовая диаграмма (плоская) будет иметь вид, изображенный на рис. 28. Эта диаграмма соответствует группе  $SU(3)_F$ . Электрические заряды кварков (в единицах  $e$ ) вводятся согласно модифицированной формуле Гелл-Манна, Нишиджими

$$Q = \frac{Y}{2} + I_3 + \frac{2}{3} C. \quad (5.1.34)$$

Из этой формулы следует, что электрические заряды  $u, d, s, c$ -кварков равны соответственно  $2/3, -1/3, -1/3, 2/3$ .

Генераторов группы  $SU(6)_F$ , соответствующих шести ароматам кварков, мы не будем выписывать. Отметим только массу и заряд кварков (включая  $b$ - и  $t$ -кварки):

Характеристика кварка	$u$	$d$	$s$	$c$	$b$	$t$
Масса	10MeV	10MeV	100MeV	2GeV	5GeV	>90GeV
Заряд ( $e$ )	2/3	-1/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3

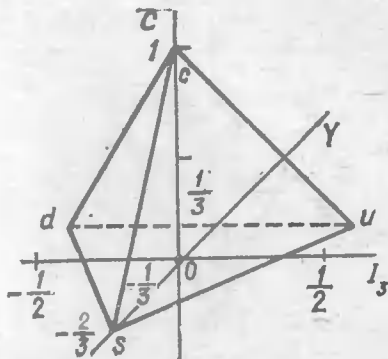


Рис. 27.

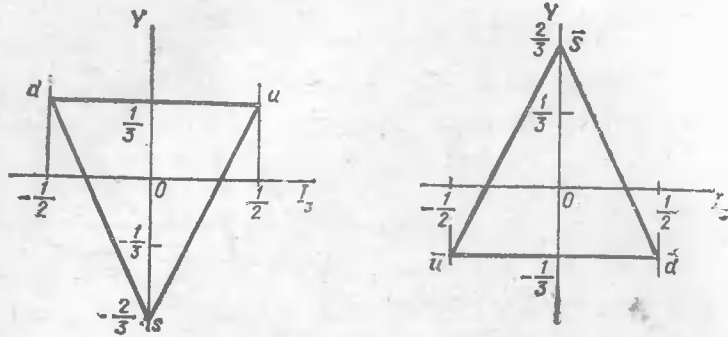


Рис. 28.

**5.1.3. Мезонные супермультиплеты.** Разъясним теперь как строятся мезоны из кварков и антикварков\*. Согласно кварковой гипотезе мезоны состоят из кварка и антикварка, причем мезоны являются цветовыми синглетами (бесцветны). Поэтому мезонные состояния представляют собой суперпозиции векторов  $\bar{q}^{(-)Bj}(x_1) q_{\alpha j}^{(-)}(x_2) \Phi_0$ , в которых произведено суммирование по цветовому индексу  $j$  ((—) служит для обозначения отрицательно частотной части оператора; в дальнейшем мы будем для упрощения записи индекс (—) опускать). Эти состояния являются цветовыми синглетами, так как  $Q_a^{(c)} \bar{q}^{Bj} q_{\alpha j} \times \Phi_0 = 0$  (мы учли при этом, что  $[Q_a^{(c)}, \bar{q}^{Bj} q_{\alpha j}] = 0$  и  $Q_a^{(c)} \Phi_0 = 0$ ,  $a = 1, \dots, 8$ ).

В векторах состояний  $\bar{q}^{Bj} q_{\alpha j} \Phi_0$  операторы  $\bar{q}$  и  $q$  имеют разные спиновые индексы, которые мы здесь не выписываем. Так как кварки и антикварки обладают противоположной внутренней пространственной четностью, то системы, состоящие из кварка и антикварка, находящихся в  $s$ -состоянии, обладают отрицательной пространственной четностью. С другой стороны, такая система может обладать спином 0 или 1. Поэтому в первом случае мы получаем псевдоскалярные мезоны, а во втором — векторные мезоны.

Легко видеть, что суперпозиции

$$\bar{q} q \Phi_0 = \sum_{\alpha} \bar{q}^{\alpha i} q_{\alpha i} \Phi_0 \quad (5.1.35)$$

будут  $SU(4)_F$  синглетом (или скаляром), поскольку  $Q_a^{(F)} \sum_{\alpha} \bar{q}^{\alpha i} \times$

$\times q_{\alpha i} \Phi_0 = 0$ ,  $Q_a^{(F)}$  — обобщенные заряды, связанные с ароматом кварков. Это состояние обозначается через  $\eta'$ .

\* Мезонные и барийные супермультиплеты были впервые построены Гелл-Манном и Нейманом [7].

Таблица 1. Псевдоскалярные мезоны в  $SU(4)_F$  симметрии

Частица	Квантовое число				Кварковая структура вектора состояний
	$I$	$I_3$	$Y$	$C$	
$\pi^+$	1	1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u_+^+ \bar{d}_+^+ - u_+^+ \bar{d}_+^+) \Phi_0$
$\pi^0$	1	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{12}}(u_+^+ \bar{u}_+^+ - u_+^+ \bar{u}_+^+ - d_+^+ \bar{d}_+^+ + d_+^+ \bar{d}_+^+) \Phi_0$
$\pi^-$	1	-1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d_+^+ \bar{u}_+^+ - d_+^+ \bar{u}_+^+) \Phi_0$
$K^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u_+^+ \bar{s}_+^+ - u_+^+ \bar{s}_+^+) \Phi_0$
$K^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d_+^+ \bar{s}_+^+ - d_+^+ \bar{s}_+^+) \Phi_0$
$\bar{K}^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(s_+^+ \bar{d}_+^+ - s_+^+ \bar{d}_+^+) \Phi_0$
$K^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(s_+^+ \bar{u}_+^+ - s_+^+ \bar{u}_+^+) \Phi_0$
$\eta^0$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}(u_+^+ \bar{u}_+^+ - u_+^+ \bar{u}_+^+ + d_+^+ \bar{d}_+^+ - d_+^+ \bar{d}_+^+ - 2s_+^+ \bar{s}_+^+ + 2s_+^+ \bar{s}_+^+) \Phi_0$
$X^0$	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{18}}(u_+^+ \bar{u}_+^+ - u_+^+ \bar{u}_+^+ + d_+^+ \bar{d}_+^+ - d_+^+ \bar{d}_+^+ + s_+^+ \bar{s}_+^+ - s_+^+ \bar{s}_+^+) \Phi_0$
$D^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(c_+^+ \bar{d}_+^+ - c_+^+ \bar{d}_+^+) \Phi_0$
$D^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(c_+^+ \bar{u}_+^+ - c_+^+ \bar{u}_+^+) \Phi_0$
$\bar{D}^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u_+^+ \bar{c}_+^+ - u_+^+ \bar{c}_+^+) \Phi_0$
$D^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d_+^+ \bar{c}_+^+ - d_+^+ \bar{c}_+^+) \Phi_0$
$F^+$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(c_+^+ \bar{s}_+^+ - c_+^+ \bar{s}_+^+) \Phi_0$
$F$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{6}}(s_+^+ \bar{c}_+^+ - s_+^+ \bar{c}_+^+) \Phi_0$
$\eta^0$	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(c_+^+ \bar{c}_+^+ - c_+^+ \bar{c}_+^+) \Phi_0$

Рассмотрим далее суперпозиции

$$\Phi_a = \sum_{\alpha\beta} \bar{q}^{\alpha i} (\lambda_a)_{\alpha\beta} q_{\beta i} \Phi_0, \quad a = 1, 2, \dots, 15 \quad (5.1.36)$$

(так как матрицы  $\lambda_a$  линейно независимы, то эти суперпозиции представляют собой пятнадцать оставшихся комбинаций базисных векторов  $\bar{q}^{\beta i} q_{\alpha j} \Phi_0$ ). Покажем, что при преобразованиях группы  $SU(4)_F$  они преобразуются сами через себя, т. е. образуют инвариантное подпространство по отношению к преобразованиям группы  $SU(4)_F$  ( $SU(4)_F$  — супермультиплет). С этой целью заметим, что

$$\delta\Phi_a = i\varepsilon^b [Q_b^{(F)}, \bar{q}\lambda_a q] \Phi_0$$

или, используя формулы (5.1.26) для операторов  $Q_b^{(F)}$ ,

$$\delta\Phi_a = \frac{i}{2} \varepsilon^b \bar{q} [\lambda_b, \lambda_a] q \Phi_0,$$

откуда, согласно (1.1.27),

$$\delta\Phi_a = -\varepsilon^b f_{ba}^c \bar{q} \lambda_c q \Phi_0 = -\varepsilon^b f_{ba}^c \Phi_c,$$

т. е.  $\delta\Phi_a$  выражается через сами  $\Phi_a$ , что и требовалось доказать.

Пятнадцать состояний (5.1.36) не обладают определенными значениями гиперзаряда, изотопического спина и очарования. Поэтому из этих состояний мы построим суперпозиции, которые будут обладать определенными значениями гиперзаряда, изотопического спина и очарования.

Рассмотрим сначала бесспиновые мезоны, не содержащие очарованных кварков. Векторы состояний этих мезонов преобразуются по неприводимому представлению группы  $SU(3)_F$ . Таких мезонных состояний существует восемь и они представляют собой суперпозицию векторов (5.1.36) для  $a = 1, \dots, 8$ . Восемь ортогональных векторов состояний, обладающих определенными значениями изотопического спина  $I_3, I$ , и гиперзаряда  $Y$ , соответствуют  $K^-, \pi^-, \eta^0$ -мезонам (табл. 1). При этом мы учли, что из двух состояний  $(a_+^\dagger b_+^\dagger + a_+^\dagger b_+^\dagger) \Phi_0$  и  $(a_+^\dagger b_+^\dagger - a_+^\dagger b_+^\dagger) \Phi_0$  первое соответствует спину 1, а второе — спину 0.

Квантовые числа этих мезонов приведены на весовой диаграмме октета группы  $SU(3)_F$  (рис. 29).

Аналогичным образом можно построить шесть бесспиновых очарованных мезонов, обладающих определенными значениями  $I, I_3, Y, C$ . Так как состояние очарованного кварка не преобразуется при преобразованиях группы  $SU(3)_F$ , то векторы состояний, соответствующие частицам  $D^+, D^0, F^+$ ,

преобразуются по фундаментальному представлению группы  $SU(3)_F$ , а векторы состояний, соответствующие античастицам  $D^-, \bar{D}^0, F^-$ , преобразуются по сопряженному фундаментальному представлению.

Соответствующие этим тройкам весовые диаграммы изображены на рис. 30.

Таким образом, построено четырнадцать состояний. Последнюю компоненту 15-плета группы  $SU(4)_F$  можно найти из условия ортогональности искомого состояния 14 полученным ранее состояниям и синглету (5.1.35) группы  $SU(4)_F$ . Это состояние имеет следующую кварковую структуру:  $\eta_{15} \sim (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} - 3c\bar{c})$ . Состояние  $\eta_{15}$  преобразуется как синглет группы  $SU(3)_F$ . Таким образом, 15-плет группы  $SU(4)_F$  разлагается на следующие представления группы  $SU(3)_F$ :  $15 = 8 + 1 + 3 + \bar{3}$ .

На рис. 31 представлена объемная весовая диаграмма, охватывающая все мезоны со спином, равным нулю, принадлежащим 15-плету группы  $SU(4)_F$ .

С помощью формул (5.1.33), (5.1.34) легко проверить, что гиперзаряды и изотопические спины мезонов имеют приведенные на весовых диаграммах значения.

Состояниям  $\eta'$  и  $\eta_{15}$ , обладающим одинаковыми квантовыми числами  $Y, I, I_3, C$ , но принадлежащим различным супермультиплетам группы  $SU(4)_F$ , по-видимому, нельзя сопоставить определенные частицы. Это связано с тем, что группа

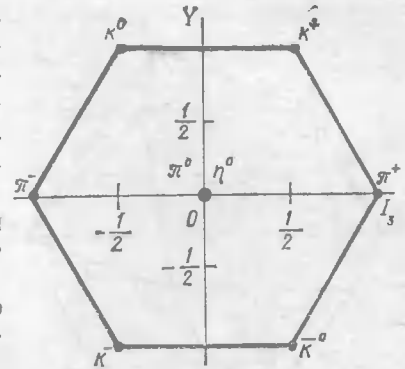


Рис. 29.

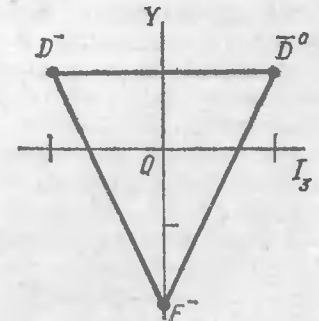
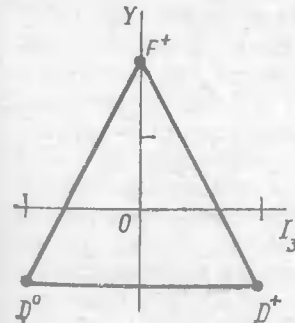


Рис. 30.



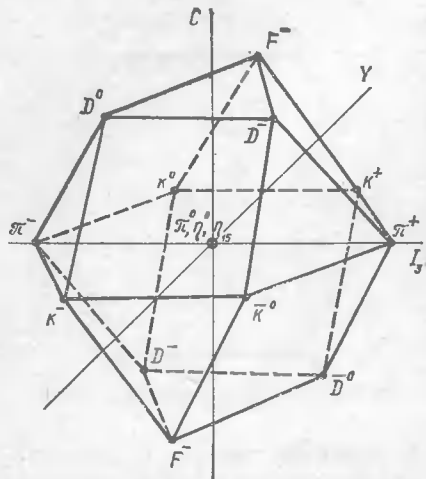


Рис. 31.

$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}), \quad \eta^c = c\bar{c}$$

(взаимодействие  $\mathcal{L}'$  снимает вырождение между  $\eta'$  и  $\eta_{15}$ , в результате чего и возникают эти состояния).

Квантовые числа и кварковая структура найденных псевдоскалярных мезонов приведены в табл. 1. Кроме того, в табл. 2 приведены квантовые числа и кварковая структура векторных мезонов с проекцией спина  $\pm 1$ .

**5.1.4. Барийные супермультиплеты.** Согласно кварковой гипотезе, барионы (или антибарионы) строятся из трех кварков (или антикварков) и также представляют собой цветовые синглеты. Поэтому барионные состояния представляют собой суперпозицию векторов  $\epsilon^{ijk} q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\gamma k} \Phi_0$  (или  $\epsilon_{ijk} \bar{q}^{\alpha i} \bar{q}^{\beta j} \bar{q}^{\gamma k} \Phi_0$ ). Мы будем рассматривать барионы, состоящие из кварков, находящихся в  $s$ -состоянии. В этом случае из условия бесцветности и принципа Паули вытекает, что волновая функция кварковой системы в пространстве спина и в пространстве сортовых переменных должна быть симметрична относительно перестановки кварков. Мы ограничимся рассмотрением барионов, не содержащих очарованных кварков, т. е. мы рассматриваем группу  $SU(3)_F$ . Поэтому волновые функции барионов будут описываться симметричным тензором третьего ранга (поскольку барионы состоят из трех кварков) в шестимерном пространстве, включающем в себя три сорта переменных и две спиновые переменные ( $2 \times 3 = 6$ ). Такой тензор имеет 56 незави-

симметрии  $SU(4)_F$  является приближенной, так как масса  $s$  кварка существенно превышает массы  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков. Взаимодействие, ответственное за это различие масс, приводит к перемешиванию супермультиплетов и может быть схематически описано добавочным слагаемым  $\mathcal{L}' \sim qsc$  к лагранжиану (5.1.3). Легко видеть, что наличие этого слагаемого приводит к тому, что состояния  $\eta'$  и  $\eta_{15}$  не будут являться собственными состояниями полного гамильтониана. Физическими состояниями будут

Таблица 2. Векторные мезоны с  $\mathcal{J}_z = 1$  в  $SU(4)_F$  симметрии

Частица	Квантовое число				Кварковая структура вектора состояния
	$I$	$I_3$	$Y$	$C$	
$\rho^+$	1	1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} u_{\uparrow}^+ i d_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\rho^0$	1	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}} (u_{\uparrow}^+ i \bar{u}_{\uparrow}^+ - d_{\uparrow}^+ i \bar{d}_{\uparrow}^+) \Phi_0$
$\rho^-$	1	-1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} d_{\uparrow}^+ i \bar{u}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$K^{+*}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} u_{\uparrow}^+ i s_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$K^{0*}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} d_{\uparrow}^+ i s_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\bar{K}^{0*}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} s_{\uparrow}^+ i \bar{d}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$K^{-*}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} s_{\uparrow}^+ i \bar{u}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\omega^0$	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{6}} (u_{\uparrow}^+ i \bar{u}_{\uparrow}^+ + d_{\uparrow}^+ i \bar{d}_{\uparrow}^+) \Phi_0$
$\varphi^0$	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} s_{\uparrow}^+ i \bar{s}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\psi^0$	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} c_{\uparrow}^+ i \bar{c}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$D^{+*}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} c_{\uparrow}^+ i \bar{d}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$D^{0*}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} c_{\uparrow}^+ i \bar{u}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\bar{D}^{0*}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}} u_{\uparrow}^+ i \bar{c}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$D^{-*}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}} d_{\uparrow}^+ i \bar{c}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$F^{+*}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}} c_{\uparrow}^+ i \bar{s}_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$F^{-*}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}} s_{\uparrow}^+ i \bar{c}_{\uparrow}^+ \Phi_0$

Таблица 3. Барионы  $\mathcal{P} = \frac{3^+}{2}$  ( $\mathcal{J}_z = \frac{3}{2}$ ) в  $SU(3)_F$  симметрии

Частица	Квантовое число				Кварковая структура вектора состояния
	$I$	$I_3$	$Y$	$C$	
$\Delta^{++}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{6} \epsilon_{ikl} u_{\uparrow}^+ u_{\uparrow}^+ u_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Delta^+$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \epsilon_{ikl} u_{\uparrow}^+ u_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Delta^0$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \epsilon_{ikl} u_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Delta^-$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{1}{6} \epsilon_{ikl} d_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Sigma_8^+$	1	1	0	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \epsilon_{ikl} u_{\uparrow}^+ u_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Sigma_8^0$	1	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} \epsilon_{ikl} u_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Sigma_8^-$	1	-1	0	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \epsilon_{ikl} d_{\uparrow}^+ d_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Xi_8^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \epsilon_{ikl} u_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Xi_8^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \epsilon_{ikl} d_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Omega^-$	0	0	-2	0	$\frac{1}{6} \epsilon_{ikl} s_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+ \Phi_0$

симых компонент ( $56 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ; симметричный тензор  $n$ -го ранга в пространстве  $m$  измерений имеет  $C_{m+n-1}^{m-1}$  компонент). Среди этих 56 состояний можно выбрать состояния, обладающие определенным спином и определенными значениями  $Y$ ,  $I$ ,  $I_3$ . Из трех кварков можно построить состояния со спином  $3/2$  и  $1/2$ . Состояние системы трех частиц со спином  $3/2$  описывается полностью симметричным тензором в спиновом пространстве (четыре компоненты), а состояние со спином  $1/2$  — тензором со смешанной симметрией в спиновом пространстве (две компоненты). Для получения полностью симметричного тензора третьего ранга в шестимерном пространстве необходимо в случае спина  $3/2$  симметричную спиновую волновую

Таблица 4. Барионы с  $\mathcal{P} = \frac{1^+}{2}$  ( $\mathcal{J}_z = \frac{1}{2}$ ) в  $SU(3)_F$  симметрии

Частица	Квантовое число				Кварковая структура вектора состояния
	$I$	$I_3$	$Y$	$C$	
$p$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \epsilon_{ikl} u_{\uparrow}^+ (u_{\uparrow}^+ d_{\downarrow}^+ - u_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^+) \Phi_0$
$n$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \epsilon_{ikl} d_{\uparrow}^+ (u_{\uparrow}^+ d_{\downarrow}^+ - u_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^+) \Phi_0$
$\Sigma^+$	1	1	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \epsilon_{ikl} u_{\uparrow}^+ (u_{\uparrow}^+ s_{\downarrow}^+ - u_{\downarrow}^+ s_{\uparrow}^+) \Phi_0$
$\Sigma^0$	1	0	0	0	$\frac{1}{6} \epsilon_{ikl} [-2u_{\uparrow}^+ d_{\downarrow}^+ s_{\downarrow}^+ + (u_{\uparrow}^+ d_{\downarrow}^+ + u_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^+) s_{\uparrow}^+] \Phi_0$
$\Sigma^-$	1	-1	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \epsilon_{ikl} d_{\uparrow}^+ (d_{\downarrow}^+ s_{\downarrow}^+ - d_{\uparrow}^+ s_{\uparrow}^+) \Phi_0$
$\Lambda^0$	0	0	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \epsilon_{ikl} (u_{\uparrow}^+ d_{\downarrow}^+ - u_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^+) s_{\uparrow}^+ \Phi_0$
$\Xi^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \epsilon_{ikl} s_{\uparrow}^+ (s_{\downarrow}^+ u_{\uparrow}^+ - s_{\uparrow}^+ u_{\downarrow}^+) \Phi_0$
$\Xi^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}} \epsilon_{ikl} s_{\uparrow}^+ (s_{\downarrow}^+ d_{\uparrow}^+ - s_{\uparrow}^+ d_{\downarrow}^+) \Phi_0$

функцию умножить на симметричную сортовую волновую функцию, которая имеет 10 компонент ( $10 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ; дуплет группы  $SU(3)_F$ ).

В случае спина  $1/2$  мы должны поступить следующим образом. Введем в спиновом пространстве тензор третьего ранга  $\chi^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$  ( $\mu_i = 1, 2$ ). Тогда тензор  $\chi^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \equiv \chi^{\mu_2 \mu_1 \mu_3} - \chi^{\mu_2 \mu_3 \mu_1}$  описывает трехкварковую систему со спином  $1/2$  (это следует из того, что  $\chi^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = \epsilon^{\mu_1 \mu_2} \epsilon_{\mu_1 \mu_2} \chi^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$ ). Введем далее тензор  $T^{[\alpha_1 \alpha_2] \alpha_3} \equiv T^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} - T^{\alpha_2 \alpha_1 \alpha_3}$  в сортовом пространстве. Тогда суперпозиция произведений тензоров  $\chi^{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$  и  $T^{[\alpha_1 \alpha_2] \alpha_3}$

$$\chi^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} T^{[\alpha_1 \alpha_2] \alpha_3} + \chi^{\mu_2 \mu_3 \mu_1} T^{[\alpha_2 \alpha_3] \alpha_1} + \chi^{\mu_3 \mu_1 \mu_2} T^{[\alpha_3 \alpha_1] \alpha_2} \quad (5.1.37)$$

является полностью симметричным тензором по отношению к перестановке пар индексов  $(\alpha_i \mu_i)$ . Тензор  $T^{[\alpha_1 \alpha_2] \alpha_3}$  имеет девять компонент (тензор  $\epsilon_{\beta \alpha \alpha} T^{[\alpha_1 \alpha_2] \alpha_3} \equiv A_{\beta}^{\alpha_3}$  эквивалентен

тензору  $T^{[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]}$ . Компонента  $\epsilon_{\beta_1 \beta_2 \beta_3} T^{\beta_1 \beta_2 \beta_3}$  не дает вклада в суперпозицию (5.1.37), поскольку

$$\chi^{[\mu_1 \mu_2] \mu_3} + \chi^{[\mu_2 \mu_3] \mu_1} + \chi^{[\mu_3 \mu_1] \mu_2} = 0, \quad \mu_i = 1, 2.$$

Тензор  $\chi^{[\mu_1 \mu_2] \mu_3}$  имеет две компоненты. Поэтому суперпозиция (5.1.37) соответствует 16 состояний.

Таким образом, в соответствии с требованием бесцветности барионов и принципом Паули мы получаем 10 частиц со спином 3/2 и 8 частиц со спином 1/2 ( $56 = 10 \cdot 4 + 8 \cdot 2$ ). 10 барионов со спином 3/2 образуют декуплет группы  $SU(3)_F$  и 8 барионов со спином 1/2 образуют октет группы  $SU(3)_F$ . Квантовые числа и кварковая структура этих барионов приведены в табл. 3, 4.

## § 5.2. Алгебра токов

**5.2.1. Перестановочные соотношения для токов.** В предыдущем параграфе мы определили октет ( $a = 1, 2, \dots, 8$ ) обобщенных векторных токов  $\mathcal{J}_a^{(\mu)}(x) \equiv \mathcal{J}_a^\mu(x)$ , которые строились с помощью кварковых полей. В ряде задач существенно знать коммутационные соотношения для этих токов. В этом разделе мы и получим эти соотношения.\*

Так как токи  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$  при бесконечно малых преобразованиях группы  $SU(3)$  преобразуются по формулам

$$\delta \mathcal{J}_a^\mu(x) = f_{ab}^c \epsilon^b \mathcal{J}_c^\mu(x),$$

(эти формулы можно непосредственно получить из (5.1.24), (5.1.22), используя коммутационные соотношения (1.1.27) для матриц  $T_a = \frac{1}{2} \lambda_a$ ), а оператор  $G$  представляет собой генератор преобразований (5.1.22), то

$$\delta \mathcal{J}_a^\mu(x) = i[G, \mathcal{J}_a^\mu(x)], \quad G = \epsilon^a Q_a, \quad Q_a \equiv Q_a^{(a)}.$$

Поэтому

$$[Q_b, \mathcal{J}_a^\mu(x)] = i f_{ba}^c \mathcal{J}_c^\mu(x) \quad (5.2.1)$$

( $f_{ab}^c$  — структурные постоянные группы  $SU(3)$ ).

Перейдем теперь к нахождению структуры одновременных коммутационных соотношений  $[\mathcal{J}_a^\mu(x), \mathcal{J}_b^\nu(x')]_{t=t'}$  для токов. Так как токи представляют собой локальные операторы, т. е. операторы, которые строятся из полевых операторов и их производных (конечного порядка), относящихся к одной и

\* Алгебра токов впервые была введена Гелл-Манном [8] (см. также [9—11]).

той же пространственно-временной точке, то в силу принципа причинности одновременные коммутаторы токов должны обращаться в нуль при  $x \neq x'$  и, следовательно, они должны быть линейной комбинацией  $\delta$ -функции  $\delta(x - x')$  и ее пространственных производных

$$[\mathcal{J}_a^\mu(x), \mathcal{J}_b^\nu(x')]_{t=t'} = F_{ab}^{\mu\nu}(x) \delta(x - x') - G_{ab;k}^{\mu\nu} \partial^k \delta(x - x'), \quad (5.2.2)$$

где  $F$  и  $G$  — некоторые локальные операторы; мы предполагаем здесь, что коммутаторы не содержат производных от  $\delta$ -функций выше первого порядка. Полагая в этой формуле  $\nu = 0$  и интегрируя по  $x'$ , получаем, согласно (5.2.1),

$$F_{ab}^{\mu 0}(x) = i f_{ab}^c \mathcal{J}_c^\mu(x).$$

Поэтому при  $\nu = 0$  соотношение (5.2.2) принимает вид

$$[\mathcal{J}_a^\mu(x), \mathcal{J}_b^0(x')]_{t=t'} = i f_{ab}^c \mathcal{J}_c^\mu(x) \delta(x - x') - R_{ab}^{\mu k}(x) \partial_k \delta(x - x'), \quad (5.2.3)$$

где  $R_{ab}^{\mu k}(x) = -G_{ab;k}^{\mu 0}(x)$ . Мы видели, что заряды  $Q_a = \int d^3x \times \mathcal{J}_a^0(x)$  образуют алгебру Ли группы  $SU(3)$ .

Теперь предположим, что операторы  $\mathcal{J}_a^0(x)$  образуют локальную алгебру группы  $SU(3)$ , т. е.

$$[\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^0(x')]_{t=t'} = i f_{ab}^c \mathcal{J}_c^0(x) \delta(x - x'). \quad (5.2.4)$$

Иными словами мы предполагаем, что  $R_{ab}^{0k}(x) \equiv 0$ . Полагая в формуле (5.2.3)  $\mu = l$ , получаем

$$[\mathcal{J}_a^l(x), \mathcal{J}_b^0(x')]_{t=t'} = i f_{ab}^c \mathcal{J}_c^l(x) \delta(x - x') - R_{ab}^{lk}(x) \partial_k \delta(x - x'). \quad (5.2.5)$$

Одновременной коммутатор пространственных компонент токов мы будем, согласно (5.2.2), записывать в виде

$$[\mathcal{J}_a^l(x), \mathcal{J}_b^k(x')]_{t=t'} = F_{ab}^{lk}(x) \delta(x - x') - G_{ab}^{lk;s} \partial_s \delta(x - x'). \quad (5.2.6)$$

**5.2.2. Швингеровские члены.** Имея явную кварковую структуру токов  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$  (5.1.24) и используя одновременные перестановочные соотношения для кваркового поля, можно формально вычислить коммутаторы токов. В результате такого формального вычисления мы получим

$$[\mathcal{J}_a^\mu(x), \mathcal{J}_b^0(x')]_{t=t'} = i f_{ab}^c \mathcal{J}_c^\mu(x) \delta(x - x'). \quad (5.2.7)$$

В правые части этих формул входит только пространственная  $\delta$ -функция, но не ее производные и, следовательно,

$$R_{ab}^{\mu k}(x) = 0. \quad (5.2.8)$$

Однако легко убедиться, что не все эти результаты являются правильными. Действительно, рассмотрим одновременной коммутатор  $[\mathcal{J}^0(x), \mathcal{J}^k(x')]_{t=t'}$  и будем для простоты предполагать, что имеем дело с абелевой группой,  $f_{ab}^c = 0$ . Этот случай соответствует токам, связанным с инвариантностью лагранжиана относительно фазовых преобразований (например, электромагнитные токи)

$$\mathcal{J}^\mu(x) = \frac{1}{2} [\bar{q}(x), \gamma^\mu q(x)].$$

Тогда, согласно (5.2.7), имеем

$$[\mathcal{J}^0(x), \mathcal{J}^k(x')]_{t=t'} = 0.$$

Дифференцируя это соотношение по  $x'^k$ , используя закон сохранения тока,  $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0$ , получаем

$$[\mathcal{J}^0(x), \partial_0' \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} = 0. \quad (5.2.9)$$

Вычислим теперь вакуумное среднее входящего сюда коммутатора. Вводя полную систему векторов состояний  $|n\rangle$  гамильтониана  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$$

(вектор  $|0\rangle$  обозначает вакуумное состояние с энергией  $E_0$ ) и замечая, что

$$\langle 0 | \partial_0 \mathcal{J}^0(x) | n \rangle = -i(E_n - E_0) \langle 0 | \mathcal{J}^0(x) | n \rangle,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int d^3x d^3x' f(x) f(x') \langle 0 | [\mathcal{J}^0(x), \partial_0' \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle = \\ = 2i \sum_n (E_n - E_0) \left| \int d^3x f(x) \langle 0 | \mathcal{J}^0(x) | n \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

( $f(x)$  — произвольная вещественная функция  $x$ ). Так как  $E_n - E_0 > 0$  и матричные элементы  $\langle 0 | \mathcal{J}^0(x) | n \rangle$  отличны от нуля, например, для состояний  $|n\rangle$ , в которых имеется одна частица и одна античастица, то  $\langle 0 | \mathcal{J}^0(x), \partial_0' \mathcal{J}^0(x') | 0 \rangle \neq 0$ , что находится в противоречии с формулой (5.2.9).

Таким образом, формальный вывод коммутационных соотношений для токов, основанный только на явном выражении для кварковых токов, неверен. Это связано с тем, что произведение полевых операторов в одной и той же пространственно-временной точке не имеет смысла, что видно, например, из одновременных перестановочных соотношений (5.1.11), так как  $\delta(x)$  не имеет смысла при  $x = 0$ . По этой причине, чтобы придать смысл произведениям операторов поля в совпадающих точках, следует пространственные аргументы

операторов несколько «раздвинуть». Именно, если имеется два полевых оператора  $a(x), b(x)$  ( $a, b = q, \bar{q}$ ), то под произведением  $a(x)b(x)$  будем понимать

$$a(x)b(x) \rightarrow a\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)b\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right),$$

где  $\epsilon$  — бесконечно малый пространственный вектор. При таком определении электромагнитный ток  $\mathcal{J}^\mu(x)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\mu(x) = \frac{1}{2} \bar{q}\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma^\mu q\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) - \frac{1}{2} q\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) \times \\ \times \bar{q}\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right). \quad (5.2.10) \end{aligned}$$

Вычисляя при таком определении тока с помощью одновременных перестановочных соотношений (5.1.11) коммутатор токов, получаем

$$\begin{aligned} 4[\mathcal{J}^\mu(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} = & \left(-\bar{q}\left(x' + \frac{\epsilon'}{2}\right) \gamma^\mu q\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) + \right. \\ & \left. + \bar{q}\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma^\mu q\left(x' + \frac{\epsilon'}{2}\right)\right) \delta\left(x - x' + \frac{\epsilon + \epsilon'}{2}\right) + \\ & + \left(\bar{q}\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma^\mu q\left(x' - \frac{\epsilon'}{2}\right) - \bar{q}\left(x' - \frac{\epsilon'}{2}\right) \gamma^\mu q\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)\right) \times \\ & \times \delta\left(x - x' - \frac{\epsilon + \epsilon'}{2}\right) + \left(-\bar{q}\left(x' - \frac{\epsilon'}{2}\right) \gamma^\mu q\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) + \right. \\ & \left. + \bar{q}\left(x - \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma^\mu q\left(x' - \frac{\epsilon'}{2}\right)\right) \delta\left(x - x' + \frac{\epsilon - \epsilon'}{2}\right) + \\ & + \left(\bar{q}\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right) \gamma^\mu q\left(x' + \frac{\epsilon'}{2}\right) - \bar{q}\left(x' + \frac{\epsilon'}{2}\right) \gamma^\mu q\left(x + \frac{\epsilon}{2}\right)\right) \times \\ & \times \delta\left(x - x' - \frac{\epsilon - \epsilon'}{2}\right) \end{aligned}$$

(вектор  $\epsilon$  относится к току  $\mathcal{J}^\mu(x)$ , а вектор  $\epsilon'$  — к току  $\mathcal{J}^0(x')$ ). Таким образом, при  $\epsilon = \epsilon' = 0$  этот коммутатор формально обращается в нуль. Вычислим теперь вакуумное среднее полученного коммутатора. Замечая, что (см. (5.1.12))

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}\mu} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} (u^\mu(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}\mu} e^{-ipx} + u^\mu(\mathbf{p})^c b_{\mathbf{p}\mu}^+ e^{ipx})$$

и

$$\bar{u}^\mu(\mathbf{p})^c \gamma^\lambda u^\mu(\mathbf{p})^c = 2p^\lambda,$$

имеем

$$\langle 0 | \bar{q}(x) \gamma^\lambda q(x') | 0 \rangle_{t=t'} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^\lambda}{p_0} e^{ip(x-x')} \equiv f^\lambda(x-x').$$

Поэтому

$$\langle 0 | [\mathcal{J}^\lambda(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle = (f^\lambda(\varepsilon + \varepsilon') - f^\lambda(-\varepsilon - \varepsilon')) \times \\ \times \left( \delta \left( x - x' - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \right) - \delta \left( x - x' + \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2} \right) \right) + (f^\lambda(\varepsilon - \varepsilon') - \\ - f^\lambda(\varepsilon' - \varepsilon)) \left( \delta \left( x - x' - \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} \right) - \delta \left( x - x' + \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2} \right) \right).$$

Отсюда следует, что

$$\langle 0 | [\mathcal{J}^0(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle = 0,$$

$$\langle 0 | [\mathcal{J}^k(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle = -\frac{1}{2} (f^k(\varepsilon + \varepsilon')(\varepsilon + \varepsilon')_l + \\ + f^k(\varepsilon - \varepsilon')(\varepsilon - \varepsilon')_l) \partial^l \delta(x - x')$$

(мы учли при этом, что  $f^0(x)$  — четная функция  $x$ ,  $f^k(x)$  — нечетная функция  $x$ ). Так как  $f^k(\varepsilon) \approx \frac{2i}{\varepsilon^2} \varepsilon^k$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то

$$i \langle 0 | [\mathcal{J}^k(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'} | 0 \rangle \approx \left\{ \frac{(\varepsilon + \varepsilon')_k (\varepsilon + \varepsilon')_l}{|\varepsilon + \varepsilon'|^4} + \right. \\ \left. + \frac{(\varepsilon - \varepsilon')_k (\varepsilon - \varepsilon')_l}{|\varepsilon - \varepsilon'|^4} \right\} \partial^l (x - x') \quad (5.2.11)$$

и, следовательно, при  $\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0$  вакуумное среднее коммутатора  $[\mathcal{J}^k(x), \mathcal{J}^0(x')]_{t=t'}$  не обращается в нуль (даже расходится). По этой причине в формуле (5.2.5) мы не можем в качестве операторов  $R_{ab}^{lk}$  использовать операторы (5.2.8), т. е. в формуле (5.2.5) наряду с членами, содержащими  $\delta$ -функцию, должны входить члены, содержащие пространственные производные от  $\delta$ -функции. Эти члены носят название швингеровских [12]. К вопросу о роли швингеровских членов мы вернемся еще в § 5.4.

Алгебра токов и швингеровские члены используются при получении так называемых правил сумм, связывающих амплитуды и сечения различных процессов [13].

**5.2.3. Введение релятивистски инвариантных  $T$ -произведений.** Введение швингеровских членов можно связать с вопросом о релятивистской инвариантности  $T$ -произведений. Мы уже отмечали, что хронологическое произведение операторов не определено при совпадении пространственно-временных аргументов операторов (в [14] этому соответствовало введение операторов  $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$ , отличных от нуля только при  $x_1 = \dots = x_n$ ). Поэтому мы могли бы, например, добавить к  $T$ -произведению  $T(a(x)b(y))$  слагаемое типа  $\delta(x_0 - y_0) \times \times \partial_k \delta(x - y)$ , которое могло бы нарушить релятивистскую инвариантность исходного  $T$ -произведения, если бы оно об-

ладало ею или сделало его релятивистски инвариантным при  $x = y$ , если бы исходное  $T$ -произведение не было бы релятивистски инвариантным при  $x = y$ . Обычно при раскрытии  $T$ -произведений мы пользуемся правилами Вика, выражающими  $T$ -произведение в виде суммы нормальных произведений. Нормальные произведения вместе с входящими в них функциями распространения являются релятивистски инвариантными. Поэтому правила Вика доопределяют  $T$ -произведения (при совпадающих аргументах) и делают  $T$ -произведения релятивистски инвариантными. Можно, однако, поставить вопрос о введении релятивистски инвариантных  $T$ -произведений без использования правил Вика, а исходя непосредственно из первоначального определения  $T$ -произведения:

$$T(a(x)b(y)) = \theta(x_0 - y_0) a(x)b(y) + \theta(y_0 - x_0) b(y)a(x),$$

где  $a(x)$ ,  $b(y)$  — некоторые локальные операторы, построенные из операторов поля  $\chi(x)$  и содержащие четное число ферми-операторов; такими операторами являются, в частности, операторы токов  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$ , входящие в лагранжиан взаимодействия полей. В этом разделе мы займемся вопросом о релятивистской инвариантности таким образом определенных  $T$ -произведений и покажем, что этот вопрос тесно связан с наличием швингеровских членов в коммутаторах токов (см. [10]).

Чтобы выяснить является ли релятивистски инвариантным хронологическое произведение токов

$$T(\mathcal{J}_a^\nu(x) \mathcal{J}_b^\mu(y)) \equiv T^{\nu\mu}(x, y) = \theta(x_0 - y_0) \mathcal{J}_a^\nu(x) \mathcal{J}_b^\mu(y) - \\ - \theta(y_0 - x_0) \mathcal{J}_b^\mu(y) \mathcal{J}_a^\nu(x) \quad (5.2.12)$$

(для общности мы рассматриваем сохраняющиеся токи при наличии внутренней симметрии поля), введем унитарное преобразование  $U(a)$  (см. § 1.5), соответствующее преобразованию Лоренца

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu,$$

$T$ -произведение (5.2.12) будет релятивистски инвариантным, если  $T^{\nu\mu}(x, y)$  при этих преобразованиях будет преобразовываться как тензор второго ранга, т. е.

$$U_a T^{\nu\mu}(x', y') U_a^\dagger = a^\nu_\rho a^\mu_\lambda T^{\rho\lambda}(x, y), \quad x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu, \\ y'^\mu = a^\mu_\nu y^\nu. \quad (5.2.13)$$

В случае бесконечно малых преобразований Лоренца, соответствующих движению с бесконечно малой скоростью  $v_l = \varepsilon_{0l}$  ( $a_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu}$ ,  $\varepsilon_{kl} = 0$ ), оператор  $U(a)$  определяется формулой (1.5.28)

$$U(a) = 1 + iG, \quad G = \varepsilon_{0l} M^{0l} \quad (5.2.14)$$

и соотношение (5.2.13) приобретает вид

$$[M^{0l}, T^{\nu\mu}(x, y)] = i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) T^{\nu\mu}(x, y) + i(y^l \partial^0 - y^0 \partial^l) \times \\ \times T^{\nu\mu}(x, y) + L^l T^{\nu\mu}(x, y), \quad (5.2.15)$$

где

$$L^l T^{\nu\mu} = -ig^{0\nu} T^{l\mu} - ig^{0\mu} T^{\nu l} + ig^{l\nu} T^{0\mu} + ig^{l\mu} T^{\nu 0}. \quad (5.2.15')$$

Так как  $\mathcal{F}_a^\nu(x)$  представляет собой 4-вектор, то

$$[M^{0l}, \mathcal{F}_a^\nu(x) \mathcal{F}_b^\mu(y)] = i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) \mathcal{F}_a^\nu(x) \mathcal{F}_b^\mu(y) + \\ + i(y^l \partial^0 - y^0 \partial^l) \mathcal{F}_a^\nu(x) \mathcal{F}_b^\mu(y) + L^l (\mathcal{F}_a^\nu(x) \mathcal{F}_b^\mu(y)).$$

Поэтому, согласно (5.2.12), справедлива формула

$$[M^{0l}, T^{\nu\mu}(x, y)] = L^l T^{\nu\mu}(x, y) + i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) T^{\nu\mu}(x, y) + \\ + i(y^l \partial^0 - y^0 \partial^l) T^{\nu\mu}(x, y) - i(x^l - y^l) \delta(x^0 - y^0) [\mathcal{F}_a^\nu(x), \mathcal{F}_b^\mu(y)]. \quad (5.2.16)$$

Последнее слагаемое в этой формуле компенсирует временные производные от  $\theta(x^0 - y^0)$  и  $\theta(y^0 - x^0)$ , появляющиеся во втором и третьем слагаемом.

Если бы коммутатор токов не содержал швингеровских членов (пропорциональных  $\partial_l \delta(x - y)$ ), т. е. был бы пропорционален  $\delta(x - y)$ , то слагаемое, содержащее коммутатор токов в (5.2.16), обратилось бы в нуль и мы пришли бы к формуле (5.2.15). Это значит, что при отсутствии швингеровских членов в коммутаторе токов хронологическое произведение, определяемое формулой (5.2.12), было бы релятивистски инвариантным.

С другой стороны, как мы видели, введение швингеровских членов необходимо и, следовательно, хронологическое произведение, определяемое формулой (5.2.12), не является релятивистски инвариантным и должно быть модифицировано в окрестности точки  $x = y$ . Модифицированное (простейшим образом) хронологическое произведение токов обозначим через

$$T^*(\mathcal{F}_a^\nu(x) \mathcal{F}_b^\mu(y)) \equiv T^{*\nu\mu}(x, y) = T^{\nu\mu}(x, y) + \delta(x - y) \rho^{\nu\mu}(x), \quad (5.2.17)$$

где  $T^{\nu\mu}(x, y)$  определяется формулой (5.2.12) и операторы  $\rho^{\nu\mu}(x)$  мы подберем таким образом, чтобы модифицированное  $T$ -произведение было релятивистски инвариантным, т. е. чтобы выполнялось соотношение

$$[M^{0l}, T^{*\nu\mu}(x, y)] = i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) T^{*\nu\mu}(x, y) + \\ + i(y^l \partial^0 - y^0 \partial^l) T^{*\nu\mu}(x, y) + L^l T^{*\nu\mu}(x, y).$$

Подставляя сюда (5.2.17) и учитывая (5.2.16), получаем

$$[M^{0l}, \rho^{\nu\mu}(x)] \delta(x - y) - i(x^l - y^l) \delta(x^0 - y^0) [\mathcal{F}_a^\nu(x), \mathcal{F}_b^\mu(y)] = \\ = \delta(x - y) L^l \rho^{\nu\mu}(x) + \delta(x - y) i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) \rho^{\nu\mu}(x).$$

Мы использовали при этом очевидную формулу

$$(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) \delta(x - y) + (y^l \partial^0 - y^0 \partial^l) \delta(x - y) = 0.$$

Замечая далее, что, согласно (5.2.2),

$$\delta(x^0 - y^0) [\mathcal{F}_a^\nu(x), \mathcal{F}_b^\mu(y)] = F_{ab}^{\nu\mu}(x) \delta(x - y) - G_{ab}^{\nu\mu; k}(x) \partial_k \delta(x - y)$$

и

$$L^l \rho^{\nu\mu}(x) = -ig^{0\nu} \rho^{l\mu}(x) - ig^{0\mu} \rho^{\nu l}(x) + ig^{l\nu} \rho^{0\mu}(x) + ig^{l\mu} \rho^{\nu 0}(x),$$

получаем

$$[M^{0l}, \rho_{ab}^{\nu\mu}(x)] - iG_{ab}^{\nu\mu; l}(x) = i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) \rho_{ab}^{\nu\mu}(x) - \\ - ig^{0\nu} \rho_{ab}^{l\mu}(x) - ig^{0\mu} \rho_{ab}^{\nu l}(x) + ig^{l\nu} \rho_{ab}^{0\mu}(x) + ig^{l\mu} \rho_{ab}^{\nu 0}(x). \quad (5.2.18)$$

Эта формула служит для определения  $\rho_{ab}^{\nu\mu}(x)$ . Так как

$$e^{iPx} G_{ab}^{\nu\mu; i}(0) e^{-iPx} = G_{ab}^{\nu\mu; i}(x),$$

$$i[P^0, M^{0l}] = -g^{00} P^l + g^{l0} P^0$$

(см. (1.4.41)) и, следовательно,

$$e^{iPx} M^{0l} e^{-iPx} = M^{0l} + x^l P^0 - x^0 P^l,$$

то из формулы (5.2.18) вытекает, что

$$\rho_{ab}^{\nu\mu}(x) = e^{iPx} \rho_{ab}^{\nu\mu}(0) e^{-iPx}.$$

Поэтому достаточно определить оператор  $\rho_{ab}^{\nu\mu}(0)$ . Полагая в (5.2.18)  $x = 0$ , имеем

$$[M^{0l}, \rho_{ab}^{\nu\mu}(0)] - iG_{ab}^{\nu\mu; l}(0) = -ig^{0\nu} \rho_{ab}^{l\mu}(0) - ig^{0\mu} \rho_{ab}^{\nu l}(0) + \\ + ig^{\nu l} \rho_{ab}^{0\mu}(0) + ig^{l\mu} \rho_{ab}^{\nu 0}(0). \quad (5.2.19)$$

Предположим, что

$$\rho_{ab}^{\nu 0}(0) = \rho_{ab}^{0\nu}(0) = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (5.2.20)$$

Тогда уравнение (5.2.19) удовлетворяется при  $\nu = \mu = 0$ , так как  $G_{ab}^{00; l}(0) = 0$  (см. (5.2.4); в коммутаторе  $[\mathcal{F}_a^0(x), \mathcal{F}_b^0(y)]$  нет швингеровских членов). При  $\nu = 0, \mu = s$  уравнение (5.2.19) приводит к определению пространственных составляющих оператора

$$\rho_{ab}^{ls}(0) = G_{ab}^{0s; l}(0). \quad (5.2.21)$$

Формулы (5.2.20), (5.2.21) и определяют оператор  $\rho_{ab}^{\nu\mu}$ , а тем самым и релятивистски инвариантное  $T^*$  произведение токов (см. (5.2.17)).

Для пространственных индексов уравнение (5.2.19) принимает вид

$$[M^{0l}, \rho_{ab}^{ks}(0)] - iG_{ab}^{ks;l}(0) = 0$$

или, используя (5.2.21),

$$[M^{0l}, G_{ab}^{0s;k}(0)] = iG_{ab}^{ks;l}(0). \quad (5.2.22)$$

Это соотношение связывает между собой швингеровские члены  $G_{ab}^{0s;k}$  и  $G_{ab}^{ks;l}$ . В действительности, однако, эта связь является непосредственным следствием векторного характера токов  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$ . Рассмотрим двойной коммутатор  $[M^{0l}, [\mathcal{J}_a^\mu(x), \mathcal{J}_b^s(0)]]_{x^0=0}$ . Тогда из тождества Якоби следует, что

$$[M^{0l}, [\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^s(0)]_{x^0=0}] = -[\mathcal{J}_a^0(x), [\mathcal{J}_b^s(0), M^{0l}]_{x^0=0}] - [\mathcal{J}_b^s(0), [M^{0l}, \mathcal{J}_a^0(x)]]_{x^0=0}.$$

Так как  $\mathcal{J}_a^\mu(x)$  представляет собой 4-вектор, то

$$[M^{0l}, \mathcal{J}_a^\mu(x)] = i(x^l \partial^0 - x^0 \partial^l) \mathcal{J}_a^\mu(x) + L^l \mathcal{J}_a^\mu(x), \\ L^l \mathcal{J}_a^\mu(x) = -ig^{0\mu} \mathcal{J}_a^l(x) + ig^{l\mu} \mathcal{J}_a^0(x).$$

Поэтому

$$[M^{0l}, [\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^s(0)]_{x^0=0}] = [\mathcal{J}_a^0(x), L^l \mathcal{J}_b^s(0)]_{x^0=0} - [\mathcal{J}_b^s(0), L^l \mathcal{J}_a^0(x)]_{x^0=0} + ix^l [\mathcal{J}_b^s(0), \partial_h \mathcal{J}_a^k(x)]_{x^0=0}; \quad (5.2.23)$$

мы использовали при этом закон сохранения тока  $\partial_0 \mathcal{J}_a^0(x) = -\partial_h \mathcal{J}_a^k(x)$ . Левая сторона этого равенства, согласно (5.2.5), равна

$$[M^{0l}, [\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^s(0)]_{x^0=0}] = -if_b^a \delta(\vec{x}) [M^{0l}, \mathcal{J}_a^s(0)] - [M^{0l}, G_{ba}^{s0;k}(0)] \partial_h \delta(\mathbf{x}).$$

Поэтому формулу (5.2.23) можно переписать в виде

$$\partial_h (ix^l [\mathcal{J}_b^s(0), \mathcal{J}_a^k(x)]_{x^0=0}) + [M^{0l}, G_{ba}^{s0;k}(0)] \partial_h \delta(\mathbf{x}) = -[\mathcal{J}_b^s(0), L^l \mathcal{J}_a^0(x)]_{x^0=0} - [\mathcal{J}_a^0(x), L^l \mathcal{J}_b^s(0)]_{x^0=0} + i[\mathcal{J}_b^s(0), \mathcal{J}_a^l(x)]_{x^0=0} - f_{ba}^a [M^{0l}, \mathcal{J}_a^s(0)] \delta(\mathbf{x}).$$

Правая сторона этого равенства в силу (5.2.14), (5.3.15') обращается в нуль и мы приходим, согласно (5.2.6), к соотношению (5.2.22), связывающему швингеровские члены  $G_{ab}^{0s;k}$  и  $G_{ab}^{ks;l}$ .

Таким образом, мы связали дополнительные слагаемые (пропорциональные  $\delta(x-y)$ ), входящие в релятивистски инвариантное определение хронологического произведения токов, со швингеровскими членами, входящими в одновременной коммутатор токов.

Покажем, что справедливо соотношение

$$\partial_\nu T^*(\mathcal{J}_a^\nu(x) \mathcal{J}_b^\mu(y)) = i\delta(x-y) f_{ab}^c \mathcal{J}_c^\mu(x). \quad (5.2.24)$$

Используя определение (5.2.17), имеем

$$\partial_\nu T^*(\mathcal{J}_a^\nu(x) \mathcal{J}_b^\mu(y)) = \rho_{ab}^{\nu\mu}(y) \partial_\nu \delta(x-y) + \delta(x^0 - y^0) [\mathcal{J}_a^0(x), \mathcal{J}_b^\mu(y)]$$

или, учитывая (5.2.20), (5.2.3), имеем

$$\partial_\nu T^*(\mathcal{J}_a^\nu(x) \mathcal{J}_b^\mu(y)) = \rho_{ab}^{k\mu}(y) \partial_k \delta(x-y) - G_{ab}^{0\mu;k}(y) \partial_k \delta(x-y) + if_{ab}^d \mathcal{J}_d^\mu(x) \delta(x-y),$$

откуда в силу (5.2.21) и вытекает формула (5.2.24).

Заметим, что такой же результат мы получили бы, если бы пользовались обычным определением  $T$ -произведения и в коммутаторе токов не учитывали швингеровские члены.

В квантовой электродинамике  $f_{ab}^c = 0$  и, следовательно,

$$\partial_\nu T^*(\mathcal{J}^\nu(x) \mathcal{J}^\mu(y)) = 0. \quad (5.2.25)$$

В разделе 5.4.2 мы свяжем вакуумное среднее швингеровских членов, входящих в коммутатор временной и пространственной компонент токов, с полным сечением аннигиляции электронно-позитронной пары.

### § 5.3. Феноменологическая хромодинамика

**5.3.1. Кварки и глюоны.** В предыдущей главе была развита квантовая теория неабелева калибровочного поля и взаимодействующего с ним фермионного поля. Она лежит в основе современной теории сильного взаимодействия адронов, называемой квантовой хромодинамикой.

Мы предполагаем, что все адроны построены из кварков и антикварков различных сортов (ароматов), которые связаны внутри адронов благодаря обмену глюонами — квантами калибровочного поля. В этом отношении глюоны аналогичны фотонам, обмен которыми приводит к взаимодействию электрически заряженных частиц. Напомним, что кварковое поле обладает точной  $SU(3)_c$  цветовой симметрией и каждый кварк может находиться в трех цветовых состояниях (условно называемых красным, голубым, желтым). Цветовая симметрия

вводится сначала как глобальная. Чтобы сделать ее локальной необходимо, как мы видели в § 4.2, ввести  $n^2 - 1 = 8$  ( $n = 3$ ) векторных полей  $A_\mu^a(x)$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), которые и представляют собой глюонные поля. Глюонное поле (даже в отсутствие кваркового поля) является нелинейным, причем нелинейность описывается той же константой взаимодействия  $g$ , которая определяет взаимодействие кварков и глюонов. Эта константа взаимодействия играет ту же роль, что и заряд электрона  $e$  в квантовой электродинамике и называется цветовым зарядом. Подчеркнем, что цветовой заряд, в отличие от электрического, является принадлежностью как кваркового, так и глюонного поля.

Как мы видели в § 4.6, эффективная константа связи  $\bar{g}\left(\frac{k}{\mu}, g\right)$ , т. е. эффективный цветовой заряд уменьшается с увеличением  $k$  (в задачах рассеяния  $k$  имеет смысл переданного импульса). Большим переданным импульсам соответствуют малые расстояния. Поэтому можно заключить, что энергия взаимодействия кварков уменьшается с уменьшением расстояния, в отличие от электрических зарядов, энергия взаимодействия которых увеличивается с уменьшением расстояния (см. раздел 4.6.2). Иными словами кварки в адронах ведут себя практически как свободные частицы (партоны — по терминологии Фейнмана). Это явление носит название асимптотической свободы. То, что кварки и антикварки ведут себя практически как свободные частицы и обладают дробным электрическим зарядом, видно, в частности, из опытов по  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны. Как мы увидим в следующем параграфе, отношение полного сечения этого процесса к полному сечению аннигиляции  $e^+e^-$  в  $\mu^+\mu^-$  определяется формулой [15]

$$R(E) = 3 \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2,$$

где  $Q_{\alpha}$  — заряд кварка  $\alpha$ -го сорта в единицах заряда протона; и суммирование распространяется на все кварки, масса которых  $m_{\alpha} < \frac{1}{2}E$  ( $E$  — энергия  $e^+e^-$  пары в системе центра инерции). Поэтому величина  $R(E)$  как функция  $E$  меняется скачкообразно. Измерение  $R(E)$  позволяет оценить как массу (по положению скачка функции  $R(E)$ ), так и заряд кварка (по величине скачка). Взаимодействие между кварками разных цветов в белых адронах на расстояниях порядка размеров адронов столь велико, что развести их на большие расстояния невозможно. Это утверждение, называемое гипотезой конфаймента (пленения) кварков и глюонов внутри белых адронов,

находится в согласии со всеми экспериментальными фактами, относящимися к сильному взаимодействию.

**5.3.2. Феноменология конфаймента.** Асимптотическая свобода, которая, как мы видели в разделе 4.6.2, вытекает из основных уравнений квантовой теории калибровочных полей, правильно описывает тенденцию роста взаимодействия с увеличением расстояния между кварками. Однако таким путем мы не можем построить последовательной теории конфаймента (пленения кварков), поскольку при этом мы должны перейти в область больших расстояний, в которой теряет силу теория возмущений, лежащая в основе всего нашего рассмотрения.

В этих условиях приобретает интерес развитие феноменологической теории конфаймента. В этом разделе мы изложим одну из феноменологических моделей конфаймента — так называемую модель кварк-глюонных мешков [16].

В этой модели лагранжиан кварков имеет вид [17]

$$\mathcal{L}_q = \left\{ \sum_{\alpha} \left( \frac{i}{2} \bar{q}^{\alpha} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} q_{\alpha} - \frac{i}{2} \partial_{\mu} \bar{q}^{\alpha} \gamma^{\mu} q_{\alpha} - m_{\alpha} \bar{q}^{\alpha} q_{\alpha} \right) - B \right\} \theta_{\Omega}(x) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \bar{q}^{\alpha} q_{\alpha} \delta_S(x), \quad (5.3.1)$$

где суммирование происходит по сортам кварков, входящих в адрон. Здесь  $\theta_{\Omega}(x)$  — объемная  $\theta$ -функция, равная 1 внутри мешка, т. е. внутри некоторой пространственно-временной области  $\Omega$ , и равная нулю вне этой области; для сферического покоящегося (статического) мешка  $\theta_{\Omega}(x) = \theta(R - r)$ , где  $R$  — радиус мешка ( $x^0$  — произвольно). Величина  $B$  по самому смыслу определения лагранжиана через гамильтониан (см. (1.3.26)) представляет собой плотность энергии вакуума внутри мешка (т. е. внутри адрона); наконец,  $\delta_S(x)$  представляет собой поверхностную  $\delta$ -функцию, определяемую следующим образом: если  $n_{\mu}$  — единичный пространственноподобный 4-вектор нормали к пространственно-временной области  $\Omega$  и  $\delta x_{\mu}$  — бесконечно малый вектор смещения поверхности  $S$  этой области, то вариация функции  $\theta_{\Omega}$  и определяет поверхностную  $\delta$ -функцию:

$$\delta \theta_{\Omega}(x) = n^{\mu} \delta x_{\mu} \delta_S(x), \quad \delta_S(x) = -n^{\mu} \partial_{\mu} \theta_{\Omega}(x). \quad (5.3.2)$$

Уравнения движения кваркового поля внутри мешка и граничные условия на поверхности для этого поля можно получить, вычисляя вариацию действия, т. е. варьируя действие по  $\bar{q}$ ,  $q$  получаем уравнения движения кваркового поля (приравнявая нулю члены при  $\delta q \theta_{\Omega}$ )

$$(i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m_{\alpha}) q_{\alpha} = 0, \quad (5.3.3)$$

$$(i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m_{\alpha}) \bar{q}^{\alpha} = 0, \quad x \in \Omega$$



и линейное граничное условие (приравнивая нулю члены при  $\delta q \delta_s$ )

$$\begin{aligned} in_\mu \gamma^\mu q_\alpha(x) &= q_\alpha(x), \\ -in_\mu \tilde{\gamma}^\mu \bar{q}^\alpha(x) &= \bar{q}^\alpha(x), \quad x \in S. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Мы учли при этом, что  $\partial_\mu \theta_\Omega(x) = n_\mu \delta_s(x)$ . Варьируя поверхность, получаем квадратичное граничное условие

$$B = \frac{1}{2} n^\mu \partial_\mu \sum_\alpha \bar{q}^\alpha q_\alpha, \quad x \in S. \quad (5.3.5)$$

При варьировании поверхности мы учли формулу (5.3.2), определяющую вариацию функции  $\theta_\Omega$ , и формулу

$$\delta \delta_s(x) = n^\nu \delta x_\nu n^\mu \partial_\mu \delta_s(x),$$

определяющую вариацию функции  $\delta_s(x)$ . Кроме того, мы учли, что в силу (5.3.4)

$$\bar{q}^\alpha q_\beta = 0, \quad x \in S. \quad (5.3.6)$$

Граничное условие (5.3.5) получается приравниванием нулю коэффициента при  $n^\nu \delta x_\nu \delta_s(x)$ .

Заметим, что граничные условия (5.3.4), (5.3.5) впервые были получены в [18] при нахождении полей  $q$  внутри пространственной области  $V$  и полей  $Q$  вне области  $V$ , действие которых определяется формулой

$$\begin{aligned} W = \int d^4x \left\{ \left( \frac{i}{2} \bar{q} \gamma^\mu \partial_\mu q - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{q} \gamma^\mu q - m \bar{q} q - B \right) \theta_V(x) + \right. \\ \left. + \left( \frac{i}{2} \bar{Q} \gamma^\mu \partial_\mu Q - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{Q} \gamma^\mu Q - M \bar{Q} Q \right) \theta_V^c(x) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\theta_V^c = 1 - \theta_V$ . При этом требовалось, чтобы в пределе  $M \rightarrow \infty$  поле оставалось только внутри области  $V$ .

Аналогично кваркам можно рассмотреть и глюоны. При этом лагранжиан глюонов имеет вид

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \theta_\Omega, \quad \mathcal{L}_g^B = \mathcal{L}_g - B \theta_\Omega. \quad (5.3.7)$$

Уравнения движения и линейное граничное условие могут быть получены вариацией действия  $L_g^B$  по полю  $A_\mu^a$ . Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{a\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu F^{a\mu\nu} \equiv \partial_\mu F^{a\mu\nu} + g f^{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu}, \quad x \in \Omega, \\ n_\mu F^{a\mu\nu} = 0, \quad x \in S. \end{aligned}$$

Варьируя границу, получаем квадратичное граничное условие

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = B, \quad x \in S.$$

В общем случае, когда имеются кварки и глюоны, лагранжиан модели мешков с учетом кварк-глюонного взаимодействия можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}', \quad (5.3.8)$$

где

$$\mathcal{L}' = g \sum_\alpha \bar{q}^\alpha \gamma^\mu \frac{1}{2} \lambda^a q_\alpha A_\mu^a \theta_\Omega(x).$$

Этому лагранжиану соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{a\mu\nu} = g \sum_\alpha \bar{q}^\alpha \gamma^\nu \frac{1}{2} \lambda^a q_\alpha + g f^{abc} F^{b\nu\mu} A_\mu^c \equiv g l^{b\nu} \equiv j^{a\nu}, \\ \left\{ i \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i g \frac{1}{2} \lambda^a A_\mu^a \right) - m_\alpha \right\} q_\alpha = 0, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

для глюонного и кварковых полей внутри области  $\Omega$ . Кроме того, возникают линейные и квадратичные граничные условия на поверхности

$$n^\mu F_{\mu\nu}^a(x) = 0,$$

$$in_\alpha \gamma^\mu q_\mu = q_\alpha, \quad -in_\mu \tilde{\gamma}^\mu \bar{q}^\beta = \bar{q}^\beta, \quad (5.3.10)$$

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - B + \frac{1}{2} n^\mu \partial_\mu \sum_\alpha \bar{q}^\alpha q_\alpha = 0, \quad x \in S$$

(цветовой индекс кваркового поля  $i$  явно не выписывается). В силу линейных граничных условий для полей  $q, \bar{q}$  имеет место соотношение  $\bar{q}^\alpha q_\beta|_S = 0$ . Поэтому из определения тока  $j_\nu^a$  и граничного условия для глюонов  $n^\mu F_{\mu\nu}^a(x)|_S = 0$  следует, что

$$n_\mu j^{a\mu}(x)|_S = 0. \quad (5.3.11)$$

Это условие гарантирует обращение в нуль нормальной составляющей кваркового цветового тока на поверхности мешка. Обращение в нуль величины  $n_\mu j^{a\mu}$  на поверхности  $S$ , гарантирующее невылетание кварков, связано с линейным граничным условием для кваркового поля. Последнее возникает из-за наличия в лагранжиане кваркового поля слагаемого, содержащего поверхностную  $\delta$ -функцию. Обратим внимание на то, что линейное граничное условие (5.3.10) является более сильным, чем условие  $\bar{q}^\alpha q_\beta|_S = 0$ .

Используя граничные условия, можно показать, что не существует мешков с ненулевым цветовым зарядом. Действительно, цветовой заряд статического мешка определяется

формулой

$$Q^a = \int_V d^3x j^{a0}(x),$$

где, согласно (5.3.9),  $j^{a0} = \partial_i F^{a i 0}$  (суммирование происходит по пространственным индексам  $i = 1, 2, 3$ ;  $V$  — пространственная область мешка). Поэтому

$$Q^a = \int_S dS n_i F^{a i 0}(x).$$

Поскольку на поверхности статического мешка  $n_i F^{a i 0} = n_\mu F^{a \mu 0} = 0$  (в силу линейного граничного условия для глюонов), то  $Q^a = 0$  и, следовательно, состояние мешка является синглетным по цветовой группе.

**5.3.3. Волновая функция кварка в мешке.** Определим волновую функцию кварков, пренебрегая взаимодействием кварков с глюонами ( $g = 0$ ). Считая границу мешка сферической поверхностью радиуса  $R$ , запишем граничные условия для кваркового поля в виде

$$-i \frac{r}{r} \gamma q_\alpha(x) = q_\alpha(x), \quad 2B = -\frac{\partial}{\partial r} \sum_\alpha \bar{q}^\alpha(x) q_\alpha(x),$$

$$r = |x| = R,$$

где  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты точки  $x$  (мы учли, что  $n_\mu = \left(0, -\frac{r}{r}\right)$ ). Общее решение уравнения Дирака для безмассовой частицы (массу кварка мы предполагаем, для простоты равной нулю) можно записать в виде

$$q_\alpha(x) = \sum_{nkjm} a_\alpha(nkjm) \psi_{nkjm}(x), \quad (5.3.12)$$

где  $j, m$  — угловой момент и его проекция; индекс  $k = \pm \left(j + \frac{1}{2}\right)$  нумерует состояния, отличающиеся пространственной четностью, а индекс  $n$  — частоты, которые находятся из линейного граничного условия. В случае статической границы квадратичное граничное условие разрешает только решение  $j = \frac{1}{2}$  (левая часть квадратичного граничного условия не должна зависеть от углов  $\theta, \varphi$ ). Поэтому формулу (5.3.12) можно записать в виде

$$q_\alpha(x) = \sum_{nkm=\pm\frac{1}{2}} a_\alpha(nkm) \psi_{nkm}(x), \quad (5.3.12')$$

где функции  $\psi_{nkm}(x) \equiv \psi_{nk\frac{1}{2}m}(x)$  определяются, как известно, формулами (см. [19])

$$\psi_{n,-1,m}(x) = \frac{A_{n,-1}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_0 \left(\omega_{n,-1} \frac{r}{R}\right) U_m \\ -j_1 \left(\omega_{n,-1} \frac{r}{R}\right) \sigma \frac{r}{R} U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,-1} \frac{t}{R}}, \quad (5.3.13)$$

$$\psi_{n,1,m}(x) = \frac{A_{n,1}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_1 \left(\omega_{n,1} \frac{r}{R}\right) \sigma \frac{r}{R} U_m \\ j_0 \left(\omega_{n,1} \frac{r}{R}\right) U_m \end{pmatrix} e^{-i\omega_{n,1} \frac{t}{R}}.$$

Здесь  $U_m$  — двухкомпонентный паулевский спинор;  $j_l(z)$  — сферическая функция Бесселя. Нормировочные постоянные  $A_{n,k}$ ,  $k = \pm 1$  определяются из условия  $\int_V d^3x |\psi_{nkm}(x)|^2 = 1$ ,

$$A_{n,k}^2 = \frac{\omega_{nk}^3}{2R^3 (\omega_{nk} + k) \sin^2 \omega_{nk}}. \quad (5.3.14)$$

Спектр частот  $\omega_{nk}$ , как было указано выше, определяется из линейного граничного условия, которое принимает вид [20]

$$j_0(\omega_{nk}) = -k j_1(\omega_{nk})$$

или

$$\operatorname{tg} \omega_{nk} = \frac{\omega_{nk}}{\omega_{nk} + k}. \quad (5.3.15)$$

Выпишем первые несколько решений этого уравнения при  $n = 1, 2, \dots$

$$\omega_{1,-1} = 2,04\dots, \quad \omega_{2,-1} = 5,4\dots,$$

$$\omega_{1,1} = 3,81\dots, \quad \omega_{2,1} = 7, \dots$$

( $\omega_{nk}$  при  $n < 0$  определяется формулой  $\omega_{-n,-k} = -\omega_{nk}$ ).

Квадратичное граничное условие определяет радиус адрона. Прежде чем переходить к анализу этого условия заметим, что мы рассматривали только классическую теорию. При переходе к квантовой теории поля  $q(x)$  мы должны рассматривать как оператор, удовлетворяющий уравнению Дирака и граничному линейному условию. Под квадратичным граничным условием в квантовой теории мы будем понимать соотношение

$$2B = n^\mu \partial_\mu \sum_\alpha \langle \bar{q}^\alpha q_\alpha \rangle,$$

где усреднение  $\langle \dots \rangle$  производится по состоянию адронной системы.

В разложении (5.3.12) величины  $a_\alpha(nkjm)$  должны трактоваться как операторы рождения и уничтожения кварков в состоянии  $nkjm$ . Именно, операторы

$$a_\alpha(nkjm) \equiv b_\alpha(nkm), \quad \omega_{nk} > 0 \quad (n > 0)$$

должны трактоваться как операторы уничтожения кварков в состоянии  $\alpha, n, k, m$  ( $\omega_{nk} > 0$ ), а операторы

$$a_\alpha(nkjm) \equiv d_\alpha^+(nkm), \quad \omega_{nk} < 0 \quad (n < 0)$$

должны трактоваться, как операторы рождения антикварков в состоянии  $\alpha, n, k, m$  ( $\omega_{nk} < 0$ ). При этом квадратичное граничное условие принимает вид [20]

$$4\pi BR^4 = \sum_{\substack{\alpha n k m \\ (k > 0)}} \{ \omega_{kn} \langle b_\alpha^+ b_\alpha \rangle - \omega_{-n, -k} \langle d_\alpha^+ d_\alpha \rangle \} \quad (5.3.16)$$

( $\omega_{-n, -k} = \omega_{n, k}$ ). К этой формуле можно прийти и иначе. Энергия поля кварков, запертых в мешке, и энергия вакуума мешка определяются интегралом по объему мешка от плотности энергии  $\varepsilon = T_{00}(x)$ , где  $T_{\mu\nu}(x)$  — тензор энергии-импульса. В силу выбранной нами нормировки

$$E = \int_V d^3x T_{00}(x) = \sum_{\substack{\alpha n k m \\ (k > 0)}} \left\{ \frac{\omega_{nk}}{R} \langle b_\alpha^+ b_\alpha \rangle - \frac{\omega_{-n, -k}}{R} \langle d_\alpha^+ d_\alpha \rangle \right\} + \\ + \frac{4}{3} \pi R^3 B.$$

Заметим, что энергия поля кварков уменьшается с ростом  $R$ , поэтому кварки сами по себе не могут оставаться внутри адрона. В теории мешков вводится положительная плотность энергии вакуума внутри адрона  $B$ , так что полная энергия адрона определяется формулой

$$E(R) = E_f + \frac{4}{3} \pi R^3 B, \quad E_f = \frac{1}{R} \sum_{\alpha} n_\alpha \omega_\alpha \quad (5.3.17)$$

( $n_\alpha$  — число кварков в состоянии  $\alpha$ ). Условие равновесия  $\partial E / \partial R = 0$  определяет положение минимума системы, т. е. радиус адрона в модели мешков, и приводит к условию (5.3.16).

**5.3.4. Структура нестранных барионов.** Рассмотрим подробнее структуру легких нестранных барионов в модели мешков, которые строятся только из легких  $u$ -,  $d$ -кварков, массами которых можно пренебречь [20]. Цветовая волновая функция бариона должна быть синглетом, т. е. трехкварковая цветовая волновая функция бариона должна быть полностью антисимметрична по цветовым индексам. Поэтому волновая функция

бариона в соответствии с принципом Паули должна быть симметричной по спиновым, сортовым и пространственным переменным.

Радиус бариона, согласно сказанному выше, определяется из условия  $\partial E(R) / \partial R = 0$  и равен

$$R = \left( \frac{\sum_{\alpha} n_\alpha \omega_\alpha}{4\pi B} \right)^{1/4}. \quad (5.3.18)$$

Подставляя это значение для  $R$  в (5.3.17), получаем массу бариона

$$M = \frac{4}{3} (4\pi B)^{1/4} \left( \sum_{\alpha} n_\alpha \omega_\alpha \right)^{3/4}.$$

При  $j = 1/2$  возможны только следующие состояния:

$$1s_{1/2} (\omega_{1,-1} = 2,04), \quad 1P_{1/2} (\omega_{1,1} = 3,84), \quad 2s_{1/2} (\omega_{2,-1} = 5,4).$$

Распределяя  $u$ - и  $d$ -кварки по этим состояниям, полностью симметричным способом получаем спектр нестранных барионов:

ГэВ 2	$N \left( \frac{1^-}{2} \right) \quad - \quad 3 \left( 1p \frac{1}{2} \right) \quad - \quad \Delta \left( \frac{3^-}{2} \right)$
1,8	$N \left( \frac{1^-}{2} \right), N \left( \frac{3^-}{2} \right) \quad - \quad \left( 1s \frac{1}{2} \right), \left( 2s \frac{1}{2} \right), \left( 1p \frac{1}{2} \right) \quad - \quad \Delta \left( \frac{1^-}{2} \right), \Delta \left( \frac{3^-}{2} \right)$
1,6	$N \left( \frac{1^+}{2} \right), N \left( \frac{3^+}{2} \right) \quad - \quad \left( 1s \frac{1}{2} \right), 2 \left( 1p \frac{1}{2} \right) \quad - \quad \Delta \left( \frac{1^+}{2} \right), \Delta \left( \frac{3^+}{2} \right)$
1,4	$N \left( \frac{1^+}{2} \right), N \left( \frac{3^+}{2} \right) \quad - \quad \left( 2s \frac{1}{2} \right), 2 \left( 1s \frac{1}{2} \right) \quad - \quad \Delta \left( \frac{1^+}{2} \right), \Delta \left( \frac{3^+}{2} \right)$
1,2	$N \left( \frac{1^-}{2} \right), N \left( \frac{3^-}{2} \right) \quad - \quad 2 \left( 1s \frac{1}{2} \right), \left( 1p \frac{1}{2} \right) \quad - \quad \Delta \left( \frac{1^-}{2} \right), \Delta \left( \frac{3^-}{2} \right)$
1,2	$N \left( \frac{1^+}{2} \right) \quad - \quad 3 \left( 1s \frac{1}{2} \right) \quad - \quad \Delta \left( \frac{3^+}{2} \right)$

Заметим, что без учета кварк-глюонного взаимодействия спектр барионов вырожден по спину и изоспину. Поэтому спектр нуклонов (включая нуклонные резонансы) совпадает со спектром  $\Delta$ -резонансов.

Наинизшее состояние  $3(1s_{1/2})$  идентифицируется с  $N(938)$  и  $\Delta(1236)$ . Параметр  $B$  определяется из согласования средней массы  $N$  —  $\Delta$  системы с ее экспериментальным значением. Отсюда находится параметр  $B$ ,  $B^{1/4} = 120$  МэВ.

Аналогичным образом может быть исследован спектр масс мезонов. В частности, отношение массы самого легкого бариона

к массе самого легкого мезона в рассматриваемой модели мешков, согласно (5.3.19), составляет  $\left(\frac{3}{2}\right)^{3/4}$ . Эта величина хорошо описывает отношение массы нуклона к массе самых легких векторных ( $\rho$ ,  $\omega$ ) мезонов. Однако она не согласуется с отношением массы нуклона к массе самого легкого псевдоскалярного ( $\pi$ ) мезона. Это значит, что  $\pi$ -мезон не описывается рассматриваемой простой моделью мешка.

Вычислим еще в модели мешков магнитный момент бариона. Оператор магнитного момента кваркового поля определяется формулой (см. [21])

$$\mu = \frac{1}{2} \int d^3x \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \mathbf{r} \times q^{\alpha} \boldsymbol{\gamma} q_{\alpha},$$

где  $Q_{\alpha}$  — заряд кварка сорта  $\alpha$ . Подставляя в эту формулу выражение (5.3.12) для кваркового поля и усредняя полученное выражение по адронному состоянию, получаем [20]

$$\mu = \frac{R}{12} \sum_{nkm} f(\omega_{nk}) U_m^* \boldsymbol{\sigma} U_m \sum_{\alpha} Q_{\alpha} (\langle b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha} \rangle + \langle d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha} \rangle),$$

где

$$f(\omega_{nk}) = \frac{4\omega_{nk} + 3k}{(\omega_{nk} + k)\omega_{nk}}.$$

Отсюда для протона получаем  $\mu_p = \frac{R}{12} \frac{4\omega_{1,-1} - 3}{(\omega_{1,-1} - 1)\omega_{1,-1}} = 1,4 \text{ Gev}^{-1}$ . Это приводит к гиромангнитному отношению  $g_p = 2m_p \mu_p = 2,6$ , что близко к экспериментальному значению 2,79. Для магнитного момента нейтрона получается известный результат  $g_n = -\frac{2}{3} g_p$ .

Полученные результаты относятся к простейшему случаю сферического мешка без учета кварк-глюонного взаимодействия. В более сложных моделях, учитывающих кварк-глюонное взаимодействие и несферичность формы, а также наличие странных кварков, получается лучшее согласие эксперимента с теорией.

## § 5.4. Аннигиляция электронно-позитронной пары в адроны

**5.4.1. Полное сечение аннигиляции.** Свойство асимптотической свободы позволяет получить ряд важных физических выводов, касающихся взаимодействия быстрых лептонов с адронами. Именно, если импульс, переданный лептоном кварку велик, то кварк будет вести себя как квазисвободная частица, поэтому рассеяние лептона на адроне будет выглядеть как



Рис. 32.

рассеяние на системе почти свободных частиц. Такая же ситуация имеет место и при аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны, когда энергия  $e^+e^-$  пары достаточно велика. Оба эти процесса можно трактовать как взаимодействие виртуального фотона, обладающего большим 4-импульсом  $q$  с адронной системой. В процессе рассеяния этот импульс является пространственноподобным  $q^2 < 0$ . Действительно,  $q = p' - p$  ( $p'$  и  $p$  — конечный и начальный импульс лептонов), поэтому  $q^2 = 2m^2 - 2ee' + 2pp'$ . Эта величина, очевидно, меньше нуля. В процессах аннигиляции вектор  $q$  будет времениподобным,  $q^2 > 0$ , так как в системе центра инерции электрона и позитрона инвариантная величина  $q^2$  положительна ( $q = p_+ + p_-$ ,  $p_+ + p_- = 0$ , где  $p_-$  и  $p_+$  4-импульсы электрона и позитрона). Диаграммы, соответствующие этим процессам, изображены на рис. 32, где  $X$  служит для обозначения какого-либо адронного состояния.

Матрица рассеяния, описывающая эти процессы, определяется формулой (3.1.21)

$$S = T \exp \left( -i \int d^4x w_{int}(x) \right), \quad w_{int}(x) = - (j_{\mu}(x) + j_{\mu}^{\dagger}(x)) A^{\mu}(x), \quad (5.4.1)$$

где  $j_{\mu}(x)$ ,  $j_{\mu}^{\dagger}(x)$  — операторы электромагнитного тока кварков и лептонов;  $A_{\mu}(x)$  — 4-потенциал электромагнитного поля (при феноменологическом описании  $j_{\mu}(x)$  представляет собой адронный ток). Эти операторы берутся в представлении взаимодействия, которое соответствует «свободному» (по отношению к электромагнитному взаимодействию) гамильтониану

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} + \mathcal{H}_l + \mathcal{H}_\gamma, \quad (5.4.2)$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан кварков с учетом сильного взаимодействия;  $\mathcal{H}_l$  и  $\mathcal{H}_\gamma$  — гамильтонианы свободных лептонного и электромагнитного полей. Поэтому операторы  $j_{\mu}(x)$ ,  $A_{\mu}(x)$  совпадают с квантово-электродинамическими операторами тока и потенциала в представлении взаимодействия (см. раздел 1.5.1), а оператор  $j_{\mu}(x)$  является оператором электромагнит-

ного тока кварков в гейзенберговском представлении по отношению к гамильтониану  $\mathcal{H}$ .

Рассмотрим сперва процесс аннигиляции. Этот процесс мы будем изучать во втором порядке теории возмущений по заряду электрона. Матрица рассеяния второго порядка теории возмущений определяется формулой

$$S_2 = -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4x' T(A^\mu(x) A^\nu(x')) \cdot T(j_\mu(x) + j_\mu^i(x)) \times \\ \times (j_\nu(x') + j_\nu^i(x')). \quad (5.4.1')$$

Матричный элемент процесса аннигиляции, очевидно, имеет вид

$$(S_2)_{i \rightarrow f} = - \int d^4x d^4x' i \mathcal{D}^{\mu\nu}(x-x') \langle X | j_\mu(x) | 0 \rangle \times \\ \times \langle 0 | j_\nu^i(x') | p_+ p_- \rangle.$$

Здесь  $|X\rangle$  — вектор состояния конечных адронов;  $|p_+ p_- \rangle$  — вектор состояния начальной электронно-позитронной пары с 4-импульсами  $p_+$ ,  $p_-$  и  $|0\rangle$  — вектор состояния вакуума. Так как

$$j_\mu(x) = e^{i\mathcal{P}x} j_\mu(0) e^{-i\mathcal{P}x}, \quad j_\mu^i(x) = e^{i\mathcal{P}x} j_\mu^i(0) e^{-i\mathcal{P}x} \quad (5.4.3)$$

( $\mathcal{P}^\mu$  — оператор 4-импульса «свободных» полей), то

$$\langle X | j_\mu(x) | 0 \rangle = e^{i\mathcal{P}x} \langle X | j_\mu(0) | 0 \rangle, \quad \langle 0 | j_\nu^i(x') | p_+ p_- \rangle = \\ = e^{-i(p_+ + p_-)x'} \langle 0 | j_\nu^i(0) | p_+ p_- \rangle$$

( $\mathcal{P}_X$  — 4-импульс состояния  $|X\rangle$ ) и, следовательно,

$$(S_2)_{i \rightarrow f} = -\frac{(2\pi)^4}{iq^2} \delta(p_+ + p_- - \mathcal{P}_X) g^{\mu\nu} \langle X | j_\nu(0) | 0 \rangle \times \\ \times \langle 0 | j_\mu^i(0) | p_+ p_- \rangle,$$

где  $q = p_+ + p_-$  — 4-импульс электронно-позитронной пары. Нас будет интересовать вероятность аннигиляции в единицу времени  $w_{i \rightarrow f}$  в произвольное состояние  $|X\rangle$ , т. е. вероятность, просуммированная по всем адронным состояниям  $|X\rangle$ . Эта вероятность определяется формулой

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{1}{T} \sum_X |(S_2)_{i \rightarrow f}|^2.$$

Заменяя  $\delta(0)$  на  $VT/(2\pi)^4$ , получаем

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{(2\pi)^4}{q^4} \frac{1}{V\epsilon_+ \epsilon_-} \mathcal{L}^{\mu\nu} \sum_X \delta(q - \mathcal{P}_X) \langle 0 | j_\nu(0) | X \rangle \times \\ \times \langle X | j_\mu(0) | 0 \rangle, \quad (5.4.4)$$

где

$$\mathcal{L}_{\nu\lambda} = \frac{V^2 \epsilon_+ \epsilon_-}{4} \sum_{\mu, \mu'} \langle 0 | j_\nu^i(0) | p_+ p_- \rangle \langle p_+ p_- | j_\lambda^i(0) | 0 \rangle \quad (5.4.5)$$

( $p_{0\pm} = \epsilon_\pm$ , при этом произведено усреднение по поляризациям электрона и позитрона). Используя формулы (3.2.7) и (3.2.6), величину  $\mathcal{L}_{\nu\lambda}$  можно представить в виде

$$\mathcal{L}_{\nu\lambda} = \frac{e^2}{4} \left\{ p_{-\nu} p_{+\lambda} + p_{-\lambda} p_{+\nu} - \frac{1}{2} g_{\nu\lambda} q^2 \right\}. \quad (5.4.6)$$

Вводя плотность потока электронов

$$j = \frac{1}{V} \frac{1}{\epsilon_+ \epsilon_-} \sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4} = \frac{1}{2V\epsilon_+ \epsilon_-} \sqrt{q^2 (q^2 - 4m^2)},$$

получаем следующее выражение для сечения аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны  $\sigma = j^{-1} w_{i \rightarrow f}$ :

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{q^4} \frac{1}{\sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4}} \sum_X \delta(q - \mathcal{P}_X) \langle 0 | j_\nu(0) | X \rangle \times \\ \times \langle X | j_\mu(0) | 0 \rangle \mathcal{L}^{\mu\nu}$$

или, используя формулы (5.4.3), получаем

$$\sigma = \frac{1}{q^4 \sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4}} \mathcal{L}^{\mu\nu} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | j_\nu(x) j_\mu(0) | 0 \rangle.$$

Так как  $q_0 > 0$ , то

$$\frac{1}{(2\pi^4)} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | j_\mu(0) j_\nu(x) | 0 \rangle \equiv \sum_X \delta(q + \mathcal{P}_X) \langle 0 | j_\mu | X \rangle \times \\ \times \langle X | j_\nu | 0 \rangle = 0. \quad (5.4.6')$$

Поэтому

$$\sigma = \frac{1}{q^4 \sqrt{(p_+ p_-)^2 - m^4}} \mathcal{L}^{\mu\nu} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | [j_\nu(x), j_\mu(0)] | 0 \rangle. \quad (5.4.7)$$

Входящую сюда фурье-компоненту от вакуумного среднего коммутатора токов можно выразить через поляризационный оператор фотонов

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T^*(j_\nu(x) j_\mu(0)) | 0 \rangle. \quad (5.4.8)$$

Заметим, что эта формула вместе с уравнением Дайсона для функции Грина фотона аналогична формуле (3.2.18) в квантовой электродинамике, если ограничиться вторым приближением по  $e$ . Напомним, что  $T^*$  обозначает релятивистски инвариантное хронологическое произведение, введенное в разделе 5.2.3. Из градиентной инвариантности следует, что  $\Pi_{\mu\nu}(q) q^\nu =$

= 0 и, следовательно,

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \Pi(q), \quad \Pi = \frac{1}{3} \Pi_{\mu\nu}(q) g^{\mu\nu}.$$

Величину  $\Pi_{\mu\nu}$  можно представить, согласно (5.2.17), в виде

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) = & -i \int_{-\infty}^0 d^4x e^{iqx} \langle 0 | j_\mu(0) j_\nu(x) | 0 \rangle - \\ & -i \int_0^\infty d^4x e^{iqx} \langle 0 | j_\nu(x) j_\mu(0) | 0 \rangle + i \langle 0 | \rho_{\nu\mu} | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Согласно (5.2.21), (5.2.20),

$$i \langle 0 | \rho_{\nu\mu} | 0 \rangle = i g_{\nu k} g_{\mu l} \langle 0 | G^{0k;l} | 0 \rangle. \quad (5.4.9)$$

Поэтому в силу антиэрмитовости оператора  $G^{0k;l}$  (см. (5.2.2)) величина  $i \langle 0 | \rho_{\nu\mu} | 0 \rangle$  вещественна. Следовательно, замечая, что  $q_0 > 0$ , имеем

$$\text{Im} \Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{2} \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | [j_\nu(x), j_\mu(0)] | 0 \rangle \quad (5.4.10)$$

(мы при этом учли, что  $\langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle = \langle 0 | j_\mu(0) \times j_\nu \times (-x) | 0 \rangle$  и воспользовались (5.4.6')). Таким образом, полное сечение аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны может быть представлено в виде [13], [22]

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow h) = \frac{e^2}{q^4} \text{Im} \Pi(q) \quad (5.4.11)$$

(мы пренебрегли при этом массой электрона по сравнению с  $q^2$ ,  $-q^2 \gg m^2$ ).

**5.4.2. Связь между полным сечением  $e^+e^-$  аннигиляции и швингеровскими членами в коммутаторе кварковых токов.** Вакуумное среднее швингеровского члена  $G^{0k;l}$ , входящего в вакуумное среднее коммутатора кварковых токов, связано с вакуумным средним  $\langle 0 | \rho_{\nu\mu} | 0 \rangle$  оператора, входящего в определение релятивистски ковариантного хронологического произведения кварковых токов формулой (5.4.9). Мы покажем, что величина  $\langle 0 | G^{0k;l} | 0 \rangle$  связана с полным сечением  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны  $\sigma(e^+e^- \rightarrow h) = \sigma(s)$ , где  $s = -q^2$ , соотношением

$$\langle 0 | G^{0i;k} | 0 \rangle = \frac{i g_{ik}}{\pi e^2} \int_0^\infty dq^2 q^2 \sigma(q^2). \quad (5.4.12)$$

Воспользуемся с этой целью представлением Челлана — Леммана для вакуумного среднего коммутатора токов

$$\begin{aligned} \langle 0 | [j_\mu(x), j_\nu(y)] | 0 \rangle = & i \int_0^\infty dm^2 m^2 \rho(m^2) \left( g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) \times \\ & \times \Delta(x-y, m^2), \end{aligned} \quad (5.4.13)$$

где функция  $\Delta(x, m^2)$  определяется формулой (2.1.12')

$$\Delta(x, m^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \text{Sgn} k_0 e^{-ikx} \quad (5.4.14)$$

и  $\rho(m^2)$  — некоторая положительно определенная функция  $m^2$ , определяемая формулой

$$k^2 \rho(k^2) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi(k) \quad (5.4.15)$$

(доказательство этого соотношения аналогично доказательству соотношений Челлэне — Леммана для  $T$ -произведений полевых операторов (см. раздел 3.2.5 и будет дано ниже).

Полагая в формуле (5.4.13)  $\mu = 0$ ,  $\nu = i$ , получаем

$$\langle 0 | [j_0(x), j_i(y)] | 0 \rangle_{x_0=y_0} = i \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x_i} \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2),$$

где мы учли, что  $\frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(x, m^2) |_{x_0=0} = \delta(x)$ . С другой стороны, как мы видели в разделе,

$$\langle 0 | [j_0(x), j_i(y)] | 0 \rangle_{x_0=y_0} = -\frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x_i} e^2 \langle 0 | G^{0i;k} | 0 \rangle$$

(для электромагнитных токов  $f^{abc} = 0$ ). Поэтому

$$\langle 0 | G^{0i;k} | 0 \rangle = i g_{ik} \frac{4}{e^2} \int_0^\infty dm^2 \rho(m^2)$$

и, следовательно, согласно (5.4.11), (5.4.15), мы и получаем соотношение (5.4.12) (интегрирование в этой формуле фактически производится от  $4m_\pi^2$ ,  $m_\pi$  — масса  $\pi$ -мезона; так как  $m_\pi \gg m_e$ , то при интегрировании мы находимся в области применимости формулы (5.4.11)).

Докажем теперь (5.4.13). Согласно (5.4.3), имеем

$$\langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = \sum_n e^{-ip_n(x-y)} \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j_\nu(0) | 0 \rangle$$

( $p_n$  — 4-импульс состояния  $|n\rangle$ ) или

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = & \int_0^\infty dm^2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2) \times \\ & \times e^{-ik(x-y)} \rho_{\mu\nu}(k), \end{aligned}$$

где

$$\rho_{\mu\nu}(k) = (2\pi)^3 \sum_n \delta(p_n - k) \langle 0 | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j_\nu(0) | 0 \rangle. \quad (5.4.15')$$

Мы учли при этом, что

$$\int_{(p_{n0} > 0)} d^4k \delta(p_n - k) \theta(k_0) = 1, \quad \int_0^\infty dm^2 \delta(k^2 - m^2) = 1.$$

Величину  $\rho_{\mu\nu}(k)$  можно представить в виде

$$\rho_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{ikx} \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle.$$

Отсюда, в силу закона сохранения тока  $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$ , следует, что

$$k^\mu \rho_{\mu\nu}(k) = 0.$$

Поэтому в силу релятивистской инвариантности

$$\rho_{\mu\nu}(k) = -k^2 \rho(k^2) \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

и, следовательно,

$$\langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle = i \int_0^\infty dm^2 m^2 \rho(m^2) \left( g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) \times \\ \times \Delta^+(x - y, m^2),$$

где

$$\Delta^\pm(x, m^2) = \frac{\pm i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ik(x-y)} \theta(\pm k_0) \delta(k^2 - m^2)$$

(см. (5.4.14)). Для вакуумного среднего коммутатора токов получим отсюда

$$\langle 0 | [j_\mu(x), j_\nu(y)] | 0 \rangle = i \int_0^\infty dm^2 m^2 \rho(m^2) \left( g_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) \times \\ \times \Delta(x, m^2),$$

где

$$\Delta(x, m^2) = \Delta^+(x, m^2) + \Delta^-(x, m^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{-ikx} \text{Sgn } k_0 \times \\ \times \delta(k^2 - m^2)$$

(см. (5.4.14)). Сравнение формул (5.4.13), (5.4.10) приводит к соотношению

$$k^2 \rho(k^2) = \frac{1}{\pi} \text{Im } \Pi(k).$$

Заметим, что из формулы (5.4.15') следует положительность величины  $\rho(k^2)$ ,  $\rho(k^2) > 0$ . Таким образом мы и получили соотношения (5.4.13), (5.4.15).

5.4.3. Сечение аннигиляции в области больших импульсов электронно-позитронной пары. Согласно (5.4.11), сечение аннигиляции определяется вкладом кварков в поляризационный оператор фотонов  $\Pi$ . Этот оператор связан с поперечной частью фотонной функции Грина  $G_t$  формулой (3.2.28)

$$G_t^{-1} = \mathcal{D}^{c-1} - \Pi(q), \quad \mathcal{D}^c(q) = -\frac{1}{q^2}. \quad (5.4.16)$$

Неперенормированная функция  $G_t$  связана с перенормированной функцией  $\underline{G}_t$  соотношением

$$\underline{G}_t = Z^{-1} G_t, \quad (5.4.17)$$

где  $Z$  — константа перенормировки электрического заряда. В эту константу вносит вклад как электромагнитное, так и сильное взаимодействие кварков и лептонов (она совпадает с константой перенормировки заряда, введенной в разделе 3.3.5, если не учитывать вклада кваркового поля). Соотношение (5.4.17) является определением перенормировочной константы  $Z$ , если считать, что  $\underline{G}$  ведет себя при  $q^2 \approx -\mu^2$  как  $\mathcal{D}^c(q)$  (в квантовой электродинамике мы считали, что  $\mu^2 = 0$ , см. § 3.3).

Легко видеть, что электрический заряд всех частиц перенормируется одинаково. Действительно, перенормированный заряд  $e$  связан с неперенормированным зарядом  $e$  соотношением (см. (3.3.59))

$$\underline{e}^2 = Z_2^{-1} Z_1 Z e^2,$$

где константа  $Z$  одна и та же для всех электрически заряженных частиц (так как она связана с перенормировкой электромагнитного поля), а константы  $Z_1$  и  $Z_2$  зависят от сорта частиц (электрон, кварк и т. д.). Но в силу калибровочной инвариантности  $Z_1 = Z_2$  (тождество Уорда, см. § 3.2). Поэтому  $\underline{e}^2 = Z e^2$  и, следовательно, отношение зарядов  $\underline{e}^2/e^2$  будет одинаковым для всех частиц. При равенстве затравочных зарядов частиц будут одинаковы и их физические заряды. В пренебрежении электромагнитным взаимодействием константа перенормировки  $Z$  обращается в единицу и, следовательно, одно только сильное взаимодействие не перенормирует электрический заряд,  $\underline{e}^2 = e^2$  [10].

Нас будет интересовать сечение аннигиляции в главном приближении по заряду  $\underline{e}^2$ . Так как вклад лептонной пары в

полное сечение  $e^+e^-$  аннигиляции в приближении  $\underline{e}^2$  для полного поляризованного оператора  $\Pi$  входит аддитивно, то его просто выделить в конечном результате из полного поляризованного оператора и получить таким образом полное сечение  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны.

В рассматриваемом приближении формулу (5.4.11) можно переписать в виде

$$\sigma = -\frac{e^2}{q^4} \text{Im } \underline{G}_t^{-1}, \quad (5.4.18)$$

причем в окончательном результате должен быть выброшен вклад в  $\underline{G}_t^{-1}$ , вносимый лептонной парой.

Для нахождения асимптотики сечения аннигиляции электронно-позитронной пары при высоких энергиях воспользуемся методом ренормализационной группы [23]. Введем безразмерную функцию  $d \equiv q^2 G_t$ , являющуюся функцией безразмерных параметров  $q^2/\mathcal{M}^2$ ,  $e$ ,  $g$  ( $\mathcal{M}$  — импульс обрезания), а также перенормированную функцию  $\bar{d} = q^2 \bar{G}_t$ , являющуюся функцией безразмерных параметров  $\bar{q}^2/\mu^2$ ,  $\bar{e}$ ,  $\bar{g}$  ( $\mu$  — импульс нормировки; при  $q^2 = -\mu^2 < 0$  функции  $\underline{G}$  и  $\bar{G}$  совпадают), перепишем формулу (5.4.17) в виде

$$d^{-1} \left( \frac{q^2}{\mathcal{M}^2}, e, g \right) = Z^{-1} \left( \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}, e, g \right) \bar{d}^{-1} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{e}, \bar{g} \right), \quad (5.4.19)$$

где перенормированные константы связи  $\bar{e}$ ,  $\bar{g}$  связаны перенормированными константами связи  $e$ ,  $g$  соотношениями

$$\bar{e} = Z^{1/2} e, \quad \bar{g} = z_3^{3/2} z_1^{-1} g. \quad (5.4.20)$$

Так как  $d^{-1} \left( \frac{q^2}{\mathcal{M}^2}, e, g \right)$  не зависит от  $\mu$  при фиксированных «голых» константах связи  $e$ ,  $g$ , то, также как и в разделе 3.4.1, мы приходим к уравнению для  $\bar{d}^{-1}$

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(e, \bar{g}) \frac{\partial}{\partial \bar{e}} + \beta'(\bar{g}, e) \frac{\partial}{\partial \bar{g}} - \gamma(e, \bar{g}) \right\} \bar{d}^{-1} = 0,$$

где

$$\beta(e, \bar{g}) = \mu \frac{\partial e}{\partial \mu}, \quad \beta'(\bar{g}, e) = \mu \frac{\partial \bar{g}}{\partial \mu} \quad (5.4.21)$$

и  $\gamma$  — аномальная размерность функции  $\bar{d}^{-1}$ , определяемая формулой

$$\gamma(e, \bar{g}) = \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}. \quad (5.4.22)$$

Раскладывая безразмерную величину  $\bar{d}^{-1}$  по степеням  $\bar{e}^2$

$$\bar{d}^{-1} = 1 + f \left( \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}^2 \right), \quad (5.4.23)$$

где величина  $f \left( \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}^2 \right)$  пропорциональна  $\bar{e}^2$ , получаем

$$\left( -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta(\bar{g}) \frac{\partial}{\partial \bar{g}} \right) f \left( \lambda^2 \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}^2 \right) = \gamma^{(2)}(e, \bar{g}),$$

где  $\beta(\bar{g}) \equiv \beta'(\bar{g}, 0)$  — универсальная функция перенормированной константы связи  $\bar{g}$ , введенная в разделе 4.6.1;  $\gamma^{(2)}$  — аномальная размерность функции  $\bar{d}^{-1}$  в приближении  $\bar{e}^2$ . Используя обозначение  $t = \ln \lambda$ , перепишем последнее уравнение в виде

$$\left( -\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\bar{g}) \frac{\partial}{\partial \bar{g}} \right) f \left( e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g} \right) = \gamma^{(2)}(\bar{e}, \bar{g}). \quad (5.4.24)$$

Введем далее, как и в разделе 4.6.2, бегущую константу связи  $\bar{g}(t, \bar{g})$ , определяемую уравнением

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \beta(\bar{g}) \frac{\partial}{\partial \bar{g}} \right) \bar{g}(t, \bar{g}) = 0, \quad \bar{g}(0, \bar{g}) = \bar{g}. \quad (5.4.25)$$

Тогда уравнение (5.4.24) можно записать в виде (см. (5.4.25))

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f \left( e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}(-t, \bar{g}) \right) &\equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} - \beta(\bar{g}(-t)) \frac{\partial}{\partial \bar{g}(-t)} \right) \times \\ &\times f \left( e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}(-t) \right) = \gamma^{(2)}(\bar{g}(-t)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$f \left( e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}(-t, \bar{g}) \right) - f \left( \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g} \right) = - \int_0^{-t} d\tau \gamma^{(2)}(\bar{g}(\tau, \bar{g}))$$

или

$$f \left( e^{2t} \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g} \right) = f \left( \frac{q^2}{\mu^2}, \bar{g}(t, \bar{g}) \right) + \int_0^t d\tau \gamma^{(2)}(\bar{g}(\tau, \bar{g})).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f \left( \frac{k^2}{\mu^2}, \bar{g} \right) &= f(-1, \bar{g}(t, \bar{g})) + \int_0^t d\tau \gamma^{(2)}(\bar{g}(\tau, \bar{g})), \\ t &= \frac{1}{2} \ln \frac{-k^2}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

Так как величина  $e^{2t}$  положительна, то, строго говоря, этой формулой можно непосредственно пользоваться, если  $k^2 < 0$ .



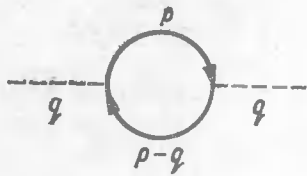


Рис. 33.

ших положительных  $k^2$

$$\text{Im} f\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right) = \frac{\pi}{2} \gamma^{(2)}\left(\bar{g}\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right)\right),$$

$$g\left(\frac{k^2}{\mu^2}, g\right) = g(t, g) \Big|_{t = \frac{1}{2} - \ln \frac{k^2}{\mu^2}}$$

(мы учли, что функция  $f(-1, \bar{g}(t, g))$  вещественна, так как она соответствует  $k^2 = -\mu^2 < 0$ ). Эта величина, согласно (5.4.18), определяет сечение процесса аннигиляции электронно-позитронной пары

$$\sigma = \frac{e^2}{q^2} \text{Im} f = \frac{\pi e^2}{2q^2} \text{Im} \gamma^{(2)}\left(\bar{g}\left(\frac{q^2}{\mu^2}, g\right)\right). \quad (5.4.27)$$

**5.4.4. Поляризационный оператор фотона с учетом сильного взаимодействия.** Перейдем к вычислению аномальной размерности функции  $G_I^{-1} q^{-2} \equiv d^{-1}$ . Для вычисления величины  $Z$ , определяющей аномальную размерность функции Грина фотона, необходимо найти поляризационный оператор фотона с учетом сильного взаимодействия кварков и глюонов в приближении  $e^2$ . В приближении  $e^2$  и  $e^2 g^2$  поляризационный оператор определяется диаграммами рис. 33, 34, 35. Величина  $Z$  в рассматриваемом приближении будет иметь следующую структуру:

$$Z = 1 + a e^2 + b e^2 + c e^2 g^2,$$

где коэффициент  $a$  определяется лептонной петлей,  $b$  — кварковой петлей и  $c$  — диаграммами рис. 34, 35. Эти величины зависят от импульса нормировки  $\mu$ . Поэтому аномальная размерность



Рис. 34.

функции Грина фотона будет определяться формулой

$$\gamma^{(2)} = e^2 \mu \frac{\partial a}{\partial \mu} + e^2 \mu \frac{\partial b}{\partial \mu} + e^2 g^2 \mu \frac{\partial c}{\partial \mu}.$$

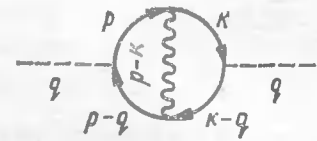


Рис. 35.

Так как мы рассматриваем полное сечение  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны, то должны опустить здесь первое слагаемое, соответствующее аннигиляции в лептоны. Поэтому полное сечение (5.4.18) аннигиляции в адроны будет определяться формулой (5.4.27), в которой

$$\gamma^{(2)} = e^2 \mu \frac{\partial b}{\partial \mu} + e^2 g^2 \mu \frac{\partial c}{\partial \mu}.$$

Диаграмме рис. 33 (приближение  $e^2 g^0$ ) соответствует следующий вклад в поляризационный оператор [14, 19]:

$$\Pi^{(1)} = -i e^2 \mu^{4-d} Q \frac{n}{3} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{sp} \gamma_\mu \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q})}{p^2 (p - q)^2}, \quad (5.4.28)$$

диаграмме рис. 34 (приближение  $e^2 g^2$ ) — вклад

$$\Pi^{(2)} = -e^2 g^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2 - 1}{3 \cdot 2} 2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{sp} \gamma_\mu \hat{p} \hat{\Sigma} \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q})}{(p^2)^2 (p - q)^2}, \quad (5.4.29)$$

$$\Sigma(p) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\rho (\hat{p} - \hat{k}) \gamma^\sigma}{k^2 (p - k)^2} \left( g_{\rho\sigma} - (1 - \xi) \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2} \right)$$

и, наконец, диаграмме рис. 35 (приближение  $e^2 g^2$ ) — вклад [24]

$$\begin{aligned} \Pi^{(3)} = & -e^2 g^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2 - 1}{3 \cdot 2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ & \times \left( g_{\rho\sigma} - (1 - \xi) \frac{(p - k)_\rho (p - k)_\sigma}{(p - k)^2} \right) \\ & \frac{\text{sp} \gamma_\mu \hat{k} \gamma^\rho \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q}) \gamma^\sigma (\hat{k} - \hat{q})}{r^2 k^2 (p - q)^2 (k - q)^2 (p - k)^2} \end{aligned} \quad (5.4.30)$$

( $e^2 Q^2 = \sum_\alpha e^2 Q_\alpha^2$ ,  $e Q_\alpha$  — электрический заряд кварка  $\alpha$  сорта).

Поляризационный оператор  $\Pi_{\mu\nu}$  связан с  $\Pi \equiv \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \dots$  соотношением

$$\Pi_{\mu\nu} = \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \Pi.$$

Эти формулы относятся к цветовой группе  $SU(n)$  ( $n = 3$ ).

Множитель  $n$  в формуле для  $\Pi^{(1)}$  возникает от суммирования по цветовой переменной кварка благодаря тому, что  $\text{Sp } 1 = n$ ; множитель  $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$  в выражении для  $\Pi^{(2)}$  и  $\Pi^{(3)}$  возникает из выражения  $\delta_{ab} \frac{1}{4} \text{Sp } \lambda^a \lambda^b = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$  (глюонному пропагатору соответствует множитель  $\delta_{ab}$ , а глюон-кварковым вершинам — матрицы  $\frac{1}{2} \lambda^a$  и  $\frac{1}{2} \lambda^b$ ,  $a, b = 1, 2, \dots, n^2 - 1$ ). В формулах (5.4.28), (5.4.29), (5.4.30) мы пренебрегаем массами кварков  $m$ , так как нас интересует обл с большими импульсов. При вычислении  $\Pi$  пользуемся методом размерной регуляризации, считая размерность пространства  $d = 4 - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) и устремляя в конечных формулах  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Так как нас интересует аномальная размерность функции  $G$ , которая определяется величиной  $Z$  (см. (5.4.22)), то необходимо знать в выражении для  $Z$  коэффициент при  $1/\varepsilon$  (величина  $1/\varepsilon$  связана с предельным импульсом  $\mathcal{M}$  и константой нормировки  $\mu$  соотношением (5.4.50)). При этом в соответствии с разделом 3.3.3 мы заменили величины  $e^2$  и  $g^2$  на  $e^2 \mu^{4-d}$  и  $g^2 \mu^{4-d}$ .

Приведем в заключение этого раздела интегралы, через которые выражаются величины  $\Pi^{(1)}$ ,  $\Pi^{(2)}$ ,  $\Pi^{(3)}$  (см. раздел 3.3.3 и [25—27])

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2)^\alpha (k-q)^{2\beta}} = (q^2)^{\frac{d}{2}-\alpha-\beta} \varphi_d(\alpha, \beta),$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta}} = q_\mu (q^2)^{\frac{d}{2}-\alpha-\beta} \frac{\frac{d}{2}-\alpha}{d-\alpha-\beta} \varphi_d(\alpha, \beta),$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta}} = (q^2)^{\frac{d}{2}-\alpha-\beta} \left( \frac{d}{2}-\alpha \right) \frac{\Gamma(d-\alpha-\beta)}{\Gamma(d+2-\alpha-\beta)} \times$$

$$\times \varphi_d(\alpha, \beta) \left\{ \frac{\frac{d}{2}-\beta}{\alpha+\beta-1-\frac{d}{2}} g_{\mu\nu} \frac{q^2}{2} + q_\mu q_\nu \left( \frac{d}{2}-\alpha+1 \right) \right\},$$

(5.4.31)

где

$$\varphi_d(\alpha, \beta) = i \left( -\frac{1}{4\pi} \right)^{d/2} \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B\left(\frac{d}{2}-\alpha, \frac{d}{2}-\beta\right).$$

(5.4.32)

Здесь  $B(\alpha, \beta)$  —  $B$ -функция Эйлера

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

(5.4.33)

Эти формулы легко могут быть получены с помощью формул (3.3.28), (3.3.29), (3.3.30) и тождества (см. (3.3.24))

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[(a-b)x+b]^{\alpha+\beta}},$$

(5.4.34)

позволяющего привести интегралы, содержащие произведение двух множителей в знаменателе, к интегралу, содержащему некоторую степень одного множителя в знаменателе. Последний из интегралов (5.4.31) удобно представить в виде

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{k^{2\alpha} (k-q)^{2\beta}} = \frac{1}{2} (q^2)^{d/2-\alpha-\beta} \frac{\varphi_d(\alpha-1-\beta)}{(\alpha-1)(n+1-\alpha-\beta)} \times$$

$$\times \left\{ g_{\mu\nu} q^2 \left( \frac{d}{2}-\beta \right) + q_\mu q_\nu (d+2-2\alpha) \left( \alpha+\beta-1-\frac{d}{2} \right) \right\},$$

(5.4.35)

если заметить, что

$$\varphi_d(\alpha+1, \beta) = \varphi_d(\alpha, \beta) \frac{\alpha+\beta-\frac{d}{2}}{\alpha} \frac{d-\alpha-\beta-1}{\frac{d}{2}-\alpha-1}.$$

(5.4.36)

При нахождении асимптотики этих интегралов при  $d \rightarrow 4$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) удобно пользоваться следующими формулами (см. (3.3.32)):

$$\Gamma(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon} - c, \quad \Gamma(1-\varepsilon) = 1 + \varepsilon c.$$

Отсюда следует, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\varphi_d(1, 1) = i \left( -\frac{1}{4\pi} \right)^{d/2} \frac{2}{\varepsilon} \left( 1 + \varepsilon \left( 1 - \frac{c}{2} \right) \right) + O(\varepsilon)$$

(5.4.37)

$$\varphi_d\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) = i \left( -\frac{1}{4\pi} \right)^{d/2} \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{3}{2} - \frac{c}{2} \right) \right) +$$

$$+ O(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varphi_d(1, 1) \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) + O(\varepsilon).$$

Кроме того, из рекуррентного соотношения (5.4.36) следует, что

$$\varphi_d\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right) = -\frac{\varepsilon}{8} \varphi_d(1, 1) + O(\varepsilon).$$

(5.4.38)

**5.4.5. Вычисление вкладов, вносимых в поляризационный оператор кварковыми и кварк-глюонными петлями.** Перейдем теперь к вычислению  $\Pi$ . Начнем с величины  $\Pi^{(1)}$ . В отличие от квантовой электродинамики в рассматриваемом случае масса фермиона (кварка) предполагается равной нулю и вычисления становятся особенно простыми. Учитывая, что  $\gamma_\rho \hat{p} \gamma^\rho = (2 -$

—  $d) \hat{p}$  и вычисляя шпур в формуле (5.4.28), имеем

$$\Pi^{(1)} = \frac{4i}{3} \underline{n} e^2 \mu^{4-d} Q^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d-2}{2} \frac{p^2 + (p-q)^2 - q^2}{p^2 (p-q)^2}.$$

В методе размерной регуляризации (см. (3.3.28))

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^{2\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5.4.39)$$

Поэтому, согласно (5.4.31),

$$\Pi^{(1)} = -\frac{4i}{3} \underline{n} e^2 \mu^{4-d} Q^2 (q^2)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi_d(1, 1). \quad (5.4.40)$$

Это выражение совпадает с (3.3.78) при  $m = 0$ , если воспользоваться формулой (5.4.32).

Перейдем к вычислению  $\Pi^{(2)}$ . Используя формулы (5.4.31), получаем

$$\Sigma(p) = \hat{p}(p^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \left(1 - \frac{d}{2}\right) \varphi_d(1, 1) \xi.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)} &= \frac{8}{3} \underline{e}^2 \underline{g}^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{2} \varphi_d(1, 1) \left(\frac{d}{2} - 1\right) \times \\ &\times \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{2\xi(pq - p^2)}{(p^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} (p-q)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, используя формулы (5.4.31), имеем

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)} &= \frac{8}{3} \underline{e}^2 \underline{g}^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{2} (q^2)^{1-\varepsilon} \varphi_d(1, 1) \times \\ &\times \varphi_d\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^3}{1 - \frac{3}{4}} \xi. \end{aligned} \quad (5.5.41)$$

Заметим, что в калибровке Ландау ( $\xi = 0$ ) величина  $\Sigma(p)$ , а следовательно, и величина  $\Pi^{(2)}$  обращаются в нуль.

Переходя к вычислению  $\Pi^{(3)}$  замечаем, что величина  $\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}$  не зависит от  $\xi$ . Действительно, часть величины  $\Pi^{(3)}$  пропорциональная  $1 - \xi$ , согласно (5.4.40), имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi^{(3)'} &= -\frac{2}{3} (1 - \xi) \underline{e}^2 \underline{g}^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \times \\ &\times \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q})}{k^2 (p-q)^2 (p-k)^4}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались при этом формулой (5.4.39). Замечая, что

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\rho}{k^2 (p-k)^2} = -p_\rho (p^2)^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi_d(1, 1),$$

имеем

$$\begin{aligned} \Pi^{(3)'} &= \frac{8}{3} (1 - \xi) \underline{e}^2 \underline{g}^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^3 \times \\ &\times (q^2)^{1-\varepsilon} \varphi_d(1, 1) \frac{\varphi_d\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right)}{1 - \frac{3}{4} \varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.4.42)$$

Отсюда и из (5.4.41) следует, что член, пропорциональный  $\xi$ , в величине  $\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}$  обращается в нуль.

Величина  $\Pi^{(3)'}$ , не зависящая от  $1 - \xi$ , равна, согласно (5.4.30),

$$\begin{aligned} \Pi^{(3)''} &= -\underline{e}^2 \underline{g}^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{6} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \times \\ &+ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\text{sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q}) \gamma^\rho (\hat{k} - \hat{q})}{p^2 k^2 (p-q)^2 (k-q)^2 (p-k)^2}. \end{aligned} \quad (5.4.43)$$

Используя соотношения (3.3.35)

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \hat{a} \hat{b} \hat{c} \gamma^\rho &= -2\hat{c} \hat{b} \hat{a} + \varepsilon \hat{a} \hat{b} \hat{c}, \quad \varepsilon = d-4, \\ \gamma_\rho \hat{a} \hat{b} \gamma^\rho &= 4ab - \varepsilon \hat{a} \hat{b}, \quad \gamma_\rho \hat{a} \gamma^\rho = (\varepsilon - 2) \hat{a}, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \text{sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q}) \gamma^\rho (\hat{k} - \hat{q}) &= 4 \{ \varepsilon (2 - \varepsilon) [(k, p)(p - q, \\ &k - q) + (k, k - q)(p, p - q)] + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 8)(k, p - q)(p, \\ &k - q) \}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$s_p = (p - q)^2, \quad s_k = (k - q)^2, \quad s_{pk} = (p - k)^2,$$

представляем этот шпур в виде

$$\begin{aligned} \text{sp } \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu \hat{p} \gamma^\mu (\hat{p} - \hat{q}) \gamma^\rho (\hat{k} - \hat{q}) &= 4\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (p^2 s_k + k^2 s_p) + \\ &+ 8 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) [q^2 (p^2 + k^2 + s_p + s_k - q^2) - s_{pk}^2] + 2(\varepsilon^2 + 2\varepsilon - \\ &- 8) q^2 s_{pk}^2 + (\sim p^2 s_p, k^2 s_k, p^2 s_{pk}, k^2 s_{pk}, s_p s_{pk}, s_k s_{pk}). \end{aligned} \quad (5.4.44)$$

Так как знаменатель в величине  $\Pi^{(3)''}$  имеет структуру  $\mathcal{D} \equiv p^2 k^2 s_p s_k s_{pk}$ , то интегралы, соответствующие подробно невы-

писанным членам  $p^2 s_p$ ,  $k^2 s_k$ ,  $p^2 s_{pk}$ ,  $k^2 s_{pk}$ ,  $s_p s_{pk}$ ,  $s_k s_{pk}$  в шпуре (5.4.44), в силу соотношения (5.4.39) обращаются в нуль.

Заметим, что интегралы

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2 p^2}{\mathcal{D}} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{s_p s_k}{\mathcal{D}} =$$

$$= (q^2)^{1-\varepsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d\left(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

как видно из асимптотических формул (5.4.37), конечны при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и, следовательно, не дают вклада в аномальную размерность фотонной функции Грина. Далее можно показать, что интеграл

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathcal{D}}$$

сходится при  $d \rightarrow 4$  и, следовательно, также не дает вклада в аномальную размерность фотонной функции Грина.

Оставшиеся интегралы определяются формулами

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p^2 s_k}{\mathcal{D}} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2 s_p}{\mathcal{D}} =$$

$$= (q^2)^{1-\varepsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right),$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{q^2 p^2, q^2 s_p, q^2 k^2, q^2 s_k}{\mathcal{D}} =$$

$$= (q^2)^{1-\varepsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right),$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{q^2 s_{pk}}{\mathcal{D}} = (q^2)^{1-\varepsilon} \varphi_d(1, 1) \varphi_d(1, 1) =$$

$$= -2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{s_{pk}}{\mathcal{D}}.$$

Используя эти формулы и (5.4.43), получаем

$$\Pi^{(3)''} = -\frac{1}{3} \underline{e}^2 \underline{g}^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{2} (q^2)^{1-\varepsilon} \varphi_d(1, 1) \times$$

$$\times \left\{ 32 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi_d\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) - 12 \left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\right) \varphi_d(1, 1) \right\}. \quad (5.4.45)$$

Мы учитываем только члены, содержащие в асимптотике сингулярные слагаемые по  $\varepsilon$  и  $q^2$ . Таким образом, согласно

(5.4.41), (5.4.42), имеем

$$\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} = -\frac{1}{3} \underline{e}^2 \underline{g}^2 \mu^{2(4-d)} Q^2 \frac{n^2-1}{2} \varphi_d(1, 1) (q^2)^{1-\varepsilon} \times$$

$$\times \left\{ 24 \left(1 - \frac{5\varepsilon}{12}\right) \varphi_d\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right) - 12 \left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\right) \varphi_d(1, 1) \right\}$$

или, используя (5.4.37), при малых  $\varepsilon$

$$\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} = -\underline{e}^2 \underline{g}^2 Q^2 \frac{n^2-1}{2} q^2 \left(\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \varepsilon \varphi_d(1, 1) \varphi_d(1, 1). \quad (5.4.46)$$

Заметим, что  $\Pi^{(2)}$  и  $\Pi^{(3)}$  содержат слагаемые, пропорциональные  $1/\varepsilon^2$ , которые, однако, сократились в величине  $\Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}$ . Это сокращение связано с тождеством Уорда, которое связывает собственно энергетическую часть  $\Sigma$ , содержащуюся в  $\Pi^{(2)}$ , с вершинной функцией, содержащейся в  $\Pi^{(3)}$ . Полный поляризационный оператор при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , согласно последней формуле и (5.4.40), имеет вид

$$\Pi = -i \frac{4}{3} \underline{e}^2 Q^2 n \varphi_d(1, 1) q^2 \left\{ \left(-\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} \underline{g}^2 \frac{n^2-1}{2n} \frac{1}{8\pi^2} \left(-\frac{q^2}{\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \right\}. \quad (5.4.47)$$

**5.4.6. Аномальная размерность фотонной функции Грина и отношение сечений аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны и мюоны.** Имея выражение для поляризационного оператора при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , можно определить аномальную размерность  $\gamma$  фотонной функции Грина. Для этого нужно предварительно найти перенормировочную постоянную  $Z$ .

Функция Грина фотона определяется формулой

$$G_i^{-1} = -q^2 - \Pi(q),$$

где, согласно (5.4.47), поляризационный оператор  $\Pi$  в приближении  $\underline{e}^2$  и  $\underline{e}^2 \underline{g}^2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет вид

$$\Pi = -q^2 \left( \frac{a}{\varepsilon} + b' \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right),$$

$$a = -\frac{Q^2 \underline{e}^2 n}{6\pi^2} \left( 1 + \frac{3g^2}{64\pi^2} \frac{n^2-1}{n} \right),$$

$$b' = \frac{Q^2 \underline{e}^2 n}{6\pi^2} \left( \frac{1}{2} + \frac{3g^2}{64\pi^2} \frac{n^2-1}{n} \right). \quad (5.4.48)$$

Поэтому

$$G_i^{-1} = -q^2 - \Pi = -q^2 \left( 1 - \frac{a}{\varepsilon} - b' \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (5.4.49)$$

При проведении процедуры регуляризации с помощью введения предельного импульса  $\mathcal{M}$  мы получим аналогичную формулу, в которой величина  $\frac{a}{\epsilon}$  должна быть заменена на  $-b' \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}$ ,

$$\frac{a}{\epsilon} \rightarrow -b' \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}. \quad (5.4.50)$$

Это следует из независимости перенормированной функции Грина от параметра нормировки  $\mu$ . В соответствии с теорией перенормировки

$$G_i = Z \underline{G}_i,$$

где в рассматриваемом приближении величины  $\underline{G}_i$ ,  $Z$  определяются формулами

$$\underline{G}_i^{-1} = -q^2 \left( 1 - b' \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right), \quad Z = 1 - b' \ln \frac{\mathcal{M}^2}{\mu^2}, \quad (5.4.51)$$

причем

$$b' = \frac{Q^2 e^2}{4\pi^2} \left( 1 + \frac{g^2}{4\pi^2} \right), \quad n = 3 \quad (5.4.52)$$

(в формуле для  $b'$  мы заменили  $e$  и  $g$  их перенормированными значениями, что можно сделать в рассматриваемом приближении).

Из выражения при  $Z$  и формулы (5.4.22) можно найти аномальную размерность функции Грина фотона

$$\gamma = \mu \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} = 2b'.$$

Подставляя выражение (5.4.52) в формулу (5.4.27) для сечения аннигиляции, получаем

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow h) = \frac{Q^2 e^4}{4\pi q^2} \left( 1 + \frac{g^2(q^2)}{4\pi^2} \right), \quad (5.4.53)$$

где

$$g^2(q^2) = \frac{g^2(\mu^2)}{1 + g^2(\mu^2) \frac{b}{16\pi^2} \ln \frac{q^2}{\mu^2}}, \quad b = 11 - \frac{2}{3} n_f. \quad (5.4.54)$$

При этом мы учли, что  $n = 3$ . Вводя вместо  $g^2(\mu^2)$  величину  $\lambda^2$

$$\frac{1}{g^2(\mu^2)} = \frac{b}{16\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2}, \quad g^2(q^2) = \frac{16\pi^2}{b \ln \frac{q^2}{\lambda^2}}, \quad (5.4.55)$$

представляем выражение (5.4.53) в виде

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow h) = \frac{e^4}{4\pi q^2} \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 \left( 1 + \frac{4}{b \ln \frac{q^2}{\lambda^2}} \right). \quad (5.4.56)$$

При анализе экспериментальных результатов удобно рассматривать отношение полного сечения образования адронов к полному сечению образования мюонной пары

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{1}{3} \frac{e^4}{4\pi q^2}. \quad (5.4.57)$$

Эта формула следует из формулы (5.4.56), если в последней заменить  $\Sigma Q^2$  на 1, отбросить слагаемое  $4/b \ln \frac{q^2}{\lambda^2}$ , учитывающее сильное взаимодействие (в процессе  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  сильное взаимодействие проявляется не в приближении  $e^4$ , а в приближении  $e^6$ ) и, наконец, разделить полученный результат на три, так как формула (5.4.56) учитывает три цвета кварка. Отношение сечений определяется формулой

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow h)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 \left( 1 + \frac{4}{b \ln \frac{q^2}{\lambda^2}} \right). \quad (5.4.58)$$

Мы видим, что это отношение зависит от числа сортов кварков и только логарифмически зависит от энергии электронно-позитронной пары. При больших энергиях  $R$  стремится к константе  $R \rightarrow 3 \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^2 [28-30]$ , что соответствует модели свободных кварков. Переход к асимптотическому режиму осуществляется сверху, т. е. величина  $R$  уменьшается с ростом  $q^2$ , что находится в соответствии с экспериментом.

Заметим, что если бы мы учитывали массы кварков, то число сортов кварков, по которым происходит суммирование в (5.4.58), зависело бы от  $q^2$  (см. формулу (3.3.79')) при  $q^2 < 4m_{\alpha}^2$ , в формулу (5.4.58) дают вклад только кварки с массами, меньшими  $m_{\alpha}$ . Это находится в соответствии с наблюдаемым на опыте скачкообразным изменением  $R$  с ростом  $q^2$ . При достигнутой сейчас энергии электронно-позитронных пар  $\sqrt{q^2} = 45$  Гев асимптотическое значение  $R \approx 4-4,5$ , что соответствует пяти кваркам  $u, d, s, c, b$  с электрическим зарядом  $-1/3, -1/3, 2/3, -1/3$ . Этим пяти кваркам соответствует, согласно (5.4.58), теоретическое значение  $R = 11/3$ .

Теоретически предсказанному шестому  $t$ -кварку с зарядом  $2/3$  соответствует асимптотическое значение  $R = 5$ . Таким образом, масса  $t$ -кварка должна быть больше 40 Гев.

## § 5.5. Кварк-глюонные струи

### 5.5.1. Двухструйные процессы с участием мягких и виртуальных глюонов.

В предыдущем параграфе мы определили полное сечение превращения электронно-позитронной пары в кварки

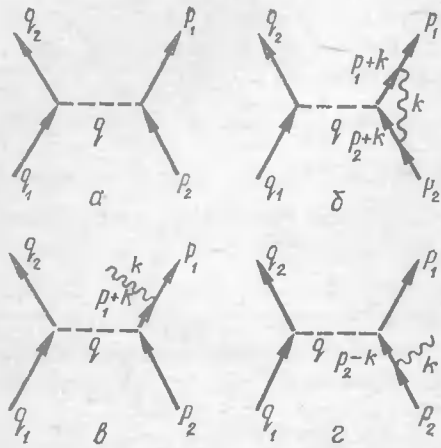


Рис. 36.

и глюоны в приближении  $e^4 g^2$ . Это сечение мы интерпретируем как полное сечение аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны, предполагая, что кварки и глюоны с вероятностью единица превращаются в адроны. Наряду с полным сечением аннигиляции представляет большой интерес изучение сечения аннигиляции электронно-позитронной пары в кварк-глюонные струи, которые наблюдаются на опыте в виде адронных струй. В этом параграфе мы будем изучать образование двух и трех кварк-глюонных струй. Под двухструйными событиями мы будем подразумевать такие события, в которых вся энергия  $E = \sqrt{q^2}$  электронно-позитронной пары в системе центра инерции, за исключением малой части  $\epsilon E$  ( $\epsilon \ll 1$ ), переходит в энергию кварков и глюонов, летящих в двух противоположно направленных конусах с углом раствора  $\delta$ , расположенных под углом  $\theta$  к направлению сталкивающихся  $e^+e^-$  пучков. Аналогичным образом определяются трехструйные процессы, в которых три струи лежат в одной плоскости при произвольных углах между осями струй. Так как мы вычисляем сечения с точностью до членов порядка  $e^4$ , то необходимо учитывать диаграммы Фейнмана, изображенные на рис. 36. Диаграммы рис. 36, а, б дают вклад только в двухструйные события, тогда как диаграммы рис. 36, в, г дают вклад как в двухструйные, так и в трехструйные события.

Матричный элемент образования кварк-антикварковой пары сорта  $\alpha$  и цвета  $j$ , соответствующий диаграмме рис. 36, а, определяется формулой

$$S_{\alpha j}^{(0)} = \frac{i(2\pi)^4}{(2V)^2 \sqrt{q_{10}q_{20}p_{10}p_{20}}} A_{\alpha j}^{(0)} \delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2),$$

$$A_{\alpha j}^{(0)} = e^2 Q_\alpha \mathcal{D}^c(q_1 + q_2) \bar{v}^{\mu_2}(q_2) \gamma_\lambda u^{\mu_1}(q_1) \bar{u}^{\alpha\sigma_1}(p_1) \gamma^\lambda v^{\alpha\sigma_2}(p_2),$$

$$v \equiv u^c, \quad (5.5.1)$$

где  $\mathcal{D}^c(q_1 + q_2) = -1/(q_1 + q_2)^2$ ,  $eQ_\alpha$  — заряд кварка сорта  $\alpha$  ( $j = 1, 2, 3$  — цветовой индекс кварка). Дифференциальное

сечение процесса, просуммированное по сортам и цветам кварков, определяется формулой

$$d\sigma^{(0)} = \frac{1}{64\pi^2 E^2} \frac{1}{4} \sum |A_{\alpha j}^{(0)}|^2 d\Omega, \quad E^2 = (q_1 + q_2)^2$$

(знак  $\Sigma$  означает суммирование по сортам, цветам и поляризациям кварков, а также по поляризациям электронов и позитронов;  $d\Omega$  — элемент телесного угла импульса кварка в системе центра инерции (с. п. и.). Замечая, что

$$\frac{1}{4} \sum_{\mu_1 \mu_2} (\bar{v}^{\mu_2}(q_2) \gamma_\lambda u^{\mu_1}(q_1)) (\bar{v}^{\mu_2}(q_2) \gamma_\nu u^{\mu_1}(q_1))^* =$$

$$= q_{1\nu} q_{2\nu} + q_{1\nu} q_{2\lambda} - (q_1 q_2) g_{\nu\lambda} \equiv \{q_1 q_2\}_{\lambda\nu},$$

$$\frac{1}{4} \sum_{\alpha_1 \alpha_2} (\bar{u}^{\alpha\sigma_1}(p_1) \gamma_\lambda v^{\alpha\sigma_2}(p_2)) (\bar{u}^{\alpha\sigma_1}(p_1) \gamma_\nu v^{\alpha\sigma_2}(p_2))^* = \{p_1 p_2\}_{\lambda\nu} \quad (5.5.2)$$

(мы пренебрегаем массами электронов и позитронов и считаем, что массы кварков равны нулю, т. е.  $p_1^2 = p_2^2 = 0$ ), получаем

$$\frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} = \frac{3\alpha^2}{4E^2} (1 + \cos^2 \theta) \sum_\alpha Q_\alpha^2, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (5.5.3)$$

Полное сечение в борновском приближении определяется формулой

$$\sigma^{(0)} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{E^2} 3 \sum_\alpha Q_\alpha^2 = \sigma^{(0)}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \cdot 3 \sum_\alpha Q_\alpha^2 \quad (5.5.4)$$

(сравним с формулой (5.4.28)).

Найдем теперь поправку к борновскому сечению за счет интерференции диаграмм рис. 36, а и б. Амплитуда, соответствующая диаграмме рис. 36, б, имеет вид

$$A_{\alpha j}^{(2)} = e^2 D^c(q) Q_\alpha \bar{v}^{\mu_2}(q_2) \gamma^\nu u^{\mu_1}(q_1) \bar{u}^{\alpha\sigma_1}(p_1) \underline{\Lambda}_\nu(q) v^{\alpha\sigma_2}(p_2),$$

где  $\underline{\Lambda}_\nu(q) \equiv \Lambda_\nu(q) - \Lambda_\nu(0)$  ( $q = p_1 + p_2$ ) — регуляризованная вершинная функция и

$$\Lambda_\nu(q) = -g^2 (q^2) \frac{4}{3} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\lambda (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\nu (\hat{p}_2 + \hat{k}) \gamma^\lambda}{(p_1 - k)^2 (p_2 + k)^2 (k^2 - \lambda^2)}.$$

Здесь  $\lambda$  — фиктивная масса глюона, которую мы ввели для того, чтобы избежать инфракрасных расхождений (мы учли, что  $\frac{1}{4} \sum_\alpha (\lambda^\alpha)^2 = \frac{4}{3}$ , где  $\lambda^\alpha$  — матрицы Гелл — Манна).

Импульсы кварков, входящие в матрицы  $\hat{p}_1$  и  $\hat{p}_2$ , исключаются с помощью уравнения Дирака при нахождении матричного элемента  $i\underline{\Lambda}_\nu$ . Наконец, в качестве величины  $g$ , в соот-

ветствии с результатами предыдущего раздела, мы должны взять значение бегущей константы связи  $g(q^2)$  при  $q^2 = E^2$ . Поэтому величину  $\underline{\Lambda}_v$  можно представить в виде

$$\underline{\Lambda}_v(q) = -i \frac{g^2(q^2)}{6\pi^4} \{q^2 \gamma_v \mathcal{F}_1 + (\hat{q} \gamma_v \gamma_0 - \gamma_0 \gamma_v \hat{q}) \mathcal{F}_0 + \gamma_\tau \gamma_v \gamma_0 \mathcal{F}_{0\tau}\},$$

где

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\pi^2 i}{q^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - 2 \ln^2 \frac{E}{\lambda} \right),$$

$$\mathcal{F}_0 = \frac{\pi^2 i}{q^2} (p_1 - p_2)_0 \left( 2 \ln \frac{\lambda}{E} + 1 \right),$$

$$\mathcal{F}_{0\tau} = \frac{\pi^2 i}{q^2} \left\{ \frac{1}{2} p_{10} p_{2\tau} - \frac{1}{2} q^2 g_{0\tau} \left( \ln \frac{\lambda}{E} + \frac{3}{4} \right) \right\}$$

(см. в этой связи [19]). Отсюда и из (5.5.1) следует, что

$$A_{\alpha j}^{(2)} = A_{\alpha j}^{(0)} \frac{g^2(q^2)}{6\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{7}{4} + 3 \ln \frac{E}{\lambda} - 2 \ln^2 \frac{E}{\lambda} \right). \quad (5.5.5)$$

Поэтому поправка к борновскому дифференциальному сечению (5.5.5), обусловленная интерференцией амплитуд  $A_{\alpha j}^{(0)}$ ,  $A_{\alpha j}^{(2)}$

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E^2} \frac{1}{4} \sum 2 \operatorname{Re} A_{\alpha j}^{(0)} A_{\alpha j}^{(2)},$$

определяется формулой

$$\frac{d\sigma^{(2)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{7}{4} + 3 \ln \frac{E}{\lambda} - 2 \ln^2 \frac{E}{\lambda} \right). \quad (5.5.6)$$

Перейдем к рассмотрению вклада в сечение двухструйных процессов диаграмм с излучением реальных глюонов (см. рис. 36, в, г). Амплитуда, соответствующая диаграммам рис. 36, в, г, определяется формулой

$$A_{\alpha i j}^{(1)} = g^2(q^2) Q_\alpha \frac{e^2}{q^2} e_{k\nu}^{(\lambda)} \bar{u}^{\mu_2}(q_2) \gamma_\lambda u^{\mu_1}(q_1) \left\{ \bar{u}^{\alpha_1}(p_1) \gamma^\nu \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}}{(p_1 + k)^2} \times \right. \\ \left. \times \gamma^\lambda \frac{1}{2} \lambda_{ij}^a u^{\alpha_2}(p_2) - \bar{u}^{\alpha_1}(p_1) \gamma^\lambda \frac{\hat{p}_2 + \hat{k}}{(p_2 + k)^2} \gamma^\nu \frac{1}{2} \lambda_{ij}^a u^{\alpha_2}(p_2) \right\}, \quad (5.5.7)$$

где  $e_{k\nu}^{(\lambda)}$  — вектор поперечной поляризации глюонов. Амплитуда  $A_{\alpha i j}^{(1)}$  зависит от цветов кварка и антикварка  $i, j$ , а также от сорта глюона  $a$ . В выписанной формуле зависимость от цветов кварков определяется выражением  $\lambda_{ij}^a$ . Для «мягких» глюонов, энергия которых  $\omega$  меньше  $\epsilon E$  ( $\omega < \epsilon E$ ), это выраже-

ние принимает вид

$$A_{\alpha i j}^{(1)} \approx_{\omega < \epsilon E} g^2(q^2) Q_\alpha \frac{e^2}{E^2} \bar{v}^{\mu_2}(q_2) \gamma_\lambda u^{\mu_1}(q_1) \bar{u}^{\alpha_1}(p_1) \times \\ \times \gamma^\lambda \lambda_{ij}^a u^{\alpha_2}(p_2) \left( \frac{p_1^\nu}{p_{1k}} + \frac{p_2^\nu}{p_{2k}} \right) e_{k\nu}^{(\lambda)}. \quad (5.5.8)$$

Поэтому вклад в сечение двухструйного процесса «мягких» глюонов

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 E^2} \frac{1}{4} \sum_{\omega < \epsilon E} d^3k |A_{\alpha i j}^{(1)}|^2$$

(суммирование происходит по  $\alpha, i, j$ , а также по поляризациям электронов, позитронов, кварков и антикварков) определяется формулой

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \left( -\frac{4}{3} \frac{g^2(q^2)}{16\pi^3} \right) \int_{\omega < \epsilon E} \frac{d^3k}{\omega} \left( \frac{p_1^\nu}{p_{1k}} + \frac{p_2^\nu}{p_{2k}} \right)^2.$$

При суммировании по цветам и сортам кварков мы использовали формулы

$$\operatorname{Sp} \lambda^a \lambda^b = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad u_\alpha^{\mu_1}(p) \bar{u}_\beta^{\mu_2}(p) = 2mq \Lambda_{\alpha\beta}^{\mu_1 \mu_2}(p),$$

где  $\Lambda(p)$  — матрица проектирования (3.2.7), действующая в спиновом пространстве и не зависящая от  $j$  и  $\alpha$ . Выполняя интегрирование по  $d^3k$ , получаем

$$\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \frac{g^2(E^2)}{3\pi^2} \left( 2 \ln^2 \frac{2\epsilon E}{\lambda} - \frac{\pi^2}{6} \right). \quad (5.5.9)$$

Обратим внимание на то, что из суммы  $\frac{d\sigma^{(1)}}{d\Omega} + \frac{d\sigma^{(2)}}{d\Omega}$  не выпадает фиктивная масса глюона, в то время как в аналогичном расчете в квантовой электродинамике масса фотона выпадала. Это связано с тем, что в квантовой электродинамике масса электрона отлична от нуля, тогда как в рассматриваемой теории мы полагали массу кварка равной нулю. При массе фермиона, равной нулю, возникает добавочная инфракрасная расходимость при  $\lambda = 0$ . Чтобы исключить массу глюона, необходимо учесть еще вклад в сечение двухструйных событий жестких глюонов (которые мы ранее не учитывали), движущихся почти параллельно кварку в конусах полураствора  $\delta$ .

### 5.5.2. Учет жестких глюонов в двухструйных процессах.

Матричный элемент излучения жестких глюонов ( $\omega > \epsilon E$ ) определяется формулой (5.5.7). Производя суммирование квадрата модуля этого матричного элемента по поляризациям начальных и конечных частиц и по цветам конечных частиц,

получаем

$$\begin{aligned} \sum |A_{\alpha ij}^{(1)}|^2 = & 16 \frac{4}{3} g^2 (q^2) Q_\alpha^2 \frac{e^4}{E^4} \left\{ \frac{4 (p_1 k) \{p_2 k\}_{\mu\nu} - 2\lambda^2 \{p_1 p_2\}_{\mu\nu}}{(p_1 + k)^4} - \right. \\ & - \frac{2}{(p_1 + k)^2 (p_2 + k)^2} [\lambda^2 (p_1 p_2) g_{\mu\nu} - 2 (p_1 p_2) \{ (p_1 p_2)_{\mu\nu} + \\ & + \{p_1 k\}_{\mu\nu} \} - 2 (p_1 k) \{p_1 p_2\}_{\mu\nu} + 2 (p_2 k) \{p_1 p_2\}_{\mu\nu} \} + \\ & \left. + (p_1 \rightleftharpoons p_2) \{q_1 q_2\}^{\mu\nu} \right\}. \end{aligned} \quad (5.5.10)$$

Сечение процесса с излучением глюона определяется формулой

$$d\sigma = \frac{1}{4} \sum |A_{\alpha ij}^{(1)}|^2 \frac{1}{E^2} d\Phi, \quad (5.5.11)$$

где

$$d\Phi = (2\pi)^4 \delta(q_1 + q_2 - p_1 - p_2 - k) \left( \prod_{i=1}^2 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \omega}. \quad (5.5.12)$$

Введем безразмерные величины  $x_i = 2E_i/E$  ( $E_i$  — энергия конечного кварка, антикварка или глюона,  $i = 1, 2, 3$ ). Тогда в силу закона сохранения энергии  $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ . Учитывая, что  $p_1^2 = p_2^2 = 0$ ,  $k^2 = \lambda^2$ , имеем в системе центра инерции сталкивающихся частиц

$$p_1 p_2 = \frac{1}{2} E^2 (1 - x_3 - \beta), \quad p_2 k = \frac{1}{2} E^2 (1 - x_1 - \beta), \quad (5.5.13)$$

$$p_1 k = \frac{1}{2} E^2 (1 - x_2 - \beta), \quad \beta \equiv \frac{\lambda^2}{E^2}.$$

Введем пространственную систему координат с осью  $Z$ , направленной вдоль импульса электрона  $q_1 = -q_2$ , и обозначим через  $\theta$  и  $\varphi$  полярный и азимутальный углы вектора импульса кварка  $p_1$  (см. рис. 37; направление оси  $x$  произвольное). Так как мы интересуемся двухструйными событиями, то в формуле (5.5.13') мы положим угол между  $p_1$  и  $p_2$  равным  $\pi$ . Тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} q_{1,2} p_1 = & \frac{E^2}{4} x_1 (1 \mp \cos \theta), \quad q_{1,2} p_2 = \frac{E^2}{4} x_2 (1 \pm \cos \theta), \\ q_{1,2} k = & \frac{E^2}{4} \{x_3 \pm (x_1 - x_2) \cos \theta\}. \end{aligned} \quad (5.5.13')$$

Замечая, что

$$\int_0^\infty dk_0 \delta(k^2 - \lambda^2) = \frac{1}{2\omega}$$

и устрояя в (5.5.12)  $\delta$ -функцию интегрированием по 4-импульсу глюона, величину  $d\Phi$  представим в виде

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{d^3 p_1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{2E_2} \delta(k^2 - \lambda^2),$$

$$k = q_1 + q_2 - p_1 - p_2.$$

Замечая, что  $E_1^{-1} d^3 p_1 = \frac{1}{2} E E_1 dx_1 \times \times d \cos \theta d\varphi$  и  $E_2^{-1} d^3 p_2 = E_2 dE_2 d\chi \times \times d \cos \Phi_{12}$  ( $\Phi_{12}$  — угол между  $p_1$  и  $p_2$ ;  $\chi$  — азимутальный угол, соответствующий повороту вокруг оси симметрии струй) и выполняя интегрирование по  $\chi$  (что дает множитель  $2\pi$ ) и по  $E_2$  с помощью  $\delta(k^2 - \lambda^2)$  (что дает множитель  $1/2E$ ), находим, что фазовый объем  $d\Phi$  можно заменить на

$$d\Phi \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{E^2}{32} dx_1 dx_2 d \cos \theta d\varphi.$$

Учитывая выписанные выражения для скалярных произведений  $q_{1,2} p_1$ ,  $q_{1,2} p_2$ ,  $q_{1,2} k$ ,  $p_1 p_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum |A_{\alpha ij}^{(1)}|^2 \approx & \frac{8}{3} g^2 (q^2) Q_\alpha^2 \frac{e^4}{E^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta) \times \\ \times \left\{ \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} - \beta \left( \frac{1}{(1-x_1)^2} + \frac{1}{(1-x_2)^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$x_3 > 2\epsilon, \quad p_1 \parallel -p_2.$$

Мы учли при написании этой формулы в слагаемом, пропорциональном  $\beta = \lambda^2/E^2$ , только те члены, которые содержат наивысшую сингулярность (члены типа  $\beta/(1-x_1)$  могут дать при интегрировании по  $x$  только выражения типа  $\beta \ln \beta$ , которыми мы пренебрегаем при  $\lambda \rightarrow 0$ ).

Выполним теперь интегрирование по  $x_1$  и  $x_3$ . Определим сначала нижнюю границу интегрирования по  $x_1$ . Для этого заметим, что

$$\cos \Phi_{1,3} = 1 - 2 \frac{x_1 + x_3 - \beta \left(1 + \frac{x_1}{x_3}\right) - 1}{x_1 x_3 - 2\beta \frac{x_1}{x_3}}$$

( $\Phi_{1,3}$  — угол между векторами  $p_1$  и  $k \equiv p_3$ ). Из этого условия следует, что  $x_1 + x_3 - 1 - \beta \left(1 + \frac{x_1}{x_3}\right) \geq 0$  или  $x_1 \geq$

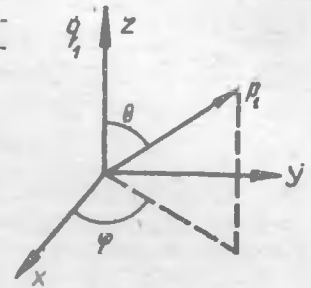


Рис. 37.



$\geq \frac{1-x_3+\beta}{1-\beta/x_3}$ . Верхний предел интегрирования по  $x_1$  находится из условия, что векторы  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$  лежат внутри конусов, соответствующих двухструйной кинематике, т. е.

$$x_2^2 \geq x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 \cos 2\delta$$

(это неравенство следует из закона сохранения импульса  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_3$ ; при возведении этого неравенства в квадрат мы пренебрегли массой глюона, считая, что  $\beta \ll \delta$ ). Подставляя в эту формулу  $x_2 = 2 - x_1 - x_3$ , получаем

$$x_1 \leq \frac{1-x_3}{1-x_3 \sin^2 \delta}.$$

Мы видим, что если  $\delta$  и  $\beta$  малы, то  $x_1 \approx 1 - x_3$ , т. е.  $x_2 \approx 1$ . Интегрирование по  $x_3$ , очевидно, должно происходить в пределах от  $2\varepsilon$  до 1. Вклад жестких глюонов в дифференциальное сечение двухструйных событий определяется формулой [31]

$$\frac{d\sigma^{(жк)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \frac{g^2(q^2)}{6\pi^2} \int_{2\varepsilon}^1 dx_3 \int_{(1-x_3+\beta)/(1-\frac{\beta}{x_3})}^{(1-x_3)/(1-x_3 \sin^2 \vartheta)} dx_1 \times \\ \times \left\{ \frac{x_1^2+1}{(1-x_1)(x_1+x_3-1)} - \beta \left( \frac{1}{(1-x_1)^2} + \frac{1}{(x_1+x_3-1)^2} \right) \right\} \cdot 2.$$

При написании этой формулы мы учли, что  $x_2 = 2 - x_1 - x_3$  и  $\beta \ll \delta, \beta \ll \varepsilon$  ( $\delta \ll 1, \varepsilon \ll 1$ ), а также то, что наряду с рассмотренной областью интегрирования  $x_2 \approx 1$  такой же вклад (в силу симметрии двухструйной кинематики) вносит область интегрирования, получаемая из рассмотренной заменой  $x_1 \rightleftharpoons x_2$ . Таким образом, в рассматриваемом приближении

$$\frac{d\sigma^{(жк)}}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left\{ -4 \ln \frac{E\delta}{\lambda} \cdot \ln 2\varepsilon - 3 \ln \frac{E\delta}{\lambda} - \right. \\ \left. - 2 \ln^2 \varepsilon - \frac{\pi^2}{3} + \frac{17}{4} \right\}. \quad (5.5.14)$$

Суммируя вклады (5.5.3), (5.5.6), (5.5.9), (5.5.14), соответствующие борновскому приближению, интерференции диаграмм рис. 36, а, б вкладу реальных мягких глюонов и вкладу жестких коллинеарных глюонов, получаем следующее выражение для сечения двухструйного процесса [32]:

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega} \left\{ 1 - \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left( 3 \ln \delta + 4 \ln \delta \ln 2\varepsilon + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} \right) \right\}. \quad (5.5.15)$$

Здесь  $\delta$  — угол полураствора конусов, в которых летят кварки и глюоны, одевшиеся в реальные адроны;  $\varepsilon E$  — максималь-

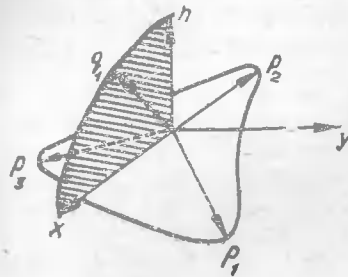


Рис. 38.

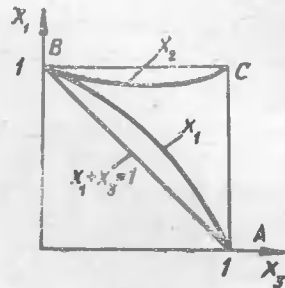


Рис. 39.

ная энергия мягких глюонов, двигающихся в любых направлениях, и поэтому  $(1-\varepsilon)E$  представляет собой энергию адронов в двух струях;  $d\sigma^{(0)}$  — дифференциальное сечение в борновском приближении превращения  $e^+e^-$  и кварк-антикварковую пару, кварк которой движется в телесном угле  $d\Omega$  по отношению к импульсу электрона в с. ц. и., иными словами,  $d\Omega$  — элемент телесного угла оси одной из струй по отношению к импульсу электрона.

Мы видим, что в сечении, соответствующем двухструйным событиям  $e^+e^-$  аннигиляции, масса глюона, которую мы ввели, чтобы корректно учесть инфракрасные расходимости, выпала.

**5.5.3. Трехструйные процессы.** Вычислим теперь полное сечение трехструйных процессов. В силу того, что мы исключаем теперь двухструйную кинематику, в выражении для квадрата матричного элемента (5.5.10) можно положить  $\lambda = 0$ ,

$$\frac{1}{4} \sum |A_{\alpha ij}^{(1)}|^2 = \frac{8}{3} g^2(q^2) Q_\alpha^2 \frac{e^4}{E^2} \frac{1}{2} \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)} \times \\ \times \{x_1^2 + x_2^2 + \sin^2 \vartheta (x_1^2 \cos^2 \varphi_1 + x_2^2 \cos^2 \varphi_2)\},$$

где  $\vartheta$  — угол между нормалью  $\mathbf{n}$  к плоскости импульсов конечных частиц и импульсом  $\mathbf{q}_1$ , а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — азимутальные углы между осью  $x$  и векторами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  (ось  $x$  определяется пересечением плоскости векторов  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{n}$  и плоскости, в которой лежат импульсы конечных частиц; см. рис. 38).

Считая, что  $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{1,2}$  и выполняя интегрирование по  $\varphi_1$ , получаем [33]

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \frac{1}{4} \sum |A_{\alpha ij}^{(1)}|^2 = \frac{8}{3} g^2(q^2) Q_\alpha^2 \frac{e^4}{E^2} \frac{\pi}{2} \times \\ \times \frac{3 - \cos^2 \vartheta}{(1-x_1)(1-x_2)} (x_1^2 + x_2^2).$$

Область интегрирования по переменным  $x_1$  и  $x_3$  изображена на рис. 39. Уравнения граничных линий  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  имеют соответственно вид

$$x_1 = \frac{1-x_3}{1-x_3 \sin^2 \delta}, \quad x_2 = \frac{1-x_3}{1-x_3 \sin^2 \delta}, \quad x_3 = 1.$$

Интегрирование по углу  $\theta$  и по областям, ограниченными указанными кривыми, приводит к следующему выражению для полного сечения трехструйных процессов:

$$\sigma_3 = \sigma^{(0)} \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{3} - \frac{7}{4} + (4 \ln 2\epsilon + 3) \ln \delta \right\}, \quad (5.5.16)$$

где  $\sigma^{(0)}$  — полное сечение  $e^+e^-$  аннигиляции в адроны в борновском приближении; величины  $\delta$ ,  $\epsilon$  имеют прежний смысл, т. е. относятся к двухструйной кинематике, которая определяет трехструйную кинематику (в приближении  $g^2(q^2)$ ), когда в конечном состоянии не может быть более трех частиц). В двухструйных процессах оси двух струй противоположны друг другу; в трехструйных процессах оси трех струй расположены произвольно друг другу (в некоторой плоскости), но таким образом, что никакая пара из них не должна попасть в конус раствора  $2\delta$ . Полное сечение двухструйных процессов, согласно (5.5.15), имеет вид

$$\sigma_2 = \sigma^{(0)} \left\{ 1 - \frac{g^2(q^2)}{3\pi^2} \left( 3 \ln \delta + 4 \ln \delta \ln 2\epsilon + \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} \right) \right\}.$$

Сложив эти выражения, получаем полное сечение  $e^+e^-$  аннигиляции в кварки и глюоны

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma^{(0)} \left( 1 + \frac{g^2(q^2)}{4\pi^2} \right). \quad (5.5.17)$$

Эта формула совпадает с формулой (5.4.53) для полного сечения аннигиляции, полученной с использованием уравнений ренормализационной группы (напомним, что под  $g(q^2)$  следует понимать значение бегущей константы связи  $g(q^2)$  при  $q^2 = = E^2$ ).

Мы получили формулы для сечения аннигиляции на кварки и глюоны. Полученные выражения не зависят от фиктивной массы глюона и являются в этом смысле инфракрасно стабильными. Можно думать, что величины  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\sigma_{\text{tot}}$  не связаны с проблемой конфайнмента и обесцвечивания кварков и глюонов и могут интерпретироваться соответственно как сечения аннигиляции  $e^+e^-$  в адроны.

## § 5.6. Глубоко неупругое рассеяние лептонов адронами

### 5.6.1. Амплитуда и сечение лептон-нуклонного рассеяния.

Перейдем теперь к исследованию рассеяния быстрых лептонов адронами. В § 5.4 мы уже говорили, что если импульс, переданный кварку, достаточно велик, то кварк будет вести себя как квазисвободная частица и поэтому рассеяние лептона на адроне будет выглядеть как рассеяние на системе почти свободных частиц. Такая система будет характеризоваться, подобно атомной системе в задаче рассеяния электрона атомом, некоторыми функциями  $F_i$ , называемыми структурными функциями. Эти функции зависят от двух переменных  $q^2$  и  $\nu = \mathcal{P}q$ , где  $q = p_1 - p_2$  4-импульс, переданный лептоном кваркам ( $p_1$ ,  $p_2$  — начальный и конечный импульс лептона) и  $\mathcal{P}$  — 4-импульс адрона. В лабораторной системе, где адрон с массой  $M$  покоится,  $\nu = M(\epsilon_1 - \epsilon_2)$  ( $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  — энергия начального и конечного лептона). Замечательным свойством структурных функций является то, что в области высоких энергий, когда выполняются неравенства  $-q^2, \nu \gg M^2$  (эта область называется областью глубоко неупругого рассеяния), они приближенно зависят только от одной переменной  $x = -q^2/2\nu$ ,  $0 \leq x \leq 1$  ( $(q + \mathcal{P})^2 > M^2$ ,  $\mathcal{P}q < 0$ ). Зависимость структурных функций от одной переменной называется скейлингом\*. Свойство скейлинга связано с предположением о кварках как свободных частицах. В действительности кварки не являются свободными частицами, так как они взаимодействуют с глюонами, благодаря чему возникает взаимодействие кварков друг с другом. Это приводит к тому, что скейлинг нарушается, т. е. структурные функции зависят не только от  $x$ , но и от  $q^2$ . Нарушение скейлинга обычно характеризуют моментами структурных функций

$$M_i^{(m)}(q^2) = \int_0^1 dx x^{m-2} F_i(x, q^2). \quad (5.6.1)$$

Если скейлинг нарушается, то моменты зависят от  $q^2$ . Как мы увидим далее, в асимптотически свободной теории зависимость моментов от  $q^2$  логарифмическая, т. е. типа

$$M_i^{(m)}(q^2) = \text{const} + \left( \ln \frac{-q^2}{\lambda^2} \right)^{-\alpha_m}, \quad (5.6.2)$$

где  $\alpha_m$  — положительные константы.

\* До открытия свойства асимптотической свободы явление скейлинга объяснялось в рамках партонной модели Фейнманом [34] и Бьеркенем [35], теории глубоко неупругого рассеяния были посвящены также работы [36—38].

Для введения структурных функций необходимо определить амплитуду рассеяния. Для определенности будем рассматривать рассеяние электронов нуклоном. Этот процесс мы будем изучать во втором порядке теории возмущений по заряду электрона. Матрица рассеяния второго порядка теории возмущений определяется формулой (5.4.1'). Матричный элемент изучаемого процесса поэтому имеет вид (см. рис. 32).

$$(S_2)_{i \rightarrow f} = - \int d^4x d^4x' i \mathcal{D}_{\mu\nu}^c(x-x') \langle X | j_\mu(x) | N \rangle \langle p_2 | j_\nu'(x') | p_1 \rangle.$$

Используя формулы (5.4.3), также как и в разделе 5.4.1, получаем отсюда

$$(S_2)_{i \rightarrow f} = \frac{(2\pi)^4}{iq^2} \delta(p_1 + \mathcal{P} - p_2 - \mathcal{P}_X) \langle X | j_\mu(0) | N \rangle \times \\ \times \langle p_2 | j_\mu'(0) | p_1 \rangle.$$

Нас будет интересовать вероятность перехода в единицу времени в произвольное состояние  $|X\rangle$  адронной системы и в интервал импульсов  $d^3p_2$  конечного электрона. Эта вероятность определяется формулой

$$dw_{i \rightarrow f} = \frac{1}{T} \sum_x |(S_2)_{i \rightarrow f}|^2 \frac{V d^3p_2}{(2\pi)^3}.$$

Заменяя  $\delta(0)$  на  $VT/(2\pi)^4$ , получаем

$$dw_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi d^3p_2}{4q^4 \epsilon_1 \epsilon_2} \mathcal{L}_{\mu\nu} \sum_x \delta(\mathcal{P}_X - \mathcal{P} - q) \langle N | j^\mu(0) | X \rangle \times \\ \times \langle X | j^\nu(0) | N \rangle, \quad (5.6.3)$$

где

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = 4V^2 \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \langle p_2 | j_\nu'(0) | p_1 \rangle \langle p_1 | j_\mu'(0) | p_2 \rangle = \\ = \frac{e^2}{2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} (\bar{u}^{\sigma_2}(p_2) \gamma_\nu u^{\sigma_1}(p_1)) (\bar{u}^{\sigma_1}(p_1) \gamma_\mu u^{\sigma_2}(p_2))$$

(мы при этом произвели суммирование по спинам конечного электрона и усреднение по спинам начального электрона). Используя формулы (3.2.7) и (3.2.6), величину  $\mathcal{L}_{\mu\nu}$  можно представить в виде

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = 2e^2 \left\{ p_{1\nu} p_{2\mu} + p_{1\mu} p_{2\nu} + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu} \right\}. \quad (5.6.4)$$

Вводя плотность потока электронов  $\frac{1}{V \epsilon_1 E} \sqrt{(p_1 \mathcal{P})^2 - m^2 \mathcal{M}^2}$ , получаем следующее выражение для сечения рассеяния электронов в интервал углов  $d\Omega$  и энергий  $d\epsilon$ :

$$d\sigma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(p_1 \mathcal{P})^2 - m^2 \mathcal{M}^2}} \frac{d^3p_2}{e_2 q^4} \mathcal{L}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad (5.6.5)$$

где

$$W_{\mu\nu} = (2\pi)^3 \sum_X \delta(\mathcal{P}_X - \mathcal{P} - q) \langle N | j_\mu(0) | X \rangle \times \\ \times \langle X | j_\nu(0) | N \rangle 2V \mathcal{E}.$$

Легко видеть, что тензор  $W_{\mu\nu}$  можно представить в виде

$$W_{\mu\nu} = 2V \mathcal{E} \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle N | [j_\mu(x), j_\nu(0)] | N \rangle \quad (5.6.6)$$

(мы предполагаем, что величина  $W_{\mu\nu}$  усредняется по поляризационным состояниям нуклона). Действительно, согласно (5.4.3),

$$\frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle N | j_\mu(x) j_\nu(0) | N \rangle = \\ = (2\pi)^3 \sum_X \delta(q + \mathcal{P} - \mathcal{P}_X) \langle N | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | N \rangle$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle N | j_\nu(0) j_\mu(x) | N \rangle = \\ = (2\pi)^3 \sum_X \delta(q - \mathcal{P} + \mathcal{P}_X) \langle N | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | N \rangle.$$

Так как в системе покоя начального нуклона  $q_0 > 0$  и  $\mathcal{P}_X^0 \geq \mathcal{P}^0$  (в состоянии  $|X\rangle$  находится по крайней мере один нуклон), то последнее выражение обращается в нуль.

В силу закона сохранения кваркового тока имеют место соотношения

$$W_{\mu\nu} q^\nu = q^\mu W_{\mu\nu} = 0.$$

Поэтому тензор  $W_{\mu\nu}$  можно представить в виде

$$W_{\mu\nu} = W_1(q^2, \nu) \left( -g_{\mu\nu} + \frac{1}{q^2} q_\mu q_\nu \right) + \\ + \frac{1}{\mathcal{M}^2} W_2(q^2, \nu) \left( \mathcal{P}_\mu - \frac{\nu}{q^2} q_\mu \right) \left( \mathcal{P}_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu \right). \quad (5.6.7)$$

Таким образом, дифференциальное сечение неупругого  $eN$  рассеяния можно представить в виде [13, 22, 39]

$$d\sigma = \frac{2\alpha^2}{\mathcal{M} q^4} \left( 2W_1 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) d^3p_2, \quad (5.6.8)$$

где  $\vartheta$  — угол рассеяния электрона ( $q^2 = -4\epsilon_1 \epsilon_2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ ; мы пренебрегли массой электрона по сравнению с  $\epsilon, \mathcal{E}$ ).

Величины  $W_1, W_2$  связаны со структурными функциями  $F_1, F_2$  соотношениями

$$F_1(x, q^2) \equiv W_1(q^2, \nu), \quad F_2(x, q^2) = \frac{\nu}{\mathcal{M}^2} W_2(q^2, \nu). \quad (5.6.9)$$

**5.6.2. Аналитические свойства амплитуды рассеяния.** Поступая так же, как и в разделе 5.4.1, легко убедиться, что тензор  $W_{\mu\nu}$ , определяемый формулой (5.6.6), можно представить в виде

$$W_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q) = \frac{1}{\pi} \text{Im} T_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q), \quad (5.6.10)$$

где

$$T_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle N | T(j_\mu(x) j_\nu(0)) | N \rangle 2V\mathcal{V}.$$

Эту формулу можно интерпретировать как следствие оптической теоремы, согласно которой полное сечение любого процесса пропорционально мнимой части упругого рассеяния на нулевой угол (тензор  $T_{\mu\nu}$  определяет амплитуду рассеяния виртуального фотона нуклоном на нулевой угол).

Используя сохранение тока, величину  $T_{\mu\nu}$  можно записать в виде

$$T_{\mu\lambda}(\mathcal{P}, q) = \left( -g_{\mu\lambda} + \frac{1}{q^2} q_\mu q_\lambda \right) T_1(x, q^2) + \left( \mathcal{P}_\mu - q_\mu \frac{v}{q^2} \right) \left( \mathcal{P}_\lambda - q_\lambda \frac{v}{q^2} \right) \frac{1}{\mathcal{M}^2} T_2(x, q^2), \quad (5.6.11)$$

где  $T_1, T_2$  — некоторые функции  $x$  и  $q^2$  (в последней формуле мы не выписали нековариантные швингеровские члены, мнимой части которых равны нулю).

Изучим аналитические свойства амплитуд  $T_{\mu\nu}$ , рассмотрев их как функции  $v$  и  $q^2$ . Мы покажем, что  $T_{\mu\lambda}(v, q^2)$  является аналитической функцией в комплексной плоскости  $v$ , имеющей полюса при  $v = \pm q^2/2$  и разрезы при  $v > v_0$  и  $v < -v_0$ , где  $v_0 = Mm_\pi + \frac{1}{2}(m_\pi^2 - q^2)$  ( $m_\pi$  — минимальная масса адронов, т. е. масса  $\pi$ -мезона). Выражение для  $T_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q)$  можно представить в виде

$$T_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q) = 2V\mathcal{V} (2\pi)^3 \sum_X \left\{ \langle N | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | N \rangle \times \right. \\ \times \frac{\delta(q + P_X - P)}{q_0 - \mathcal{E} + \mathcal{E}_X - i0} - \langle N | j_\mu(0) | X \rangle \times \\ \left. \times \langle X | j_\nu(0) | N \rangle \frac{\delta(q + P - P_X)}{q_0 + \mathcal{E} - \mathcal{E}_X + i0} \right\}. \quad (5.6.12)$$

Из этой формулы следует, что однонуклонные состояния ( $|X\rangle = |N\rangle$ ) с энергией  $V(\mathcal{P} \pm q)^2 + M^2$  приводят к полюсным особенностям в амплитуде  $T_{\mu\nu}$  вида  $[\mathcal{E} \pm q_0 - V(\mathcal{P} \pm q)^2 + M^2]^{-1}$  или вида  $1/(\mathcal{P} \pm q)^2 - M^2 = 1/(q^2 \pm 2v)$ . Из формулы (5.6.12) также следует, что разрезы появ-

ляются благодаря состояниям  $|X\rangle$ , в которых содержится нуклон с импульсом  $\mathcal{P}'$  и  $\pi$ -мезон с импульсом  $\mathcal{P} \pm q - \mathcal{P}'$  (по  $\mathcal{P}'$  происходит интегрирование; другие состояния также приводят к разрезам, однако благодаря минимальности массы  $\pi$ -мезона в семействе адронов эти разрезы лежат внутри  $\pi$ -мезонных разрезов). Именно  $N\pi$  состояние определяет величину  $v_0$ . Очевидно, должно быть  $(\mathcal{P} + q)^2 \geq (M + m_\pi)^2$  или  $(\mathcal{P} - q)^2 \geq (M + m_\pi)^2$  (в противном случае состояния не будут давать вклада в мнимую часть амплитуды  $T_{\mu\nu}$ ). Отсюда следует, что  $v_0 = Mm_\pi + \frac{1}{2}(m_\pi^2 - q^2)$ .

Из сказанного следует, что величины  $T_1(x, q^2)$  и  $T_2(x, q^2)$  являются аналитическими функциями переменной  $x$ , причем в плоскости  $x$  имеется разрез  $-1 < x < 1$  и полюса при  $x = \pm 1$ .

Формулы (5.6.7) показывают, что

$$W_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q) = -W_{\mu\nu}(\mathcal{P}, -q) = -W_{\nu\mu}(\mathcal{P}, -q),$$

поэтому

$$W_{1,2}(q^2, -v) = -W_{1,2}(q^2, v).$$

Для структурных функций  $F_{1,2}$  имеем отсюда

$$F_1(x, q^2) = -F_1(-x, q^2), \quad F_2(x, q^2) = F_2(-x, q^2). \quad (5.6.13)$$

Перейдем к рассмотрению моментов структурных функций. Введем с этой целью контурные интегралы

$$\mathcal{F}_1^{(m)} = \frac{i}{2\pi} \int_c dx x^{m-1} T_1(x, q^2), \quad \mathcal{F}_2^{(m)} = \frac{i}{2\pi} \int_c dx x^{m-3} T_2(x, q^2), \quad (5.6.14)$$

где контур  $c$  изображен на рис. 40. Стягивая контур интегрирования к отрезку  $-1 \leq x \leq 1$ , получаем, учитывая аналитические свойства амплитуд  $T_k(x, q^2)$  ( $k = 1, 2$ ),

$$\mathcal{F}_1^{(m)} = \text{Im} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dx T_1(x, q^2) x^{m-1} = \int_{-1}^1 dx x^{m-1} F_1(x, q^2), \\ \mathcal{F}_2^{(m)} = \text{Im} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 dx T_2(x, q^2) x^{m-3} = -\frac{2M^2}{q^2} \int_{-1}^1 dx x^{m-2} F_2(x, q^2). \quad (5.6.15)$$

где мы учли (5.6.9). В этих формулах мы интегрируем по верхнему берегу разреза; значения амплитуд  $T_k$  на верхнем и нижнем берегах разреза, согласно (5.6.12), являются комплексно-



Рис. 40.

сопряженными. Заметим, что вследствие формул (5.6.13), (5.6.15)  $\mathcal{F}_k^{(m)} \neq 0$  только при четном  $m$ . Мы пренебрегли при этом вкладом полюсов при  $x = \pm 1$  (соответствующих однонуклонным состояниям  $|N\rangle$ ), поскольку они содержат нуклонные формфакторы, быстро убывающие с ростом  $q^2$ . Используя формулы (5.6.1), (5.6.15), получаем следующие выражения для моментов  $M_{1,2}^{(m)}$  структурных функций [40, 41]:

$$M_1^{(m)} = \int_0^1 dx x^{m-1} F_1(x, q^2) = \mathcal{F}_1^{(m)}, \quad (5.6.16)$$

$$M_2^{(m)} = \int_0^1 dx x^{m-2} F_2(x, q^2) = -\frac{q^2}{2M^2} \mathcal{F}_2^{(m)},$$

которые справедливы только при четном  $m$ .

**5.6.3. Представление произведения операторов токов в виде суперпозиции локальных операторов.** Величина  $W_{\mu\nu}(\mathcal{P}, q)$ , входящая в сечение (5.6.5), определяется коммутатором токов  $[j_\mu(x), j_\nu(0)]$ , который (в силу принципа причинности) обращается в нуль для пространственноподобных  $x^\mu$ . Покажем, что при больших  $\nu$  и  $q^2$  в  $W_{\mu\nu}$  доминирующий вклад дает область малых  $x_\mu^2 = x_\mu x_\mu$  ( $0 < x_\mu^2 \leq 1/2x\nu$ ; см. [42]). Действительно, в лабораторной системе 4-импульс нуклона равен  $\mathcal{P} = (M, 0, 0, 0)$ . Предполагая, что переданный импульс  $q$  направлен вдоль оси  $Z$ , имеем  $q = \frac{1}{M}(v, 0, 0, v \sqrt{1 + \frac{2M^2x}{v}})$ . Так как величина  $x$  предполагается конечной, а  $\nu \rightarrow \infty$ , то  $q \approx \frac{1}{M}(v, 0, 0, v + M^2x)$  и, следовательно,  $qx \approx \frac{v}{M}(x_0 - x_3) + Mxx_3$ . Поэтому при  $\nu \rightarrow \infty$  доминирующий вклад в интеграл для  $W_{\mu\nu}$  дает область  $|x_0 + x_3| \leq \frac{M}{v}$ ,  $|x_3| \leq \frac{1}{Mx}$ . Замечая,  $x^2 = -x_\perp^2 + (x_0 - x_3)(x_0 + x_3) \leq (x_0 - x_3)(x_0 + x_3)$ , мы видим, что эффективная область интегрирования в  $W_{\mu\nu}$  определяется неравенством  $0 < x_\mu^2 \leq 1/\nu x$ . Подчеркнем, что несмотря на малость  $x_\mu^2$ , компоненты вектора  $x_\mu$  могут быть не малыми. Таким образом, возникает проблема выяснения поведения коммутатора токов  $[j_\mu(x), j_\nu(0)]$  вблизи светового конуса  $x_\mu^2 \approx 0$ . С этой целью воспользуемся разложением произведения двух произвольных локальных операторов  $A(x)$  и  $B(y)$  по некоторому операторному базису, состоящему из локальных операторов  $O_n(y)$  [43]:

$$A(x)B(y) = \sum_n c_n(x-y) O_n(y), \quad (5.6.17)$$

где  $c_n(x-y)$  — некоторые  $c$ -числовые функции. Произведение локальных операторов представляет собой очень сингулярный объект при  $(x-y)^2 \approx 0$ . В разложении (5.6.17) эти сингулярности переносятся на  $c$ -числовые функции  $c_n(x-y)$ . В качестве операторного базиса этого разложения (оно называется разложением Вильсона) можно взять, например, всевозможные нормальные произведения операторов полей и их производных, относящихся к точке  $y$ .

Чтобы разъяснить смысл этого разложения, рассмотрим свободное скалярное поле  $\varphi(x)$  и в качестве операторов  $A(x)$  и  $B(y)$  возьмем операторы:  $\varphi^2(x)$  и  $:\varphi^2(y):$ . Тогда, согласно теореме Вика, имеем

$$:\varphi^2(x)::\varphi^2(y): = :\varphi^2(x)\varphi^2(y): + 4:\varphi(x)\varphi(y): + i\Delta^c(x-y) - 4(\Delta^c(x-y))^2$$

(предполагается, что  $x_0 > y_0$ ). Подставляя в эту формулу разложение в ряд Тейлора оператора  $\varphi(x)$  по степеням  $x-y$

$$\varphi(x) = \varphi(y) + (x-y)_\mu \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_\mu} + \dots,$$

получаем разложение вида (5.6.17). Вблизи светового конуса функция  $\Delta^c(x)$  ведет себя как

$$\Delta^c(x) \approx \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) \theta(x^2).$$

Поэтому наибольшей сингулярностью на световом конусе в разложении Вильсона обладают те члены, которые содержат наименьшее число полевых операторов.

Мы будем применять разложение Вильсона к произведению адронных (кварковых) токов вблизи светового конуса. При этом нас будут интересовать те слагаемые в этом разложении, которым соответствует наибольшая сингулярность функций  $c_n(x-y)$ . В случае свободного поля функции  $c_n(x-y)$  ведут себя при  $x \rightarrow y$  как  $[(x-y)^2]^{-\frac{1}{2}d_{c_n}}$ . Величина  $d_{c_n}$ , называемая масштабной размерностью, и определяет степень сингулярности функций  $c_n(x-y)$ . Если операторы  $A, B$  и базисные операторы  $O_n$  строятся только из полевых операторов и их производных (но не включают внутри себя массовых переменных), то учитывая, что пропагаторы и перестановочные функции вблизи светового конуса не содержат массовых переменных, легко прийти к выводу, что размерность функций  $c_n(x-y)$  определяется только величиной  $x-y$ . Поэтому в этом случае масштабная размерность  $d_{c_n}$  функций  $c_n$  совпадает с канонической (каноническая размерность  $d_A$  величини-

ны  $A$  определяется формулой  $[A] = p^a A$ , где  $p$  — величина размерности импульса). Таким образом, в случае свободных полей степень сингулярности  $d_{c_n}$  (масштабная размерность) функций  $c_n$  определяется формулой [43, 44]

$$d_{c_n} = d_A + d_B - d_{O_n} \quad (5.6.18)$$

В случае взаимодействующих полей в функциях  $c_n(x)$  появляются величины размерности массы (например, импульсы нормировки  $\mu$ ), поэтому сингулярность не определяется только обычной (канонической) размерностью функций  $c_n(x-y)$ . Именно в этом случае функция  $c_n(x-y)$  ведет себя вблизи светового конуса как  $[(x-y)^2]^{-\frac{1}{2} d_{c_n}} \ln^m \frac{(x-y)^2}{\mu^{-2}}$ , где  $d_{c_n}$  по-прежнему определяется формулой (5.6.18).

Хронологическое произведение токов также можно представить в форме (5.6.17)

$$T \{j^\mu(x) j^\nu(0)\} = \sum_x c_{\mu\nu}^{\mu\nu}(x) O_x(0). \quad (5.6.19)$$

Оператор полного тока  $j^\mu$  представляет собой сумму изоскаляра и изовектора группы  $SU(2)$  (являющейся подгруппой сортовой группы  $SU(3)$ ). В квантовой модели с кварками трех сортов электромагнитный ток, согласно (5.1.34), можно представить в виде

$$j_\mu = j_\mu^3 + j_\mu^8, \quad (5.6.20)$$

$$j_\mu^3 = \frac{e}{2} \bar{q} \gamma_\mu \lambda^3 q, \quad j_\mu^8 = \frac{e}{2\sqrt{3}} \bar{q} \gamma_\mu \lambda^8 q$$

( $\lambda^a$  — матрицы Гелл — Манна сортовой группы  $SU(3)$ ). Величина  $j_\mu^3$  по отношению к группе  $SU(2)$  преобразуется как третья компонента изовектора, а величина  $j_\mu^8$  — как изоскаляр. Разложение Вильсона также может быть написано для  $T \{j_\mu^a(x) j_\nu^b(y)\}$ , ( $a, b = 1, \dots, 8$ ). При этом  $c$  — числовые коэффициенты  $c_{\mu\nu}^{\mu\nu}$  будут зависеть от индексов  $a$  и  $b$ .

Базисные операторы  $O_x(0)$  должны строиться с помощью операторов кварковых и глюонных полей и их производных. Имея в виду, что в задаче о глубоко неупругом рассеянии электронов нуклоном доминирующую роль должны играть те  $c$ -числовые функции  $c_{\mu\nu}^{\mu\nu}$  (или  $c_{\mu\nu}^{\mu\nu, ab}$ ), которые имеют наибольшую сингулярность при  $x_\mu^2 \rightarrow 0$ , в качестве операторов  $O_x(0)$  можно взять операторы  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ ,  $i = a, q, g$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), представляющие собой неприводимые тензоры [23, 45]

$$O_a^{\mu_1 \dots \mu_n} = S \{ \bar{q} \lambda^a \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q - (\text{следы}) \},$$

$$O_q^{\mu_1 \dots \mu_n} = S \{ \bar{q} \gamma^{\mu_1} D^{\mu_2} \dots D^{\mu_n} q - (\text{следы}) \}, \quad (5.6.21)$$

$$O_g^{\mu_1 \dots \mu_n} = S \{ F^{\mu_1 \nu} \mathcal{D}^{\mu_2} \dots \mathcal{D}^{\mu_{n-1}} F^{\mu_n \nu} - (\text{следы}) \},$$

где  $S$  — символ симметризации по индексам  $\mu_1 \dots \mu_n$  и  $\lambda^a$  — матрицы Гелл — Манна для сортовой группы  $SU(3)_F$ ,  $a = 1, \dots, 8$ . Нас в дальнейшем будут интересовать матричные элементы  $\langle N | O_i^{\mu_1 \dots \mu_n} | N \rangle$ , просуммированные по поляризациям нуклона, которые строятся только из вектора  $\mathcal{P}^{\mu_i}$  и тензора  $g^{\mu_i \mu_j}$ . Из соображений размерности ясно, что будут встречаться комбинация  $\mathcal{P}^{\mu_1} \dots \mathcal{P}^{\mu_n}$  и, например, комбинация  $g^{\mu_1 \mu_2} \mathcal{P}^{\mu_3} \dots \mathcal{P}^{\mu_n} \mathcal{P}^2$ . Так как  $\mathcal{P}^2 = M^2$ , то последняя комбинация мала по сравнению с симметричной комбинацией  $\mathcal{P}^{\mu_1} \dots \mathcal{P}^{\mu_n}$ , поэтому главный вклад в сечение глубоко неупругого рассеяния будут давать симметризованные операторы  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ . Вычитание следов в операторах  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$  не меняет в силу сказанного главных членов асимптотики, но использование бесследных операторов является технически более удобным.

Заметим, что операторы  $O_a^{\mu_1 \dots \mu_n}$  преобразуются по октетному представлению группы  $SU(3)_F$ , а оператор  $O_q^{\mu_1 \dots \mu_n}$  (так же как  $O_g^{\mu_1 \dots \mu_n}$ ) — по синглетному представлению группы  $SU(3)_F$ .

В соответствии с таким выбором базиса коэффициенты  $c_{\mu\nu}^{\mu\nu} \equiv c_{i; \mu_1 \dots \mu_n}^{\mu\nu}$  в силу лоренцевской инвариантности имеют вид

$$c_{i; \mu_1 \dots \mu_n}^{\mu\nu}(x) = \left\{ \left( -g_{\mu\nu} + \frac{1}{\square} \partial_\mu \partial_\nu \right) x_{\mu_1} x_{\mu_2} c_i^1(x^2) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\square} \left( -g_{\mu\mu_1} + \frac{1}{\square} \partial_\mu \partial_{\mu_1} \right) \left( -g_{\nu\mu_2} + \frac{1}{\square} \partial_{\mu_2} \partial_\nu \right) c_i^2(x^2) \right\} x_{\mu_3} \dots \\ \dots x_{\mu_n}, \quad \square \equiv \partial_\mu \partial^\mu. \quad (5.6.22)$$

Это выражение написано с учетом сохранения тока.

Как мы увидим далее, функции  $c_i^1$  определяют структурную функцию  $F_1$ , а функции  $c_i^2$  структурную функцию  $F_2$ .

Разъясним теперь почему в нашей задаче существенны именно выписанные операторы  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ . Из анализа размерностей видно, что размерность функций  $c_i^1$  и  $c_i^2$  равна  $2d_i + n - d_{O_n}$ , где  $d_{O_n}$  размерность оператора  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ . Наибольшей сингулярности  $c_i^1(x^2)$  соответствует минимальное значение

величины  $d - n$ , называемой твистом. Величину  $n$  можно интерпретировать как спин, соответствующий операторам  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ , так как последние являются симметричными тензорами со шпурами, равными нулю. Поэтому твист представляет собой разность между размерностью операторов  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$  и их спином. Для выписанных операторов  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$  твист равен 2. Заметим, что хотя операторы  $\bar{q}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}D^{\mu_3}\dots D^{\mu_n}q$  имеют твист, равный единице, тем не менее они дают меньший вклад на световом конусе по сравнению с операторами твиста 2, так как  $\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} \times x_{\mu_1}x_{\mu_2} = x_{\mu}^2$ . Для всех же других операторов, которые можно построить с помощью матриц  $\gamma$ ,  $\lambda$  и полей  $q$ ,  $F_{\mu\nu}$  и их производных, твист будет больше 2. Например, операторы  $\bar{q}D_{\mu_1}\dots D_{\mu_n}q$  имеют твист 3.

Свяжем теперь коэффициенты  $c_i^{1,2}$  в операторном разложении с моментами  $M_{1,2}^{(n)}$  структурных функций. В соответствии с формулами (5.6.10), (5.6.15) нам необходимо рассмотреть матричные элементы операторов  $O_i$  между нуклонными состояниями,

$$2\mathcal{V} \langle N | O_i^{\mu_1 \dots \mu_n} | N \rangle = -i A_i^{(n)} (\mathcal{S}^{\mu_1} \dots \mathcal{S}^{\mu_n} - \text{следы}), \quad (5.6.23)$$

где  $A_i^{(n)}$  — некоторые константы, связанные со структурой нуклона (предполагается, что матричные элементы усреднены по поляризациям нуклона). Мы учли здесь лоренцевскую инвариантность и то, что свертка  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$  по любой паре индексов равна нулю.

Заметим теперь, что

$$\int d^4x e^{iqx} c_i^{1,2}(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} = \frac{q^{\mu_1} \dots q^{\mu_n}}{(q^2)^n} (-2)^n c_{i,n}^{1,2}(q^2), \quad (5.6.24)$$

где

$$c_{i,n}^{1,2}(q^2) = (iq^2)^n \frac{\partial^n}{\partial (q^2)^n} \int d^4x e^{iqx} c_i^{1,2}(x^2).$$

Мы не выписали здесь членов, содержащих символы Кронекера  $q^2 \delta_{\mu_i \mu_j}$ , так как они не дают вклада при свертке с операторами  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}$ .

Используя эти формулы и формулу (5.6.19), получаем

$$i \int d^4x e^{iqx} 2\mathcal{V} \langle N | T(j_\mu(x) j_\lambda(0)) | N \rangle = T_{\mu\lambda}(\mathcal{S}, q) =$$

$$= \left( -g_{\mu\lambda} + \frac{q_\mu q_\lambda}{q^2} \right) \sum_{in} A_i^{(n)} \frac{1}{x^n} c_{i,n}^1(q^2) - \\ - \frac{1}{q^2} \left( \mathcal{S}_\mu - \frac{v}{q^2} q_\mu \right) \left( \mathcal{S}_\lambda - \frac{v}{q^2} q_\lambda \right) \sum_{in} A_i^{(n)} \frac{1}{x^{n-2}} c_{i,n-2}^2(q^2).$$

Отсюда и из (5.6.11) имеем

$$T_1(x, q^2) = \sum_{in} A_i^{(n)} \frac{1}{x^n} c_{i,n}^1(q^2),$$

$$T_2(x, q^2) = -\frac{2\mathcal{M}^2}{q^2} \sum_{in} A_i^{(n)} \frac{1}{x^{n-2}} c_{i,n-2}^2(q^2).$$

Поэтому, согласно теореме Коши и формуле (5.6.14), определяющей величины  $I_{1,2}^{(m)}$ ,

$$\mathcal{F}_1^{(m)} = -\sum_i A_i^{(m)} c_{i,m}^1(q^2), \quad \mathcal{F}_2^{(m)} = \frac{2\mathcal{M}^2}{q^2} \sum_i A_i^{(m)} c_{i,m-2}^2(q^2),$$

а моменты структурных функций, согласно (5.6.16), будут определяться формулами

$$M_1^{(m)} = -\sum_i A_i^{(m)} c_{i,m}^1(q^2), \quad M_2^{(m)} = -\sum_i A_i^{(m)} c_{i,m-2}^2(q^2). \quad (5.6.25)$$

**5.6.4. Скелинг в модели свободных кварков.** Разъясняется применение операторного разложения Вильсона на простейшем примере свободных кварковых полей. Мы рассмотрим глубоко неупругое рассеяние электронов на адронах, предполагая, что они состоят из свободных кварков. Это предположение находится в соответствии с асимптотической свободой кварковых полей в случае больших переданных импульсов. Мы покажем, что в этом случае имеет место скелинг, о котором мы уже говорили в разделе 5.6.1 [46].

Электромагнитный ток  $j_\mu(x)$  заряженных кварковых полей определяется формулой

$$j^\mu(x) = e\bar{q}(x) \gamma^\mu Q q(x),$$

где  $Q$  — зарядовая матрица кварков,

$$Q = \frac{1}{2} \lambda^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda^8.$$

Здесь  $\lambda^a$  — сортовые матрицы Гелл — Манна (см. раздел 5.1.2; для простоты предполагается, что имеется три сорта кварков). Как мы уже говорили, поля  $q(x)$ ,  $\bar{q}(x)$  предполагаются свободными и удовлетворяющими, поэтому перестановочным соотношениям

$$\{q(x), \bar{q}(y)\} = -iS(x-y).$$

Вблизи светового конуса функция  $S(x)$  имеет следующую асимптотику:

$$S(x) \approx \frac{1}{2\pi} \gamma^\mu \partial_\mu (\delta(x^2) \operatorname{sgn} x_0), \quad x^2 \rightarrow 0.$$

Используя соотношения

$$[AB, C]_{\pm} = A[B, C] \mp [A, C]B$$

(+ соответствует антикоммутатору, а — коммутатору), а также формулу (5.6.26), находим

$$\begin{aligned} [j_\mu(x), j_\nu(y)] &= i\bar{q}(y) e^2 Q^2 \gamma_\nu S(y-x) \gamma_{\mu q}(x) - \\ &- i\bar{q}(x) e^2 Q^2 \gamma_\mu S(x-y) \gamma_{\nu q}(y) \approx \\ &\approx e^2 \{\bar{q}(x) Q^2 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu q(y) - \\ &- \bar{q}(y) Q^2 \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu q(x)\} \frac{1}{2\pi} \partial^\alpha \delta((x-y)^2) \operatorname{sgn}(x_0 - y_0). \end{aligned}$$

Нас будет интересовать симметризованный по индексам  $\mu$  и  $\nu$  коммутатор токов при  $y = -x$  (именно он определяет симметричный тензор  $W_{\mu\nu}$ , см. (5.6.6)). Вблизи светового конуса

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \{[j_\mu(x), j_\nu(-x)] + [j_\nu(x), j_\mu(-x)]\} = \\ &= e^2 \left\{ \bar{q}(x) Q^2 \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu) q(-x) - \right. \\ &\left. - \bar{q}(-x) Q^2 \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu) q(x) \right\} \frac{1}{8\pi} \partial^\alpha \delta(x^2) \operatorname{sgn} x_0. \end{aligned}$$

Раскладывая произведения  $\bar{q}(x) q(-x)$  в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \bar{q}(x) q(-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \bar{q}(0) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_1} \dots \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_n} q(0), \\ \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu &= \overset{\rightarrow}{\partial}_\mu - \overset{\leftarrow}{\partial}_\mu \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$\frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu) = (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta}) \gamma^\beta,$$

получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \{[j_\mu(x), j_\nu(-x)] + [j_\nu(x), j_\mu(-x)]\} = \\ &= \frac{ie^2}{8\pi} \sum_{(\text{нечет. } n)} x_{\mu_1} \dots x_{\mu_n} \frac{1}{n!} O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + \\ &\quad + g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta}) \partial^\alpha \delta(x^2) \operatorname{sgn} x_0, \end{aligned} \quad (5.6.27)$$

где

$$O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} = i\bar{q}(0) Q^2 \gamma^\beta \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu_1} \dots \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\mu_n} q(0).$$

Это выражение и представляет собой разложение Вильсона для симметризованного (по индексам  $\mu$  и  $\nu$ ) коммутатора токов свободных кварковых полей.

Сечение глубоко неупругого рассеяния определяется диагональным матричным элементом коммутатора токов, т. е. диагональным элементом оператора  $O$

$$2\mathcal{E}V \frac{1}{2} \sum_{\text{пол. } N} \langle N | O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | N \rangle = a_{n+1} 2^n (\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}^{\mu_1} \dots \mathcal{P}^{\mu_n} \text{ следы})$$

(эта формула аналогична формуле (5.6.23)). Члены, содержащие свертки  $g_{\mu_i \mu_j}$ , по двум индексам можно не учитывать, так как они умножаются на  $x^{\mu_i} x^{\mu_j}$ ,  $x^2 \rightarrow 0$ . Если бы состояния  $|N\rangle$  были собственными состояниями 4-импульса свободного кваркового поля, то коэффициенты  $a_n$  легко могли бы быть найдены. В действительности состояния  $|N\rangle$  не являются собственными состояниями 4-импульса свободных полей. Поэтому величины  $a_n$  не могут быть вычислены без детального знания кварковой структуры нуклона, которая связана с проблемой конфайнмента.

Величину  $W_{\mu\nu}$  (см. (5.6.6))

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4 y e^{iqy} 2\mathcal{E}V \frac{1}{2} \sum_{\text{пол. } N} \langle N | \left[ j_\mu\left(\frac{y}{2}\right), j_\nu\left(-\frac{y}{2}\right) \right] | N \rangle,$$

согласно (5.6.27), можно представить в виде

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \frac{ie^2}{2\pi} \int d^4 y e^{iqy} \sum_{\text{нечет. } n} \frac{1}{n!} y_{\mu_1} \dots y_{\mu_n} \times \\ &\times \frac{1}{2} \sum_{\text{пол. } N} 2\mathcal{E}V \langle N | \frac{1}{2^n} O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | N \rangle (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - \\ &\quad - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}) \partial^\alpha \delta(y^2) \operatorname{sgn} y_0. \end{aligned}$$

В последнюю формулу входят только члены с нечетным  $n$ . Вводя функцию  $f(x)$  с помощью соотношения

$$e^2 \sum_{\text{нечет. } n} a_{n+1} \frac{(y\mathcal{P})^n}{n!} = \frac{1}{2i} \int dx e^{ix(y\mathcal{P})} \frac{f(x)}{x}$$

и пренебрегая величиной  $\mathcal{P}^2 = \mathcal{M}^2$  по сравнению с  $\mathcal{P}q$ , получаем

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \frac{i}{4\pi} \int d^4 y e^{iqy} \int dx e^{ix(y\mathcal{P})} \frac{f(x)}{x} [\mathcal{P}_\mu (q + x\mathcal{P})_\nu + \\ &\quad + \mathcal{P}_\nu (q + x\mathcal{P})_\mu - g_{\mu\nu} \mathcal{P}q] \delta(y^2) \operatorname{sgn} y_0 \end{aligned}$$



или, выполняя интегрирование по  $y$ ,

$$W_{uv} = \frac{f(x)}{2x} \left( -g_{uv} + \frac{q_u q_v}{q^2} \right) + \frac{f(x)}{v} \left( \mathcal{P}_u - \frac{v}{q^2} q_u \right) \left( \mathcal{P}_v - \frac{v}{q^2} q_v \right), \quad (5.6.28)$$

где  $v = \mathcal{P}q$ ,  $x = -q^2/2v$ .

Мы видим, что в рассматриваемой модели структурные функции  $F_1(x, q^2)$ ,  $F_2(x, q^2)$  определяются формулами

$$F_1(x, q^2) = \frac{\mathcal{M}f(x)}{2x}, \quad F_2(x, q^2) = \mathcal{M}f(x) \quad (5.6.29)$$

и не зависят от  $q^2$ , причем

$$F_2(x, q^2) = 2xF_1(x, q^2). \quad (5.6.30)$$

Независимость этих функций от  $q^2$  и выражает свойство скелинга в глубоко неупругом рассеянии. Функция  $f(x)$ , а следовательно, и структурные функции  $F_1$  и  $F_2$  будут разными для протона и нейтрона. Чтобы разъяснить это, заметим, что (см. (5.1.6))

$$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$Q^2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \frac{2}{9} I + \frac{1}{3} Q.$$

Мы видим, что матрица  $Q^2$  представляет собой суперпозицию единичной матрицы  $I$  и зарядовой матрицы  $Q$ . С точки зрения представления группы  $SU(3)_F$ , часть оператора  $O$ , соответствующая матрице  $I$ , является синглетом, а часть оператора  $O$ , соответствующая матрице  $Q$ , является суперпозицией компонент октета (для краткости говорят просто об октете или не-синглете). Протон состоит из двух  $u$ -кварков и одного  $d$ -кварка, а нейтрон состоит из двух  $d$ -кварков и одного  $u$ -кварка. Поэтому матричные элементы операторов  $O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n}$  между протонными  $|p\rangle$  и нейтронными  $|n\rangle$  состояниями связаны соотношением

$$\langle p | O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | p \rangle = \frac{3}{2} \langle n | O^{\beta\mu_1 \dots \mu_n} | n \rangle \quad (5.6.31)$$

(для протона  $Q = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$ , а для нейтрона  $Q^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$ ). Таким образом, в модели свободных кварков

$$\frac{p}{F_i} = \frac{3}{2} \frac{n}{F_i}, \quad i = 1, 2.$$

В следующих разделах мы изучим отклонение от скелинга, обусловленное взаимодействием кварков и глюонов.

**5.6.5. Применение метода ренормализационной группы.** В предыдущем разделе мы видели, что в модели свободных кварков структурные функции обладают свойством скелинга. Теперь перейдем к исследованию отклонения от скелинга, обусловленного взаимодействием кварков с глюонами. В разделе 5.6.3 мы выразили моменты структурных функций через функции  $c_{i,n}^{1,2}(q^2)$  (см. (5.6.26)). Задача заключается в том, чтобы найти  $c_{i,n}^{1,2}(q^2)$  при больших  $q^2$  с учетом взаимодействия кварков с глюонами. С этой целью может быть использован метод ренормализационной группы [45]. Напомним предварительно, что в разделе 4.6.1 мы рассматривали функции Грина  $G$ , которые представляли собой вакуумные средние от произведения полевых операторов  $q, \bar{q}, A$  и получали для этих функций Грина уравнения ренормализационной группы.

Но уравнения ренормализационной группы можно применять также в том случае, когда функции Грина содержат внутри себя наряду с операторами полей также некоторые локальные операторы  $O(x)$ , которые в свою очередь строятся из полевых операторов и их производных. Считая, что перенормированный оператор  $\underline{O}(x)$  связан с неперенормированным оператором  $O(x)$  соотношением

$$O(x) = z_0 \underline{O}(x), \quad (5.6.32)$$

мы можем написать следующее соотношение между перенормированной  $G_{n,m,0}$  и неперенормированной  $G_{n,m,0}$  функциями Грина:

$$G_{n,m,0} = z_3^{n/2} z_q^{m/2} z_0 G_{n,m,0}, \quad (5.6.33)$$

где  $z_3^{1/2}$  представляет собой константу перенормировки глюонных полей, число которых в функции Грина равно  $n$ , а  $z_q^{1/2}$  — константу перенормировки кварковых полей, число которых в функции Грина равно  $m$ .

Для «ампутированных» функций Грина, т. е. функций Грина, не содержащих внешних линий (обозначим их через  $\Gamma_{n,m,0}$ ),

имеет место соотношение

$$\Gamma_{n,m,0} = z_\Gamma \underline{\Gamma}_{n,m,0}, \quad z_\Gamma = z_3^{-n/2} z^{-m/2} z_0, \quad (5.6.34)$$

так как «ампутированные» функции Грина  $\Gamma$  и исходные функции Грина  $G$  связаны между собой формулой

$$G_{n,m,0} = \Gamma_{n,m,0} (G_q)^m (G_g)^n,$$

где

$$G_g = z_3 G_g, \quad G_q = z_q G_q.$$

Поступая так же, как и в § 4.6, легко получить уравнение ренормализационной группы для перенормированных функций Грина  $\underline{\Gamma}_{n,m,0}$ . Считая перенормированную функцию Грина функцией перенормированной константы связи  $g$  и импульса обрезания  $\mathcal{M}$ , имеем

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_{n,m,0}(\mathcal{M}, g) = 0 \quad (5.6.35)$$

( $\mu$  — точка нормировки, см. § 4.4). Перенормированная функция Грина  $\underline{\Gamma}_{n,m,0}$  зависит от перенормированного заряда  $\underline{g}$  и импульса нормировки  $\mu$ ,  $\underline{\Gamma}_{n,m,0} = \underline{\Gamma}_{n,m,0}(\underline{g}, \mu)$ , но не зависит от  $\mathcal{M}$ . Поэтому из (5.6.35), (5.6.34) следует, что

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} - n\gamma_g + m\gamma_q + \gamma_0 \right\} \underline{\Gamma}_{n,m,0} = 0, \quad (5.6.36)$$

где

$$\beta(\underline{g}) = \mu \left( \frac{\partial \underline{g}}{\partial \mu} \right)_{g,\mu} \quad (5.6.37)$$

функция перенормированной константы связи, введенная в разделе 4.6.1, и

$$\gamma_0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z_0 |_{g,\mathcal{M}}. \quad (5.6.38)$$

Эта величина называется аномальной размерностью оператора  $O$ . В частности,  $\gamma_g$  и  $\gamma_q$  — аномальные размерности глюонного и кваркового полей — равны

$$\gamma_g = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z_3 |_{g,\mathcal{M}}, \quad \gamma_q = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z_q |_{g,\mathcal{M}}, \quad (5.6.39)$$

так как перенормированные и перенормированные глюонные и кварковые поля, согласно (3.3.66), связаны между собой соотношениями

$$A_\mu^a(x) = \sqrt{z_3} \underline{A}_\mu^a(x), \quad q(x) = \sqrt{z_q} \underline{q}(x).$$

Обратимся теперь к разложению Вильсона и получим уравнения ренормализационной группы для  $c$ -числовых функций  $c_k$ . Из формулы (5.6.19) следует разложение Вильсона для не-

перенормированных матричных элементов:

$$\langle N | T(jj) | N \rangle = \sum_k c_k \langle N | \underline{O}_k | N \rangle.$$

Всяоминая связь между перенормированными и перенормированными операторами, имеем

$$z_j^2 \langle N | T(jj) | N \rangle = \sum_k c_k z_{O_k} \langle N | \underline{O}_k | N \rangle,$$

где  $z_j$  и  $z_{O_k}$  — константы перенормировки операторов  $j$  и  $O_k$ ;  $\langle N | T(jj) | N \rangle$ ,  $\langle N | \underline{O}_k | N \rangle$  — перенормированные матричные элементы. Эту формулу можно записать в виде

$$\langle N | T(jj) | N \rangle = \sum_k \underline{c}_k \langle N | \underline{O}_k | N \rangle,$$

где

$$c_k = z_j^2 z_{O_k}^{-1} \underline{c}_k. \quad (5.6.40)$$

Так как величины  $c_k$  зависят от  $\mathcal{M}$  и  $g$ , а величины  $\underline{c}_k$  — от  $\mu$  и  $\underline{g}$ , то для величин  $\underline{c}_k$  справедливо следующее уравнение ренормализационной группы:

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} + 2\gamma_j - \gamma_{O_k} \right) \underline{c}_k = 0,$$

где  $\gamma_j$  — аномальная размерность оператора тока,  $\gamma_j = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln z_j$ . Эта величина ввиду сохранения тока равна нулю. Действительно, как мы видели в разделе 5.4.3, сильное взаимодействие само по себе (без электромагнитного взаимодействия) не перенормирует электрический заряд. Поэтому в силу закона сохранения 4-тока  $j_\mu$  сильное взаимодействие также не перенормирует и оператор 4-тока  $j_\mu$ . Поэтому окончательное уравнение ренормализационной группы для  $\underline{c}_k$  имеет вид

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} - \gamma_{O_k} \right) \underline{c}_k = 0. \quad (5.6.41)$$

Зная асимптотику функции  $\beta(\underline{g})$  в области малых  $\underline{g}$ , можно, используя свойство асимптотической свободы, найти с помощью этого уравнения асимптотику функции  $\underline{c}_k(q^2)$  в области больших  $q^2$ . При этом нужно знать аномальную размерность оператора  $O_k$ , которая определяется константой перенормировки  $z_{O_k}$  оператора  $O_k$ .

Формулы (5.6.32), (5.6.41) относятся к тому случаю, когда в разложении Вильсона отсутствует вырождение, т. е.  $O_k = z_{O_k} \underline{O}_k$ , где индекс  $k = a, q, g$  нумеруют базисные операторы (см. формулы (5.6.21)). Иными словами, эта формула справед-

лива только в том случае, когда имеется только один оператор  $O_i^{\mu_1 \dots \mu_n} \equiv O_{ni}$  ( $n$  — фиксировано) с квантовыми числами произведения токов (токи преобразуются по октетному представлению группы  $SU(3)_F$ ; произведение токов разлагается на сумму синглета и октета). Этим свойством обладает несинглетный оператор  $O_{na}$  (см. (5.6.21)), который преобразуется по октетному представлению группы  $SU(3)_F$ .

В общем случае может быть несколько операторов  $O_{ni}$  с квантовыми числами произведения токов. В этом случае формула  $O_x = z_{ox} O_x$  должна быть заменена формулой  $O_x = \sum_{x'} z_{xx'} O_{x'}$  [45, 23]. Операторы  $O_{nq}$  и  $O_{ng}$  (см. (5.6.21)) преобразуются по синглетному представлению сортовой группы, поэтому при перенормировке эти операторы могут смешиваться, т. е.

$$O_i = \sum_{j=q,g} z_{ij} O_j, \quad O_i \equiv O_{n,i}, \quad i, j = q, g.$$

Поэтому в общем случае для всех  $i$  мы будем писать

$$O_i = \sum_j z_{ij} Q_j, \quad i, j = a, q, g. \quad (5.6.42)$$

При этом  $z_{aq} = z_{ag} = z_{qa} = z_{ga} = 0$  ( $z_{ij}$  — элементы матрицы констант перенормировки).

Учитывая эту формулу, из разложения Вильсона (5.6.19) получаем

$$\langle N | T(\underline{j}\underline{j}) | N \rangle = \sum_{ni} c_{ni} \langle N | O_{ni} | N \rangle,$$

где, согласно (5.6.42),

$$c_{ni} = \sum_j c_{nj} z_{ji}. \quad (5.6.43)$$

Отсюда следует уравнение ренормализационной группы для  $c_{ni}$ :

$$\sum_i \left\{ \delta_{ij} \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\underline{g}) \frac{\partial}{\partial \underline{g}} \right) - \gamma_{ji} \right\} c_{ni} = 0, \quad (5.6.44)$$

где

$$\gamma_{ij} = \mu \left( z^{-1} \frac{\partial z}{\partial \mu} \right)_{ij}. \quad (5.6.45)$$

Эти величины образуют матрицу аномальных размерностей.

Если ввести столбец базисных векторов  $\begin{pmatrix} Q_a \\ Q_q \\ Q_g \end{pmatrix}$  (см. (5.6.21)),

то матрицу  $z_{ij}$  можно представить в виде

$$(z_{ij}) = \begin{pmatrix} z_{aa'} & 0 & 0 \\ 0 & z_{qq} & z_{qg} \\ 0 & z_{gq} & z_{gg} \end{pmatrix}, \quad z_{aa'} = z_0 \delta_{aa'}. \quad (5.6.46)$$

Аналогичную структуру имеет и матрица  $\gamma_{ij}$ . Матрица  $z_{aa'}$  соответствует невырожденному случаю (в этом случае мы можем пользоваться уравнением (5.6.41), поскольку соответствующая матрица кратна единичной,  $\delta_{aa'}$ ); матрица  $\begin{pmatrix} z_{qq} & z_{qg} \\ z_{gq} & z_{gg} \end{pmatrix}$  описывает смешивание операторов  $O_q$  и  $O_g$  при перенормировке.

**5.6.6. Вычисление аномальных размерностей.** Перейдем к вычислению аномальных размерностей  $\gamma_{ij}$ . Для этого нам необходимо найти матрицу констант перенормировки  $z_{ij}$ , которые определяются соотношением (5.6.42). Рассмотрим подробно несинглетный случай. С этой целью введем функцию Грина

$$G_{q\bar{q}0}(x-z, y-z) = \langle 0 | T(q(x) O(z) \bar{q}(y)) | 0 \rangle \quad (5.6.47)$$

и соответствующую ей ампутированную функцию Грина  $\Gamma_{q\bar{q}0}(x-z, y-z)$ . Для нахождения константы перенормировки  $z_0$  оператора  $Q_a$  введем фурье-компоненту  $G$

$$G(p) = G_{q\bar{q}0}(p, p), \quad (5.6.48)$$

где

$$G_{q\bar{q}0}(p_1, p_2) = \int d^4x \int d^4y e^{i(x-z)p_1} e^{i(y-z)p_2} G_{q\bar{q}0}(x-z, y-z).$$

Так как функция  $G_{q\bar{q}0}(x, y, z)$  зависит только от двух разностей  $x-z, y-z$ , то величина  $G_{q\bar{q}0}(p_1, p_2)$  не зависит от  $z$ .

В формуле (5.6.47) операторы относятся к гейзенберговскому представлению. При построении теории возмущений удобно перейти к операторам в представлении взаимодействия. В этом случае функцию  $G_{q\bar{q}0}$  можно представить в виде

$$G_{q\bar{q}0}(x-z, y-z) = \frac{1}{S_{\text{vac}}} \langle 0 | T\{g(x) O(z) \bar{q}(y) S\} | 0 \rangle, \quad (5.6.49)$$

где  $S$  — матрица рассеяния (см. (4.3.10)), причем при нахождении среднего по вакууму свободных полей нужно учитывать только связанные диаграммы (знак  $\sim$  указывает на то, что операторы рассматриваются в представлении взаимодействия).

Для вычисления констант перенормировки достаточно считать, что операторы  $O_a^{\mu_1 \dots \mu_n}(z)$  сворачиваются с тензором  $\Delta_{\mu_1 \dots \mu_n}$ , где  $\Delta_{\mu} \Delta^{\mu} = 0$ . Поэтому мы будем в дальнейшем вместо

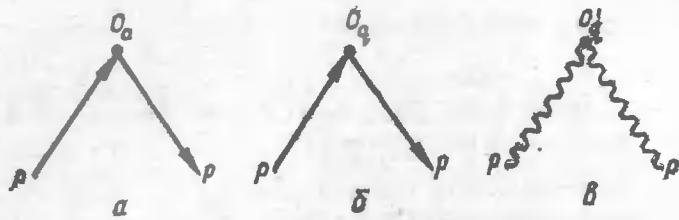


Рис. 41.

оператора  $O_a^{\mu_1 \dots \mu_n}$  рассматривать операторы [40, 45]

$$O_a = O_a^{\mu_1 \dots \mu_n} \Delta_{\mu_1} \dots \Delta_{\mu_n}, \quad \Delta^\mu \Delta_\mu = 0. \quad (5.6.50)$$

При нахождении величин (5.6.48) можно использовать диаграммную технику. При этом в импульсном представлении величины  $\Delta^\mu \partial_\mu$  заменяются на  $i \Delta^\mu p_\mu$ . Из явного вида операторов  $O_a$  следует, что наряду с обычными вершинами появляются «одиночные вершины», связанные с оператором  $O$ . Именно с операторами  $O_a$  и  $O_a$  связаны кварковые вершины, которым в нулевом порядке теории возмущений должны быть сопоставлены величины  $\lambda^a \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1}$  и  $\hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1}$  (см. рис. 41, а, б), а оператору  $O_g$  в нулевом приближении сопоставляется, согласно (5.6.21), величина (см. рис. 41, в)

$$(p\Delta)^{m-2} \{ \Delta_\mu \Delta_\nu p^2 - (p\Delta) \Delta_\mu p_\nu - (p\Delta) \Delta_\nu p_\mu + g_{\mu\nu} (p\Delta)^2 \}. \quad (5.6.51)$$

В первом порядке теории возмущений, благодаря тому, что в ковариантные производные входит слагаемое, содержащее  $g A_\mu^a$ , возникают дополнительные вершины. В случае оператора  $O_a$  эта вершина изображена на рис. 42. Ей соответствует величина

$$g \lambda_F^a \lambda_c^a \Delta_\mu \hat{\Delta} \sum_{j=0}^{m-2} (p_1 \Delta)^j (p_2 \Delta)^{m-2-j}. \quad (5.6.52)$$

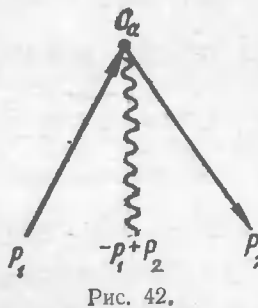


Рис. 42.

Перейдем к вычислению константы перенормировки несинглетной функции Грина.

Диаграммы, соответствующие этой функции Грина (5.6.47), изображены на рис. 43. Диаграмме рис. 43, а соответствует приближение  $g^0$ , а диаграммам рис. 43, б, в, г — приближение  $g^2$ . В случае ампутированных функций Грина выражения, соответствующие внешним линиям, должны быть отброшены. Ампути-

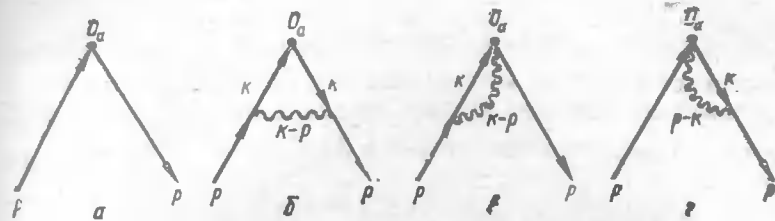


Рис. 43.

рованную функцию Грина, соответствующую несинглетному оператору  $O_a$ , мы будем обозначать через  $\Gamma_m(p)$ . В приближении  $g^0$  имеем

$$\Gamma_m^0(p) = \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} \lambda_F^a. \quad (5.6.53)$$

В приближении  $g^2$

$$\Gamma_m^2(p) = \mathcal{I}_1 + 2\mathcal{I}_2, \quad (5.6.54)$$

где

$$\mathcal{I}_1 = -ig^2 \frac{n^2-1}{2n} \lambda_F^a \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho \hat{k} \hat{\Delta} \hat{k} \gamma^0}{k^4 (p-k)^2} (k\Delta)^{m-1},$$

$$\mathcal{I}_2 = ig^2 \frac{n^2-1}{2n} \lambda_F^a \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\hat{\Delta} \hat{k} \hat{\Delta}}{k^2 (p-k)^2} \sum_{j=0}^{m-2} (k\Delta)^j (p\Delta)^{m-2-j}$$

(вычисления проводятся в фейнмановской калибровке,  $\xi = 1$ ;  $n$  — число цветов кварков; диаграммы рис. 43, б, г дают одинаковый вклад). Вычислим сперва интеграл  $\mathcal{I}_1$ . Учитывая, что

$$\gamma_\rho \hat{k} \hat{\Delta} \hat{k} \gamma^0 = (\varepsilon - 2) [2(k\Delta) \hat{k} - k^2 \hat{\Delta}]$$

( $d = 4 - \varepsilon$ ) и используя формулу (3.3.24), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 = & -2ig^2 (\varepsilon - 2) \frac{n^2-1}{2n} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx (1-x) \times \\ & \times \frac{2(k\Delta) \hat{k} - k^2 \hat{\Delta}}{[x^2 + x(1-x)p^2]^3} (k\Delta)^{m-1} \lambda^a, \end{aligned} \quad (5.6.55)$$

где  $\kappa = k - xp$ . Так как  $\Delta^2 = 0$ , то под знаком интеграла мы можем заменить  $(k\Delta)^m$  на

$$(k\Delta)^m \equiv (\kappa + xp, \Delta)^m \rightarrow x^m (p\Delta)^m + m(\kappa\Delta) (p\Delta)^{m-1} x^{m-1}.$$

Величину  $\hat{k} (k\Delta)^m$  под знаком интеграла в  $\mathcal{I}_1$  мы можем, очевидно, заменить на

$$k (k\Delta)^m \rightarrow \frac{m}{d} \kappa^2 \hat{\Delta} x^{m-1} (p\Delta)^{m-1} + x^{m+1} \hat{p} (p\Delta)^m$$

(мы заменили под знаком интеграла  $\kappa_\mu \kappa_\nu$  на  $\frac{1}{d} \kappa^2 g_{\mu\nu}$ ). Второе слагаемое в этой формуле приводит к сходящемуся при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выражению, поэтому не дает вклада в аномальную размерность. Аналогично величину  $k^2 \hat{\Delta} (k\Delta)^{m-1}$  мы можем заменить на

$$k^2 \hat{\Delta} (k\Delta)^{m-1} \rightarrow \kappa^2 x^{m-1} \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} \left(1 + 2 \frac{m-1}{d}\right).$$

Таким образом, имеем

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2(k\Delta) \hat{k} - k^2 \hat{\Delta}}{[\kappa^2 + x(1-x)p^2]^3} (k\Delta)^{m-1} = \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} x^{m-1} \left(\frac{2}{d} - 1\right) \times \\ \times \int \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \frac{\kappa^2}{[\kappa^2 + x(1-x)p^2]^3}$$

(мы отбрасываем слагаемые, которые сходятся при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). В методе размерной регуляризации (см. (3.3.75))

$$\int \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \frac{(\kappa^2)^r}{(\kappa^2 + R^2)^m} = \\ = i \left(-\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(r + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(m - r - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma(m)} (R^2)^{r-m+\frac{d}{2}}, \quad (5.6.56)$$

поэтому

$$\mathcal{I}_1 = \lambda^a \frac{2-d}{d} (\varepsilon - 2) \left(-\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} g^2 \frac{n^2-1}{2n} \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} (p^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) B\left(m - \frac{\varepsilon}{2}, 2 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (5.6.57)$$

где мы учли, что

$$\int_0^1 dx x^{m-\frac{\varepsilon}{2}-1} (1-x)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} = B\left(m - \frac{\varepsilon}{2}, 2 - \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (5.6.58)$$

При  $\varepsilon \ll 1$  имеем

$$\mathcal{I}_1 = \lambda^a \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{n^2-1}{n} \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{(p^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}}{m(m+1)}. \quad (5.6.59)$$

Перейдем к вычислению интеграла  $\mathcal{I}_2$ . Замечая, что  $\hat{\Delta} \hat{k} \hat{\Delta} = 2(k\Delta) \hat{\Delta}$ , имеем

$$\mathcal{I}_2 = 2i g^2 \frac{n^2-1}{2n} \hat{\Delta} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 (p-k)^2} \sum_{j=0}^{m-2} (k\Delta)^{j+1} (p\Delta)^{m-2-j} \lambda^a.$$

Используя далее формулы (3.3.24), (5.6.55), получаем

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 (p-k)^2} \sum_{j=0}^{m-2} (k\Delta)^{j+1} (p\Delta)^{m-2-j} = \\ = (p\Delta)^{m-1} \sum_{j=0}^{m-2} \int_0^1 dx x^{j+1} \int \frac{d^d \kappa}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\kappa^2 + x(1-x)p^2]^2}.$$

Поэтому, учитывая формулы (5.6.56), (5.6.58) получаем при  $\varepsilon \ll 1$

$$\mathcal{I}_2 = -2g^2 \frac{n^2-1}{2n} \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} \left(\sum_{j=2}^m \frac{1}{j}\right) (p^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{1}{16\pi^2} \lambda^a. \quad (5.6.60)$$

Таким образом, учитывая, что в методе размерной регуляризации величина  $g^2$  заменяется на  $g^2 \mu^{1-d}$ , имеем

$$\Gamma_m(p) = \left\{1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{n^2-1}{n} \left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(2 \sum_{j=2}^{m-1} \frac{1}{j} - \frac{1}{m(m+1)}\right)\right\} \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} \lambda^a. \quad (5.6.61)$$

Эту формулу в терминах параметра обрезания можно (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) переписать в виде

$$\Gamma_m(p) = \left\{1 + a \ln \frac{\mu^2}{M^2} + a \ln \frac{p^2}{\mu^2}\right\} \hat{\Delta} (p\Delta)^{m-1} \lambda^a,$$

где

$$\ln \frac{M^2}{\mu^2} = \frac{2}{\varepsilon}, \quad a = \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{n^2-1}{n} \left(2 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} - \frac{1}{m(m+1)}\right). \quad (5.6.62)$$

Таким образом,

$$z_\Gamma = 1 + a \ln \frac{\mu^2}{M^2} \quad (5.6.63)$$

и, следовательно, аномальная размерность ампутированной функции Грина (см. (5.6.38)) определяется формулой

$$\gamma_\Gamma = \frac{8}{3} \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{-\frac{2}{m(m+1)} + 4 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j}\right\}, \quad n=3. \quad (5.6.64)$$

Согласно формуле (5.6.34), аномальная размерность оператора  $O_a$  связана с аномальной размерностью  $\gamma_\Gamma$  формулой

$$\gamma_0 = \gamma_\Gamma + 2\gamma_a,$$

где (см. (4.6.19))

$$\gamma_q = \frac{4}{3} \frac{g^2}{16\pi^2}$$

Поэтому

$$\gamma_{0m} = \frac{8}{3} \frac{g^2}{16\pi^2} \left\{ 1 - \frac{2}{m(m+1)} + 4 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} \right\}. \quad (5.6.65)$$

Мы не будем приводить здесь длинных вычислений аномальных размерностей для синглетного случая, которые связаны со смешиванием синглетных операторов  $O_{qm}$  и  $O_{gm}$ , а приведем лишь окончательные результаты для  $SU(3)_C$ ,  $SU(n_f)_F$  групп [23, 45, 47]:

$$\gamma_m^{qq} = \frac{g^2}{8\pi^2} \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{2}{m(m+1)} + 4 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} \right),$$

$$\gamma_m^{gq} = -\frac{g^2}{8\pi^2} \frac{2(m^2 + m + 2)}{m(m+1)(m+2)} n_f, \quad (5.6.66)$$

$$\gamma_m^{gg} = -\frac{g^2}{3\pi^2} \frac{m^2 + m + 2}{m(m^2 - 1)}$$

$$\gamma_m^{gg} = \frac{g^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{2}{3} n_f + 3 \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{m(m-1)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)} + 4 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} \right) \right\}.$$

**5.6.7. Нарушение скелинга.** Мы должны теперь использовать полученные значения аномальных размерностей, чтобы с помощью уравнений (5.6.41), (5.6.44) ренормализационной группы определить функции  $c_{i,m} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right)$ .

Решение уравнения (5.6.41) для несинглетной функции  $c_{a,m}^{(1,2)} (a = 1, \dots, 8)$  имеет вид

$$c_{a,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) = e^{-\int_0^t dt' \gamma_{0m}(\bar{g}(t', g))} c_{a,m}^{(1,2)} (1, \bar{g}(t, g)), \quad (5.6.67)$$

где

$$\bar{g}^2(t, g) = g^2 / \left( 1 + b \frac{g^2 t}{8\pi^2} \right), \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{-q^2}{\mu^2}.$$

Мы видим, что для определения асимптотики функций  $c_{a,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right)$  в области больших  $q^2$  достаточно знать аномальные

размерности при малых  $g^2$ . Используя формулы (5.6.65), (5.6.67), легко получить, что

$$c_{a,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) \sim \left( \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right)^{-\alpha_m}, \quad (5.6.68)$$

где

$$\alpha_m = \frac{2}{3b} \left( 1 - \frac{2}{m(m+1)} + 4 \sum_{j=2}^m \frac{1}{j} \right), \quad b = 11 - \frac{2}{3} n_f.$$

В синглетном случае решение уравнения (5.6.44) имеет вид

$$c_{i,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) = \sum_j \left\{ T \exp \left( - \int_0^t dt' \gamma_m^-(\bar{g}(t', g)) \right) \right\}_{ij} \times \\ \times c_{j,m}^{(1,2)} (1, \bar{g}(t, g)),$$

где  $T$  — операция хронологического упорядочения по переменной  $t$ . Отсюда, используя матрицу аномальных размерностей (5.6.66), найденную в области малых  $g$ , можно найти функции  $c_{i,m}^{(1,2)}$  в области больших  $q^2$ :

$$c_{i,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \sum_j \left\{ \exp \left( - \frac{\ln t}{b} \gamma_m^- \right) \right\}_{ij} c_{j,m}^{(1,2)} (1, 0),$$

где

$$\frac{g^2}{8\pi^2} (\bar{\gamma}_m^-)_{ij} \equiv (\gamma_m(g))^{ij}, \quad i, j = q, g.$$

Эту формулу можно представить в виде

$$c_{i,m}^{(1,2)} \left( \frac{q^2}{\mu^2}, g \right) \sim A \left( \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right)^{-\frac{\lambda_m}{2b}} + B \left( \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right)^{-\frac{\lambda_m}{2b}}, \quad (5.6.69)$$

где  $\lambda_m^1$  и  $\lambda_m^2$  — собственные значения матрицы аномальных размерностей  $(\bar{\gamma}_m^-)^{ij}$ .

Зная асимптотики функций  $c_{i,m}^{(1,2)}$  и используя формулы (5.6.25), можно найти асимптотики моментов структурных функций в области больших переданных импульсов.

Мы вводили структурные функции  $F_{1,2}$  и моменты структурных функций  $M_{1,2}^{(n)}$  для нуклонов, не оговаривая о каком состоянии нуклона, протонном или нейтронном, идет речь. Интересуясь теперь конкретным состоянием нуклона, этим величинам мы должны приписать индекс  $N$  ( $F_{1,2}^N, M_{1,2}^{(n)N}$ ), где  $N = p, n$ . Эти величины можно связать с синглетными и несин-

глетными моментами  $M_i^{(m)}$ ,  $M_i^{ns(m)}$  ( $i = 1, 2$ ):

$$M_1^{(m)} = \sum_{i=q,g} A_i^{(m)} c_{i,m}^{(1)}(q^2), \quad M_2^{(m)} = \sum_{i=q,g} A_i^{(m)} c_{i,m-2}^{(2)}(q^2), \quad (5.6.70)$$

$$M_1^{ns(m)} = A_a^{(m)} c_{a,m}^{(1)}(q^2), \quad M_2^{ns(m)} = A_a^{(m)} c_{a,m-2}^{(2)}(q^2).$$

Действительно, согласно (5.6.31),

$$Q^2 = \frac{2}{9} I + \frac{1}{3} Q.$$

Поэтому для моментов нуклонных структурных функций имеем

$$M_i^{N(m)} = \frac{2}{9} \cdot 3M_i^{(m)} + \frac{1}{3} \langle N | Q | N \rangle M_i^{ns(m)}$$

(нуклон состоит из трех кварков). Следовательно, учитывая, что  $\langle p | Q | p \rangle = 1$ ,  $\langle n | Q | n \rangle = 0$ , имеем

$$M_i^{p(m)} = \frac{1}{3} (2M_i^{(m)} + M_i^{ns(m)}), \quad M_i^{n(m)} = \frac{2}{3} M_i^{(m)}. \quad (5.6.71)$$

Формулы (5.6.71) вместе с формулами (5.6.68), (5.6.69) определяют зависимость от  $q^2$  синглетных и несинглетных моментов структурных функций, а тем самым — моментов структурных функций протона и нейтрона.

Как видно из формулы (5.6.68), несинглетные моменты асимптотически стремятся к нулю при  $q^2 \rightarrow \infty$ , так как  $\alpha_m \ln m > 0$ . С ростом  $m$  убывание моментов усиливается в силу того, что [45]

$$\alpha_m \approx 0,296 \ln m - 0,051$$

при  $m > 1$  и  $n_f = 3$ .

Обратим внимание на то, что при  $m = 2$  в синглетном случае матрица аномальных размерностей имеет собственное значение, равное нулю. Это связано с тем, что из операторов  $O_q$  и  $O_g$  при  $m = 2$  можно построить тензор энергии-импульса кваркового и глюонного поля. Этот тензор представляет собой сохраняющуюся величину и, следовательно, его аномальная размерность равна нулю. В этом случае ( $m = 2$ ) вклад нулевого собственного значения в области больших  $q^2$  оказывается доминирующим, поэтому зависимость от  $q^2$  второго момента ( $m = 2$ ) оказывается более слабой по сравнению с моментами при  $m \neq 2$ .

Мы рассмотрели нарушение скелинга, которое определяется логарифмическими членами  $\ln \frac{-q^2}{\mu^2}$ . Однако отклонение от

скейлинга может носить и степенной характер:  $\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)^{\frac{\tau}{2}-1}$ ,

$\frac{\tau}{2} - 1 \geq 0$ , где коэффициент  $\tau$  представляет собой твист локальных операторов, входящих в разложение Вильсона. Мы учитывали только локальные операторы с твистом 2. Учет локальных операторов с высшими твистами и приводит к степенному нарушению скейлинга. Заметим, что наряду со степенными членами  $\left(-\frac{\mu^2}{q^2}\right)^{\frac{\tau}{2}-1}$  возникают также члены типа

$\left(-\frac{\mu^2}{q^2}\right)^{\frac{\tau}{2}-1} \left(\ln \frac{-q^2}{\mu^2}\right)^\gamma$ , где коэффициент  $\gamma$  может быть определен с помощью метода ренормализационной группы. Эти вопросы исследовались в работах [48—51]. Глубоко неупругие процессы на основе анализа инфракрасных особенностей амплитуд рассеяния исследовались в работе [52].

## ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОСЛАБОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### § 6.1. Калибровочные поля, лептонные и скалярные мультиплеты

**6.1.1. Четырехфермионное слабое взаимодействие.** В предыдущих параграфах мы изучали электромагнитное и сильное взаимодействие элементарных частиц. Кроме этих взаимодействий и гравитационного взаимодействия существует еще одно фундаментальное взаимодействие — слабое взаимодействие. Оно ответственно за различные физические процессы:  $\beta$ -распад ядер, многочисленные распады элементарных частиц, нейтринные реакции. Слабому взаимодействию подвержены как адроны, так и лептоны (электрон, мюон,  $\tau$ -лептон и соответствующие им нейтрино). Радиус действия слабого взаимодействия составляет по порядку величины  $\hbar/m_W c \approx 10^{-16}$  см ( $m_W$  — масса  $W$ -бозона). Если сечение, обусловленное сильным взаимодействием, составляет  $10^{-28}$  см<sup>2</sup>, то сечение, обусловленное слабым взаимодействием, составляет  $10^{-32}$  ( $E/m_W c^2$ )<sup>2</sup> см<sup>2</sup> ( $E$  — энергия частиц в системе центра инерции).

Характерной особенностью слабого взаимодействия, отличающей его от сильного и электромагнитного взаимодействия, является то, что оно нарушает целый ряд дискретных законов сохранения: сохранение пространственной четности  $\mathcal{P}$ , зарядовой четности  $C$ , странности  $S$  и т. д.

Первоначальная теория слабого взаимодействия, созданная Ферми около 50 лет назад, строилась по аналогии с электродинамикой. Аналогия заключалась в следующем. Так же как фотон излучается или поглощается атомом, хотя и не содержится в нем, так и нейтрино и электрон может испускаться и поглощаться ядром, не содержась в ядре. Различие между теорией электромагнитного взаимодействия и первоначальными теориями слабого взаимодействия (Ферми [1]; Гелл-Манн, Фейнман [2], Сударшан, Маршак [3], Сакураи [4]) заключается в том, что в первом случае имеет место локальное взаимодействие между электромагнитным током и электромагнитным по-

лем, во втором же случае имеет место локальное взаимодействие между так называемыми слабыми токами. Если для простоты ограничиться слабым взаимодействием заряженных лептонов и соответствующих им нейтрино, то слабый ток  $\mathcal{J}_V^{(w)}$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_V^{(w)} &= \frac{1}{2} (\bar{e}\gamma_V(1 + \gamma^5)v_e + \bar{\mu}\gamma_V(1 + \gamma^5)v_\mu + \bar{\tau}\gamma_V(1 + \gamma^5)v_\tau) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma_V(1 + \gamma^5)v_l, \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

где  $l \equiv e, \mu, \tau$  — биспиноры электрона, мюона и  $\tau$ -лептона, а  $v_l \equiv v_e, v_\mu, v_\tau$  — биспиноры электронного, мюонного и  $\tau$ -лептонного нейтрино. Лагранжиан слабого локального взаимодействия этих токов имеет вид

$$\mathcal{L}^{(w)} = 2\sqrt{2}G\mathcal{J}_\lambda^{(w)+} + \mathcal{J}^{(w)\lambda}, \quad (6.1.2)$$

где  $G$  — универсальная константа слабого взаимодействия (константа Ферми), равная  $G = 1,02 \cdot 10^{-5}/m_p^2$  ( $m_p$  — масса протона). Обратим внимание на различие структуры слабого тока  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  и структуры электромагнитного тока  $\mathcal{J}_{em}^\lambda = \bar{e}\gamma^\lambda e$ . Последнее выражение представляет собой 4-вектор, в то время как выражение  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  представляет собой разность 4-вектора  $\frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma_\lambda l$  и аксиального вектора  $\frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma^5 \gamma_\lambda l$ . Поэтому о взаимодействии заряженных токов  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  говорят как об универсальном  $V - A$  взаимодействии (электромагнитный ток является нейтральным, поскольку при действии на вектор состояния он не изменяет заряда системы, тогда как ток  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  изменяет заряд системы на единицу).

Чтобы описать процесс  $\beta$ -распада нейтрона в теории четырехфермионного взаимодействия, к току  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  добавляется слагаемое  $\frac{1}{2} \bar{p}\gamma_\lambda(1 + \gamma^5)n$ :

$$\mathcal{J}_\lambda^{(w)} = \frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma_\lambda(1 + \gamma^5)v_l + \frac{1}{2} \bar{p}\gamma_\lambda(1 + \gamma^5)n,$$

где  $p$  и  $n$  — биспиноры протона и нейтрона. Обратим внимание на то, что все слагаемые, связанные с лептонами и нуклонами, входят в ток с одинаковым коэффициентом. В этом заключается свойство универсальности четырехфермионного слабого взаимодействия — все слабые процессы определяются в этой теории одной константой  $G^*$ .

\* Лагранжиан (6.1.2) (без члена  $\bar{p}\gamma_\lambda(1 + \gamma^5)n$  в токе  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$ ) был установлен в работах [2—4]. В них же было показано, что токи являются вполне определенной суперпозицией векторного и аксиально-векторного токов, что было подтверждено рядом экспериментов. Было установлено, что нейтрино,



Приведем значения масс лептонов: масса электрона  $m_e = 0,511 \text{ MeV}$ , масса мюона  $m_\mu = 105,7 \text{ MeV}$ , масса  $\tau$ -лептона  $m_\tau = 1784 \text{ MeV}$ ; мы будем считать в дальнейшем, что нейтрино является безмассовым (эксперимент дает следующие верхние границы для масс нейтрино:  $m_{\nu_e} < 46 \text{ MeV}$ ,  $m_{\nu_\mu} < 0,50 \text{ MeV}$ ,  $m_{\nu_\tau} < 164 \text{ MeV}$  [10, 11]).

Биспиноры  $\psi_L$  и  $\psi_R$ , определяемые формулами

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi, \quad (6.1.3)$$

называются левыми и правыми биспинорами. Ток  $\mathcal{J}_\lambda^{(w)}$  (см. (6.1.1)) можно, очевидно, представить в виде

$$\mathcal{J}_\lambda^{(w)} = \sum_l \bar{l}_L \gamma_\lambda \nu_{lL}. \quad (6.1.4)$$

Таким образом, слабые токи содержат только левые биспиноры. Как мы видели (см. § 2.5), биспинор  $\psi_L$  при  $m = 0$  (а следовательно, и при энергиях, значительно превосходящих массу) описывает частицу с левой спиральностью (спин частицы направлен против импульса).

Так как заряженный ток представляет собой суперпозицию вектора и аксиального вектора, то слабое взаимодействие не инвариантно относительно пространственной инверсии  $\mathcal{P}$  и операции зарядового сопряжения  $C$ . Однако оно инвариантно относительно операции комбинированной четности  $C\mathcal{P}$  [12].

Электромагнитное взаимодействие между заряженными частицами осуществляется с помощью обмена фотоном. Слабое взаимодействие, как мы увидим далее, также осуществляется обменом некоторыми частицами — заряженными  $W^\pm$ -бозонами и нейтральным  $Z$ -бозоном. Масса этих частиц очень велика (порядка  $100 \text{ GeV}$ ) [10]. В области малых по сравнению с  $m_W, m_Z$  энергий процесс взаимодействия происходит таким образом, как если бы обмена промежуточной частицей не было, а имело бы место локальное четырехфермионное взаимодействие. Обмен заряженными  $W^\pm$ -бозонами приводит в низкоэнергетической области к лагранжиану (6.1.2), в который входят заряженные токи. Обмен нейтральным  $Z$ -бозоном приводит в низкоэнергетической области к 4-фермионному лагранжиану, аналогичному (6.1.2), в котором, однако, фигурируют не заряженные, а так называемые нейтральные токи: в последние вместо комби-

принимающее участие только в слабом взаимодействии, всегда является полностью поляризованной левоспиральной частицей, а антинейтрино — правоспиральной частицей. Эти свойства нейтрино получили законченную формулировку в теории двухкомпонентного нейтрино Ландау — Ли — Янга — Салама [5—7]. Сохранение слабого векторного тока было установлено в работах [2, 8] (см. также [9]).

наций биспиноров  $\bar{l}\Gamma\nu_l$ , входящих в заряженный ток, входят комбинации биспиноров  $\bar{l}\Gamma l, \bar{\nu}_l\Gamma\nu_l$  ( $\Gamma = \gamma_\lambda, \gamma^5\gamma_\lambda$ ). Поскольку константа связи в лагранжиане (6.1.1) имеет размерность  $M^{-2}$ , то эта теория оказывается неперенормируемой (см. § 3.3).

Использование концепции калибровочных полей, которые вводятся при расширении симметрии с глобального до локального уровня, позволяет последовательно ввести в теорию промежуточные  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозоны и построить при этом перенормируемую теорию слабого взаимодействия, которая является, однако, не только теорией слабого взаимодействия, но и теорией электромагнитного взаимодействия, т. е. представляет собой теорию единого электрослабого взаимодействия (Вайнберг, Салам, Глэшоу [13—15])\*. В этой теории предсказан целый ряд новых явлений: существование слабых нейтральных токов, новых векторных промежуточных частиц  $W^\pm$  и  $Z$  и т. д., которые были подтверждены экспериментально. В 1973 г. были открыты нейтральные токи [20], а в 1983 г. — промежуточные векторные бозоны  $W^\pm$  и  $Z$  и измерены их массы [21, 22].

**6.1.2. Лагранжиан безмассовых лептонов и векторных калибровочных полей.** Как мы видели, в слабом взаимодействии участвуют только левые лептонные поля. В единой теории электрослабого взаимодействия левые заряженные лептоны и соответствующие им нейтрино объединяются в дублет

$$L_l = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{lL} \\ l_L \end{pmatrix}, \quad (6.1.5)$$

где  $\nu_{lL} = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\nu_l$ ,  $l_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)l$  ( $\nu_l$  и  $l$  — биспиноры Дирака для лептонов  $l = e, \mu, \tau$ ). В этой теории исходят из лагранжианов, не содержащих масс частиц (как лептонов, так и калибровочных полей). Массы частиц «возникают» в результате введения скалярного поля, с которым взаимодействуют лептоны и калибровочные поля. При этом важную роль играет механизм спонтанного нарушения симметрии (см. раздел 6.2.1).

Лагранжиан безмассовых левых лептонов определяется формулой

$$\mathcal{L}_0(L) = i \sum_l \bar{L}_l \gamma^\mu \partial_\mu L_l.$$

Правые заряженные лептоны образуют синглет  $R_l = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)l$  ( $l = e, \mu, \tau$ ; мы предполагаем, что правых нейтрино не существует). Свободный лагранжиан правых заряженных

\* Ранними работами по объединению слабого и электромагнитного взаимодействия являются [16—19].

безмассовых лептонов имеет вид

$$\mathcal{L}_0(R) = i \sum_l \bar{R}_l \gamma^\mu \partial_\mu R_l.$$

Таким образом, лагранжиан свободных безмассовых лептонов определяется формулой

$$\mathcal{L}_0(L, R) = i \sum_l \{ \bar{L}_l \gamma^\mu \partial_\mu L_l + \bar{R}_l \gamma^\mu \partial_\mu R_l \}. \quad (6.1.6)$$

Заметим, что это выражение не вещественно. Вещественный лагранжиан определяется формулой  $\frac{1}{2}(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0^*)$  (см. раздел 2.4.3). Однако оба выражения отличаются на полную дивергенцию, поэтому формально можно пользоваться выписанным выражением для  $\mathcal{L}_0$ . Лагранжиан  $\mathcal{L}_0$  инвариантен относительно преобразования

$$R_l \rightarrow R'_l = R_l, \quad L_l \rightarrow L'_l = e^{ig \frac{1}{2} \omega \tau} L_l, \quad (6.1.7)$$

де  $\tau_i$  — матрицы Паули;  $\omega_i$  — произвольный постоянный вектор;  $g$  — некоторая постоянная, в дальнейшем играющая роль константы взаимодействия. Эти преобразования образуют группу, которую мы будем называть группой лептонного изоспина и обозначать через  $SU(2)_\omega$ . Подчеркнем, что эта симметрия имеет место только для безмассовых лептонов. В этом случае левые заряженные лептоны и соответствующие им нейтрино входят в теорию на равных правах так же, как протон и нейтрон входят в теорию сильного взаимодействия. Поэтому можно говорить об изотопических дублетах левых заряженных лептонов и соответствующих им нейтрино и ввести изотопический спин левых лептонов, равный  $1/2$  (заряженные левые лептоны имеют проекцию изоспина  $-1/2$ , а соответствующие им нейтрино — проекцию  $1/2$ ). Правые заряженные лептоны представляют собой изотопический синглет.

Лагранжиан (6.1.6) инвариантен также по отношению к фазовым преобразованиям

$$R_l \rightarrow R'_l = e^{i \frac{1}{2} \omega Y_{Rl}} R_l, \quad L_l \rightarrow L'_l = e^{i \frac{1}{2} \omega Y_{Ll}} L_l. \quad (6.1.8)$$

Величина  $g'$ , как мы убедимся в дальнейшем, будет наряду с  $g$  иметь смысл безразмерной константы связи, а величины  $Y_R$ ,  $Y_L$  могут интерпретироваться как гиперзаряды правых и левых лептонов. Они имеют значения  $Y_R = -2$ ,  $Y_L = -1$  (см. раздел 6.2.3).

Преобразование (6.1.8) образует группу, которая называется группой лептонного гиперзаряда и обозначается  $U(1)_Y$ . Таким образом, лагранжиан свободных безмассовых лептонов

инвариантен относительно  $SU(2)_\omega \times U(1)_Y$  преобразований. Эта симметрия является глобальной. Мы сделаем теперь предположение, что имеет место и локальная инвариантность, в которой параметры  $\omega_i$  и  $\omega$  являются функциями координат и времени. В соответствии с результатами раздела 4.1.2 для этого необходимо ввести триплет  $W_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) и синглет  $B_\mu$  калибровочных векторных полей. При этом, чтобы ввести взаимодействие этих полей с лептонными полями, нужно заменить в лагранжиане (6.1.6) обычные производные  $\partial_\mu$  на ковариантные  $D_\mu$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{1}{2} \vec{\tau}^a \vec{W}_\mu^a - ig' \frac{1}{2} Y_L B_\mu, \quad (6.1.9)$$

если  $\partial_\mu$  действует на  $L$  и

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig' \frac{1}{2} Y_R B_\mu, \quad (6.1.10)$$

если  $\partial_\mu$  действует на  $R$ .

Лагранжиан самого калибровочного поля, согласно (4.1.55), имеет вид

$$\mathcal{L}(W, B) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (6.1.11)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g(W_\mu \times W_\nu)^a, \quad (W_\mu \times W_\nu)^a = \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (6.1.12)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

(напомним, что лагранжиан в такой форме приводит к уравнениям второго порядка для потенциалов  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$ ). Таким образом, лагранжиан безмассовых лептонов и калибровочных полей имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(L, R, W, B) + \mathcal{L}(W, B), \quad (6.1.13)$$

где

$$\mathcal{L}(L, R, W, B) = i \sum_l \bar{L}_l \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau^a W_\mu^a - \frac{i}{2} g' Y_L B_\mu \right) L_l + i \sum_l \bar{R}_l \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g' Y_R B_\mu \right) R_l.$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно локальных преобразований группы  $SU(2)_\omega \times U(1)_Y$  для лептонных (6.1.7), (6.1.8) и калибровочных полей (4.1.37). Для бесконечно малых  $\omega$  и  $\omega^a$  эти преобразования имеют вид

$$\delta W_\mu^a = W_\mu^a - W_\mu^a = \partial_\mu \omega^a + g \epsilon^{abc} W_\mu^b \omega^c \equiv \mathcal{D}_\mu^{ab} \omega^b, \quad (6.1.14)$$

$$\delta B_\mu = B'_\mu - B_\mu = \partial_\mu \omega, \quad \delta R_l = R'_l - R_l = ig' \frac{\omega}{2} Y_R R_l,$$

$$\delta L_l = L'_l - L_l = \left( ig \frac{\omega^a \tau^a}{2} + ig' Y \frac{\omega}{2} \right) L_l.$$

Кроме того, лагранжиан (6.1.13) посторен таким образом, чтобы он был инвариантен относительно глобальных фазовых преобразований лептонных полей

$$L_l \rightarrow L'_l = e^{i\alpha_l} L_l, \quad R_l \rightarrow R'_l = e^{i\alpha_l} R_l, \quad (6.1.15)$$

где  $\alpha_l$  — постоянные фазы, связанные с каждым сортом лептонов.

**6.1.3. Введение хиггсовского скалярного поля.** Введенные калибровочные поля  $W_\mu^a, B_\mu$ , так же как лептонные поля, предполагались безмассовыми. В действительности заряженные лептоны обладают массой\*. Мы хотим, чтобы с четырьмя калибровочными полями  $W_\mu^a, B_\mu$  были связаны заряженные  $W^\pm$ -бозоны, нейтральный  $Z$ -бозон и фотон.  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозоны обладают конечной массой. Поэтому наша теория должна быть модифицирована таким образом, чтобы в ней калибровочные поля могли иметь конечную массу. С этой целью должны быть введены добавочные поля, взаимодействие с которыми благодаря механизму спонтанного нарушения симметрии приводит к возникновению масс частиц, связанных с калибровочными полями\*\*.

В простейшем случае должно быть введено добавочное скалярное поле, так называемое скалярное поле Хиггса [33, 34], точнее говоря, должен быть введен изотопический дублет заряженных скалярных полей, аналогичный изотопическому дублету левых лептонов (см. также [35, 36]).

В этом разделе мы рассмотрим лагранжиан хиггсовского поля с учетом его взаимодействия с калибровочными и лептонными полями. Механизм спонтанного нарушения симметрии и возникновения масс у калибровочных полей и лептонов будет рассмотрен в следующем разделе.

Лагранжиан изотопического дублета

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_\uparrow \\ \varphi_\downarrow \end{pmatrix} \quad (6.1.16)$$

\* Нейтральные лептоны — нейтрино — в общем случае также могут иметь ненулевые массы [23—25].

\*\* Концепция спонтанного нарушения симметрии в статистической физике была развита Н. Н. Боголюбовым [26]. Им был разработан метод квазисредних, позволяющий единым образом рассматривать системы самой различной природы со спонтанно нарушенной симметрией. В релятивистской физике системы со спонтанно нарушенной симметрией впервые исследовались Голдстоуном и Намбу [27—29] (см. также [30—32]).

скалярных полей будем записывать в виде

$$\mathcal{L}(\varphi) = \partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - \lambda \left( \varphi^\dagger \varphi - \frac{1}{2} f^2 \right)^2, \quad (6.1.17)$$

где  $\lambda$  и  $f$  — некоторые константы. Этот лагранжиан инвариантен по отношению к глобальным преобразованиям группы  $SU(2)_w \times U(1)_\nu$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = e^{\frac{i}{2} \tau^a \omega^a} \varphi, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = e^{\frac{i}{2} g' \omega} \varphi \quad (6.1.18)$$

(так как величина  $g'$  входила в формулы (6.1.9), (6.1.10) с множителями  $Y_L$  и  $Y_R$ , то она фактически не была определена; в последней формуле мы считаем  $Y_\varphi = 1$  и этим фиксируем величину  $g'$ ). Чтобы лагранжиан (6.1.17) был инвариантен также и по отношению к локальным преобразованиям группы  $SU(2)_w \times U(1)_\nu$ , мы должны производные  $\partial_\mu$ , действующие на  $\varphi$ , в выражении для  $\mathcal{L}(\varphi)$  заменить, согласно разделу, 4.1.2, на  $D_\mu$ :

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau^a W_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu. \quad (6.1.19)$$

В результате мы приходим к следующему выражению для лагранжиана хиггсовского поля с учетом его взаимодействия с калибровочными полями:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, W, B) = & \left[ \left( \partial^\mu - \frac{i}{2} g \tau^a W^{a\mu} - \frac{i}{2} g' B^\mu \right) \varphi \right]^\dagger \times \\ & \times \left[ \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau^a W_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \varphi \right] - \lambda \left( \varphi^\dagger \varphi - \frac{1}{2} f^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

Этот лагранжиан будет приводить к возникновению масс у частиц калибровочного поля.

Чтобы возникали массы у заряженных лептонов в результате взаимодействия со скалярным полем, мы введем еще лагранжиан  $\mathcal{L}(L, R, \varphi)$  взаимодействия скалярных и лептонных полей

$$\mathcal{L}(L, R, \varphi) = -\sqrt{2} f^{-1} \sum_l m_l \{ (\bar{L}_l \varphi) R_l + \bar{R}_l (\varphi^\dagger L_l) \}, \quad (6.1.21)$$

где  $m_l$  — некоторые постоянные, которые, как мы увидим в дальнейшем, будут совпадать с массами лептонов.

Этот лагранжиан инвариантен по отношению к глобальной и к локальной группе  $SU(2)_w$ . Чтобы он был инвариантен по отношению к группе  $U(1)_\nu$ , необходимо, согласно (6.1.18), (6.1.8), выполнение следующего соотношения:

$$1 - Y_L + Y_R = 0. \quad (6.1.22)$$

Лагранжиан (6.1.21) также инвариантен относительно глобальных фазовых преобразований лептонных полей (6.1.15) (при этом считается, что скалярные поля  $\varphi$  не преобразуются).

Полный лагранжиан калибровочных, лептонных и скалярных полей определяется суммой

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(W, B) + \mathcal{L}(L, R, W, B) + \mathcal{L}(\varphi, W, B) + \mathcal{L}(L, R, \varphi). \quad (6.1.23)$$

Этот лагранжиан инвариантен по отношению к преобразованиям локальной группы  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ . В случае бесконечно малых  $\omega^a$ ,  $\omega$  эти преобразования определяются формулами (6.1.14) для калибровочных и лептонных полей и формулой

$$\delta\varphi = \varphi' - \varphi = \left( g \frac{1}{2} \omega^a \tau^a + g' \frac{1}{2} \omega \right) \varphi \quad (6.1.24)$$

в случае скалярных полей.

Лагранжиан (6.1.23) лежит в основе единой теории слабого и электромагнитного взаимодействия. Следует, однако, иметь в виду, что в то время как первые два слагаемых в  $\mathcal{L}$  непосредственно связаны со свойствами симметрии  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ , вторые два слагаемые в  $\mathcal{L}$ , связанные с введением скалярного поля, являются более модельными [37, 38].

Отметим, что лагранжиан самодействия скалярного поля мы выбрали пропорциональным четвертой степени поля с тем, чтобы константа  $\lambda$  была безразмерной и, следовательно, квантовая теория могла быть перенормируемой (см. § 3.3).

## § 6.2. Классическая теория электрослабого взаимодействия

**6.2.1. Спонтанное нарушение симметрии и возникновение масс частиц.** Рассмотрим сначала случай классических полей, когда путем выбора калибровочных параметров  $\omega^a$  можно обратить компоненту скалярного дублета  $\varphi_{\uparrow}$  в нуль, а компоненту  $\varphi_{\downarrow}$  сделать вещественной \*

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \varphi^* = \varphi_{\downarrow}.$$

В этом случае лагранжиан свободного скалярного поля с учетом его самодействия имеет вид

$$\mathcal{L}(\varphi) = \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \lambda \left( \varphi^2 - \frac{1}{2} f^2 \right)^2.$$

\* Изложение классической теории электрослабого взаимодействия см. также в [38, 41].

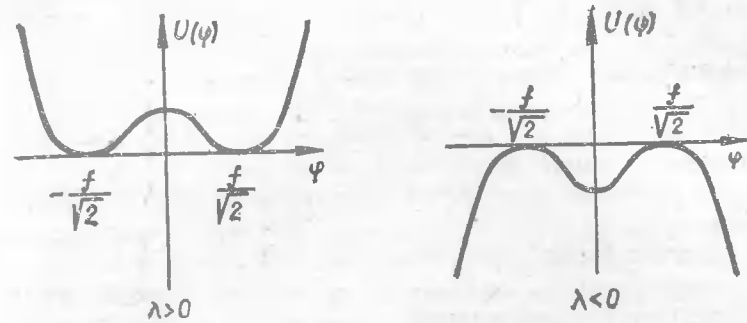


Рис. 44.

Ему соответствует уравнение движения поля

$$\partial^\mu \partial_\mu \varphi + 2\lambda \left( \varphi^2 - \frac{1}{2} f^2 \right) \varphi = 0. \quad (6.2.1)$$

Это уравнение имеет три решения, не зависящих от пространственно-временных координат

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = \pm \frac{f}{\sqrt{2}}. \quad (6.2.2)$$

Чтобы разъяснить различие между решениями, введем потенциальную энергию  $U(\varphi)$  для пространственно однородного поля

$$U(\varphi) = \lambda \left( \varphi^2 - \frac{1}{2} f^2 \right)^2.$$

Легко видеть, что экстремальные точки  $U(\varphi)$  совпадают с (6.2.2), причем для  $\lambda < 0$  решение  $\varphi_0 = 0$  соответствует минимуму, а решение  $\varphi_0 = \pm f/\sqrt{2}$  — максимуму; для  $\lambda > 0$ , напротив, решение  $\varphi_0 = 0$  соответствует максимуму, а  $\varphi_0 = \pm f/\sqrt{2}$  — минимуму (см. рис. 44). Согласно уравнению поля (6.2.1), величина  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0$  в случае малых  $\tilde{\varphi}$  удовлетворяет уравнению

$$\partial^\mu \partial_\mu \tilde{\varphi} - \lambda f^2 \tilde{\varphi} = 0,$$

в случае  $\varphi_0 = 0$  и уравнению

$$\partial^\mu \partial_\mu \tilde{\varphi} + 2\lambda f^2 \tilde{\varphi} = 0$$

в случае  $\varphi_0 = \pm f/\sqrt{2}$ . Отсюда мы видим, что при  $\lambda < 0$  колебания поля над вакуумом  $\varphi_0 = 0$  являются устойчивыми, причем масса частиц, связанных с этими колебаниями, вещественна и равна  $f\sqrt{-\lambda}$ . Напротив, колебания поля над состоянием  $\varphi_0 = \pm f/\sqrt{2}$  являются неустойчивыми и соответствуют

где  $\theta_W$  — некоторая константа. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0M}(W, B) = & \frac{1}{4} f^2 g^2 W_\mu^+ W^\mu + \frac{1}{8} f^2 g^2 \cos^2 \theta_W \times \\ & \times \left( 1 + \frac{g'}{g} \operatorname{tg} \theta_W \right) Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{8} f^2 g^2 \cos \theta_W \left( \operatorname{tg} \theta_W - \frac{g'}{g} \right) A_\mu A^\mu + \\ & + \frac{1}{4} f^2 g^2 \cos^2 \theta_W \left[ \left( 1 - \frac{g'^2}{g^2} \right) \operatorname{tg} \theta_W - \frac{g'}{g} (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_W) \right] A_\mu Z^\mu. \end{aligned}$$

Чтобы в этом выражении не возникали перекрестные слагаемые  $A_\mu Z^\mu$ , мы выберем угол  $\theta_W$  согласно условию

$$\operatorname{tg} \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (6.2.10)$$

(величина  $\theta_W$  называется углом Вайнберга). При этом в лагранжиане  $\mathcal{L}_{0M}$  обращаются в нуль слагаемые, пропорциональные  $A_\mu A^\mu$  и  $A_\mu Z^\mu$ , и  $\mathcal{L}_{0M}$  приобретает вид

$$\mathcal{L}_{0M}(W, B) = m_W^2 W_\mu^+ W^\mu + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \quad (6.2.11)$$

$$m_W = \frac{1}{2} f g, \quad m_Z = \frac{1}{2} f \sqrt{g^2 + g'^2}. \quad (6.2.12)$$

Учитывая формулы (6.1.12), (6.1.13), (6.2.4), мы можем выписать полный свободный (квадратичный) лагранжиан всех полей

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \tilde{\mathcal{L}}_0(W^\pm, Z, A) + \mathcal{L}_0(L, R) + \tilde{\mathcal{L}}_0(\varphi) + \mathcal{L}'_0, \quad (6.2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_0(W^\pm, Z, A) = & -\frac{1}{2} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^+ - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \\ & + m_W^2 W_\mu^+ W^\mu + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(\varphi) = \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^3 \partial^\mu \varphi^3 - \lambda f^2 \chi^2,$$

$$\mathcal{L}_0(L, R) = \sum_l \bar{l} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_l) l + i \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu \partial_\mu \nu_l$$

и

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu, \quad Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Из выражений для  $\mathcal{L}_0(W^\pm, Z, A)$  и  $\mathcal{L}_0(L, R)$  видно, что величины  $m_W$ ,  $m_Z$  и  $m_l$  представляют собой массы  $W$ -,  $Z$ - и  $l$ -частиц. Как мы видим, эти массы возникают в результате взаимодействия калибровочных и лептонных полей со скалярным полем благодаря механизму спонтанного нарушения симметрии ва-

куума. Масса частиц, связанных с векторным полем  $A_\mu$ , равна нулю. Поэтому поле  $A_\mu$  следует интерпретировать как электромагнитное поле.

**6.2.2. Фиксац я калибровки.** Как мы видели в § 4.2, при квантовании калибровочных полей возникает трудность, связанная с тем, что импульсы, канонически сопряженные полям  $W_0^a$ ,  $B_0$ , обращаются в нуль. Для устранения этой трудности мы добавляли к лагранжиану электромагнитного поля (и к лагранжиану неабелева калибровочного поля) слагаемое типа  $-\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2$ . Это слагаемое фиксировало калибровку электромагнитного поля и приводило к тому, что импульс, сопряженный полю  $A_0$ , был отличен от нуля. Аналогичная ситуация возникает и в теории электрослабого взаимодействия. Поэтому и в этой теории мы должны были бы добавить к лагранжиану (6.1.23) слагаемое типа  $-\frac{1}{\xi} \partial^\mu W_\mu^a \partial^\nu W_\nu^a$ , фиксирующее калибровку полей  $W_\mu^a$ .

При выборе лагранжиана, фиксирующего калибровку, следует, однако, помнить следующее обстоятельство. В соответствии с идеологией о спонтанном нарушении симметрии мы в лагранжиане (6.1.23) перешли к новым переменным  $\Phi$ ,  $\Phi^\pm$ ,  $\chi$ ,  $\varphi^3$ , в результате чего в свободном лагранжиане возникло интерференционное слагаемое  $\mathcal{L}'_0(\varphi, W)$ . Это слагаемое, как мы уже говорили, обращалось в нуль в классической теории при выборе калибровки  $\varphi^\dagger = \varphi^3 = 0$ . В квантовой теории такой выбор невозможен, если мы исходим из лагранжиана (6.1.23), так как поля представляют собой операторы. По этой причине в качестве лагранжиана, фиксирующего калибровку полей  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$ , мы выберем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_\xi(W, B, \varphi) = & -\frac{1}{\xi} (\partial^\mu W_\mu + \xi m_W \Phi) (\partial^\nu W_\nu^+ + \xi m_W \Phi^+) - \\ & - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu Z_\mu + \xi m_Z \varphi^3)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\nu A_\nu)^2, \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

где  $\xi$  — произвольный вещественный параметр. В терминах исходных полей  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$  этот лагранжиан, согласно (6.2.9), (6.2.8), можно записать в виде

$$\mathcal{L}'_\xi(W, B, \varphi) = -\frac{1}{2\xi} F^a F^a - \frac{1}{2\xi} F^2, \quad (6.2.16)$$

где

$$F^a = \partial^\mu W_\mu^a + \xi m_W \varphi^a, \quad F = \partial^\mu B_\mu - \xi m_W \frac{g'}{g} \varphi^3$$

(этот лагранжиан соответствует обобщенной лоренцевской калибровке [42], которая называется калибровкой  $m'$  Хоффта).

Объясним причину выбора лагранжиана, фиксирующего калибровку в таком виде [43, 44]. Прежде всего этот лагранжиан приводит к отличному от нуля импульсу, сопряженному полю  $W_0^a$  и  $B_0$ . Лагранжиан  $\mathcal{L}_\xi$  содержит слагаемые трех типов, которые пропорциональны  $\xi^{-1}$ ,  $\xi^0$ ,  $\xi$ . Не содержащие  $\xi$  слагаемые, согласно (6.2.15), сокращаются в суммарном лагранжиане с  $\mathcal{L}'_0(\varphi, W)$  (слагаемое в  $\mathcal{L}'_0$ , представляющее собой 4-дивергенцию, может быть, очевидно, отброшено). При  $f = 0$  лагранжиан  $\mathcal{L}_\xi$  переходит в стандартный лагранжиан, фиксирующий калибровку

$$\mathcal{L}_\xi|_{f=0} = -\frac{1}{\xi} \partial^\mu W_\mu \partial^\nu W_\nu^+ - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu Z^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

(при  $f = 0$  массы  $m_W$  и  $m_Z$  обращаются в нуль, см. (6.2.12)). Наконец, лагранжиан (6.2.15) будет приводить к пропагаторам векторных массивных частиц, которые при  $\xi < \infty$  будут убывать в области больших импульсов (в обычной теории векторных массивных полей (см. § 2.1, 2.2) пропагаторы не убывают в области больших импульсов). Это обстоятельство делает более очевидным свойство перенормируемости теории.

Лагранжиан  $\mathcal{L}_\xi$  квадратичен по полям. Поэтому, введя его в суммарный лагранжиан, мы модифицируем, члены квадратичные по полям. Легко видеть, что результирующий свободный (квадратичный) лагранжиан  $\mathcal{L}_0 = \tilde{\mathcal{L}}_0 + \mathcal{L}_\xi$  будет иметь вид

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(W^\pm) + \mathcal{L}_0(Z) + \mathcal{L}_0(A) + \mathcal{L}_0(l) + \mathcal{L}_0(\varphi), \quad (6.2.17)$$

где лагранжиан свободных массивных  $W^\pm$  бозонов определяется формулой

$$\mathcal{L}_0(W^\pm) = -\frac{1}{4} W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^+ - \frac{1}{\xi} \partial^\mu W_\mu \partial^\nu W_\nu^+ + m_W^2 W_\mu^+ W^\mu, \quad (6.2.18)$$

лагранжиан свободных массивных  $Z$  бозонов и фотонов — формулами

$$\mathcal{L}_0(Z) = -\frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu Z_\mu)^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu, \quad (6.2.19)$$

$$\mathcal{L}_0(A) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2$$

и, наконец, лагранжиан скалярных частиц определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\varphi) = & \partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi - \xi m_W^2 \Phi^+ \Phi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi^3)^2 - \frac{1}{2} \xi m_Z^2 \Phi^3 + \\ & + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

(лагранжиан свободных лептонов по-прежнему определяется формулой (6.2.14)). Мы видим, что масса скалярных  $\chi$ -бозонов равна

$$m_\chi = f \sqrt{2\xi}. \quad (6.2.21)$$

Массы же скалярных  $\Phi$  и  $\Phi^3$  бозонов равны соответственно  $m_\Phi = \sqrt{\xi} m_W$  и  $m_{\Phi^3} = \sqrt{\xi} m_Z$ . Они зависят от произвольного параметра  $\xi$ , и поэтому частицы, связанные с полями  $\Phi$  и  $\Phi^3$ , не являются физическими (они представляют собой «духи» скалярного поля, аналогичные «духам», связанным со скалярной и продольной компонентами 4-потенциала  $A_\mu$ ) [40, 43, 45].

**6.2.3. Лагранжианы взаимодействия.** В предыдущих разделах мы подробно изучили структуру лагранжиана свободных полей. В этом разделе рассмотрим лагранжианы взаимодействия полей и установим природу различных калибровочных полей. При этом следует различать взаимодействия лептонных и калибровочных полей, калибровочных и скалярных полей, лептонных и скалярных полей и, наконец, лагранжианы самодействия калибровочных и скалярных полей.

Лагранжиан взаимодействия калибровочных и лептонных полей, согласно (6.1.13), (6.2.9), определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(l, W) = & \frac{gg'(1+Y_L)}{4\sqrt{g^2+g'^2}} A_\mu \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1+\gamma^5) \nu_l - \\ & - \frac{gg'(1-Y_L+Y_R)}{4\sqrt{g^2+g'^2}} A_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu \gamma^5 l - \\ & - \frac{gg'(1-Y_L-Y_R)}{4\sqrt{g^2+g'^2}} A_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu l + \frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu (1+\gamma^5) \nu_l + \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1+\gamma^5) l + \frac{g^2-g'^2 Y_L}{4\sqrt{g^2+g'^2}} Z_\mu \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1+ \\ & + \gamma^5) \nu_l - \frac{g^2+g'^2 Y_L+g'^2 Y_R}{4\sqrt{g^2+g'^2}} Z_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu l - \\ & - \frac{g^2+g'^2 Y_L-g'^2 Y_R}{4\sqrt{g^2+g'^2}} Z_\mu \sum_l \bar{l} \gamma^\mu \gamma^5 l. \end{aligned}$$

Мы хотим интерпретировать безмассовое бозонное поле  $A_\mu$  как электромагнитное поле. Электромагнитное поле должно взаимодействовать только с заряженными лептонами. Поэтому первое слагаемое в этой формуле должно исчезать и, следовательно, должно выполняться условие

$$Y_L = -1. \quad (6.2.22)$$

Далее, так как электромагнитное взаимодействие сохраняет четность, то должно исчезать и второе слагаемое и, следовательно, должно выполняться условие

$$1 - Y_L + Y_R = 0 \quad (6.2.23)$$

(см. в этой связи (6.1.22)). Третье слагаемое в этой формуле представляет собой лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с заряженными лептонами

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(l, A) = -e\mathcal{J}_{em}^\mu A_\mu, \quad (6.2.24)$$

где

$$\mathcal{J}_{em}^\mu = \sum_e \bar{l}\gamma^\mu l \quad (6.2.25)$$

и электрический заряд  $e$  связан с константами связи  $g$  и  $g'$  (мы их будем называть слабыми зарядами) формулой

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g \sin \theta_W \quad (6.2.26)$$

(здесь  $e$ , в отличие от формул главы 3, означает модуль заряда электрона). Таким образом, лагранжиан взаимодействия калибровочных полей и лептонов можно представить в виде

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(l, W) = \mathcal{L}_{\text{int}}(W^\pm, l) + \mathcal{L}_{\text{int}}(Z, l) + \mathcal{L}_{\text{int}}(l, A), \quad (6.2.27)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(W^\pm, l) = \frac{g}{\sqrt{2}} (\mathcal{J}^\mu W_\mu + \mathcal{J}^{\mu+} W_\mu^+) \quad (6.2.28)$$

лагранжиан взаимодействия заряженных  $W^\pm$ -бозонов с лептонами,

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(Z, l) = \frac{g}{\cos \theta_W} \mathcal{J}_0^\mu Z_\mu \quad (6.2.29)$$

лагранжиан взаимодействия нейтральных  $Z$ -бозонов с лептонами и, наконец,  $\mathcal{L}_{\text{int}}(l, A)$  — лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля и заряженных лептонов, который определяется формулой (6.2.24). Здесь величины

$$\mathcal{J}^\mu = \frac{1}{2} \sum_l \bar{l}\gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu_l = \sum_l \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_{lL} \quad (6.2.30)$$

$$\mathcal{J}_0^\mu = \frac{1}{4} \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu_l + \sum_l (g_\nu \bar{l}\gamma^\mu l - g_A \bar{l}\gamma^\mu \gamma^5 l),$$

$$g_A = \frac{1}{4}, \quad g_\nu = \sin^2 \theta_W - \frac{1}{4} \quad (6.2.31)$$

называются слабыми токами — заряженными и нейтральными. Используя (6.2.25), выражение для  $\mathcal{J}_0^\mu$  можно представить в

виде

$$\mathcal{J}_0^\mu = \sin^2 \theta_W \mathcal{J}_{em}^\mu + \frac{1}{2} \sum_l (\bar{\nu}_l \gamma^\mu \nu_{lL} - \bar{l}_L \gamma^\mu l_L) \quad (6.2.31')$$

(подчеркнем, что в первое слагаемое входит электромагнитный ток заряженных лептонов, содержащий полные биспиноры лептонов, во второе же слагаемое входит ток, содержащий только левые биспиноры).

Рассмотрим теперь лагранжиан взаимодействия лептонов со скалярными бозонами  $\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi, l)$ . Согласно (6.1.21), (6.2.3), имеем

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi, l) = \mathcal{L}_{\text{int}}(\chi, l) + \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi^a, l), \quad (6.2.32)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\chi, l) = -\frac{1}{f} \sum_l m_l \chi(\bar{l}l) \quad (6.2.33)$$

лагранжиан взаимодействия лептонов с физическими скалярными частицами — хиггсовскими  $\chi$ -бозонами и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi^a, l) = & -i\varphi^3 \sum_l \frac{m_l}{f} (\bar{l}\gamma^5 l) + \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}} \Phi \sum_l \frac{m_l}{f} \bar{l}(1 + \gamma^5) \nu_l - \frac{i}{\sqrt{2}} \Phi^+ \sum_l \frac{m_l}{f} \bar{\nu}_l (1 - \gamma^5) l \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

лагранжиан взаимодействия лептонов со скалярными хиггсовскими «духами».

Лагранжиан взаимодействия калибровочных и скалярных полей определяется, согласно (6.1.20), формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(W, \varphi) = \mathcal{L}_{\text{int}}(W, \chi) + \mathcal{L}_{\text{int}}(W, \varphi^a),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(W, \chi) = & gm_W W_\mu^+ W^\mu \chi + \frac{g}{2 \cos \theta_W} m_Z Z_\mu Z^\mu \chi + \\ & + \frac{1}{4} g^2 W_\mu^+ W^\mu \chi^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \chi^2. \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

Лагранжиан взаимодействия  $W$ -,  $Z$ -бозонов и фотонов со скалярными хиггсовскими «духами» определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(W, \varphi) = \mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B, \varphi) + \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B, \varphi).$$

Здесь  $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B, \varphi)$  — лагранжиан «тройных» взаимодействий

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B, \varphi) = & iem_W A_\mu (W^\mu \Phi^+ + W^{\mu+} \Phi) + ie A_\mu (\Phi \partial^\mu \Phi^+ - \\ & - \Phi^+ \partial^\mu \Phi) - iem_Z \sin \theta_W Z_\mu (W^\mu \Phi^+ - W^{\mu+} \Phi) + \frac{i}{2} g \partial^\mu \varphi^3 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (W_\mu \Phi^+ - W_\mu^+ \Phi) - \frac{1}{2} g \partial^\mu \chi (W_\mu \Phi^+ + W_\mu^+ \Phi) + \\ & + ie \operatorname{ctg} 2\theta_W Z_\mu (\Phi \partial^\mu \Phi^+ - \Phi^+ \partial^\mu \Phi) \end{aligned} \quad (6.2.36)$$

и  $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B, \varphi)$  — лагранжиан «четверных» взаимодействий

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B, \varphi) = & \frac{i}{2} eg A_\mu \chi (W^\mu \Phi^+ - W^{\mu+} \Phi) - \\ & - \frac{1}{2} eg A_\mu \varphi^3 (W^{\mu+} \Phi + W^\mu \Phi^+) + e^2 A^\mu A_\mu \Phi^+ \Phi + \\ & + 2e^2 \operatorname{ctg} 2\theta_W A_\mu Z^\mu \Phi^+ \Phi + e^2 \operatorname{ctg}^2 2\theta_W Z_\mu Z^\mu \Phi^+ \Phi + \\ & + \frac{e^2}{2 \cos \theta_W} Z^\mu \varphi^3 (W_\mu^+ \Phi + W_\mu \Phi^+) + \frac{ie^2}{2 \cos \theta_W} Z^\mu \chi (W_\mu^+ \Phi - \\ & - W_\mu \Phi^+) + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \varphi^3 + \frac{1}{4} g^2 W_\mu^+ W^\mu (\varphi^3 + \Phi^+ \Phi). \end{aligned} \quad (6.2.37)$$

Лагранжиан самодействия калибровочных полей определяется, согласно (6.1.12), формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(W, B) = \mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B) + \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(3)}(W, B) = & i(eA^\nu + g \cos \theta_W Z^\nu) W^\mu W_{\mu\nu}^+ - i(eA^\nu + \\ & + g \cos \theta_W Z^\nu) W^{\mu+} W_{\mu\nu} - ie W^\mu W^{\nu+} F_{\mu\nu} - ig \cos \theta_W W^\mu W^{\nu+} Z_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.2.38)$$

лагранжиан «тройных» взаимодействий и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{(4)}(W, B) = & - \frac{1}{2} g^2 (W_\mu W^{\mu+} W_\nu W^{\nu+} - W_\mu W^\mu W^{\nu+} W_\nu^+) + \\ & + W_\mu^+ W^\mu (eA_\nu + g \cos \theta_W Z_\nu)^2 + \\ & + W_\mu^+ W_\nu (eA^\mu + g \cos \theta_W Z^\mu) (eA^\nu + g \cos \theta_W Z^\nu) \end{aligned} \quad (6.2.39)$$

лагранжиан «четверных» взаимодействий. Наконец, лагранжиан самодействия хиггсовских скалярных физических и дублетных полей определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi) = \mathcal{L}_{\text{int}}(\chi) + \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi^a, \chi),$$

где  $\mathcal{L}_{\text{int}}(\chi)$  — лагранжиан самодействия физических хиггсовских бозонов

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(\chi) = -\lambda f \chi^3 - \frac{1}{4} \lambda \chi^4 \quad (6.2.40)$$

и  $\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi^a, \chi)$  — лагранжиан самодействия, включающий нефизические хиггсовские бозоны

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi^a, \chi) = & -2\lambda f \chi \left( \Phi^+ \Phi + \frac{1}{2} \varphi^3 \right) - \lambda \left( \Phi^+ \Phi - \frac{1}{2} \varphi^3 \right)^2 - \\ & - \lambda \chi^2 \left( \Phi^+ \Phi + \frac{1}{2} \varphi^3 \right). \end{aligned} \quad (6.2.41)$$

В заключение этого раздела покажем, что электрический заряд частиц  $Q$  связан с лептонным гиперзарядом  $Y$  и проекцией лептонного изотопического спина  $I_3$  формулой Гелл — Манна, Нишиджимы

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (6.2.42)$$

С этой целью обратимся к лагранжиану (6.1.23) полей до фиксации калибровки. Как мы уже говорили, он инвариантен относительно преобразований группы  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  (6.1.7), (6.1.8). Найдем закон преобразования вещественных полей  $\varphi^0$ ,  $\varphi^a$  при преобразованиях этой группы. Дублет скалярных полей преобразуется, согласно (6.1.24), по закону

$$\delta\varphi = \frac{i}{2} (g\tau^a \omega^a + g'\omega) \varphi, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_\uparrow \\ \varphi_\downarrow \end{pmatrix}.$$

Выражая поля  $\varphi_\uparrow$ ,  $\varphi_\downarrow$  через вещественные поля  $\varphi^0$ ,  $\varphi^a$

$$\varphi_\uparrow = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^2 + i\varphi^1), \quad \varphi_\downarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^0 - i\varphi^3), \quad \varphi^0 = f + \chi$$

и используя явный вид матриц Паули

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

получаем закон преобразования полей  $\varphi^a$ ,  $\varphi^0$

$$\begin{aligned} \delta\varphi^a = & \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b \omega^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 \omega^a + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b \omega - \\ & - \frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 \omega, \end{aligned}$$

$$\delta\varphi^0 = -\frac{1}{2} \varphi^a \omega^a + \frac{1}{2} g' \varphi^3 \omega. \quad (6.2.43)$$

Поля  $W_\mu^a$  и  $B_\mu$  преобразуются согласно формулам

$$\delta W_\mu^a = g \varepsilon^{abc} W_\mu^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a, \quad \delta B_\mu = \partial_\mu \omega.$$

Калибровочные преобразования электромагнитного поля представляют собой частный случай этих преобразований и



соответствуют выбору  $\omega^a$ ,

$$\omega^1 = \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = \frac{g'}{g} \omega. \quad (6.2.44)$$

Действительно, легко видеть, что калибровочные поля преобразуются при этом по формулам

$$\delta W_\mu^a = g \varepsilon^{ab3} W_\mu^b \omega^3, \quad a = 1, 2, \\ \delta W_\mu^3 = \partial_\mu \omega^3, \quad \delta B_\mu = \partial_\mu \omega,$$

а скалярные поля по формулам

$$\delta \varphi^0 = \delta \varphi^3 = 0, \quad \delta \varphi^a = g \varepsilon^{ab3} \varphi^b \omega^3, \quad a = 1, 2.$$

Отсюда следует, что поля  $Z_\mu = W_\mu^3 \cos \theta_W - B_\mu \sin \theta_W$ ,  $A_\mu = W_\mu^3 \sin \theta_W + B_\mu \cos \theta_W$  преобразуются по формулам

$$\delta Z_\mu = 0, \quad \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad \Lambda = \frac{g}{e} \omega^3, \quad (6.2.45)$$

поля  $W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + i W_\mu^2)$ ,  $W_\mu^+$  — по формуле

$$\delta W_\mu = -ie \Lambda W_\mu, \quad \delta W_\mu^+ = ie \Lambda W_\mu^+ \quad (6.2.46)$$

и скалярные поля  $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi^1 + i \varphi^2)$ ,  $\Phi^+$ ,  $\chi$ ,  $\varphi^3$  — по формулам

$\delta \Phi = -ie \Lambda \Phi$ ,  $\delta \Phi^+ = ie \Lambda \Phi^+$ ,  $\delta \chi = \delta \varphi^3 = 0$ . Эти формулы показывают, что электрический заряд  $Q$  для  $Z$ - и  $\chi$ -бозонов равен нулю, а электрический заряд  $W$ ,  $\Phi$ -бозонов равен  $e$ .

В случае лептонов электромагнитные калибровочные преобразования, согласно (6.1.7), (6.1.8), имеют вид

$$\delta L_i = -ie \Lambda \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tau^3 \right) L_i, \quad \delta R_i = -ie \Lambda R_i. \quad (6.2.47)$$

Из этих формул следует, что электрические заряды левых и правых лептонов определяются так:

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_{iR} = -1$$

( $Y_L = -1$ ,  $Y_R = -2$ ). Эти формулы находятся в соответствии с формулой (6.2.42), если учесть, что изотопический спин левых лептонов равен  $1/2$ , а изотопический спин правых лептонов равен  $0$ .

**6.2.4. Введение фиктивных скалярных фермионов.** Как мы видели в § 4.2, при квантовании калибровочных полей в лоренцевской калибровке (в которой имеет место явная релятивистская инвариантность теории) возникают нефизические состояния — скалярные и продольные глюоны. В неабелевой

теории эти состояния нарушают условие физической унитарности матрицы рассеяния, согласно которому вероятность перехода из физического состояния во все возможные другие физические состояния должна равняться единице. Чтобы матрица рассеяния была унитарной в этом смысле, мы вводим дополнительные фиктивные скалярные фермионные поля («духи» Фадеева — Попова или шпурионы). Последние восстанавливали калибровочную инвариантность теории внутри лоренцевской калибровки и благодаря этому приводили к физической унитарности  $S$ -матрицы (напомним, что в кулоновской калибровке, в которой нет явной релятивистской инвариантности, нет необходимости во введении фиктивных фермионных «духов», так как в этой калибровке не возникает «духовых» состояний векторных калибровочных полей).

Аналогичная ситуация возникает и в единой теории электро-слабого взаимодействия. В этой теории нефизические состояния, связанные с продольными компонентами калибровочных полей  $W_\mu$ ,  $Z_\mu$ , становятся физическими: они соответствуют проекции спина, равной нулю для массивных  $W$ - и  $Z$ -бозонов. Нефизическими состояниями становятся три компоненты скалярного поля  $\varphi^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ). Кроме того, нефизические состояния связаны также со скалярными полями  $\partial^\mu W_\mu$ ,  $\partial^\mu Z_\mu$ ,  $\partial^\mu A_\mu$  и продольной компонентой поля  $A_\mu$ . Все эти нефизические состояния приводят к нарушению физического условия унитарности. Чтобы восстановить это условие, мы должны, как и в § 4.2, ввести дополнительные фиктивные фермионные поля, которые восстанавливали бы калибровочную инвариантность теории внутри обобщенной лоренцевской калибровки, соответствующей лагранжиану (6.2.15). При этом автоматически, так же как и в разделе 4.2.2, будет восстанавливаться физическая унитарность  $S$ -матрицы.

Лагранжиан  $\mathcal{L}_\xi$ , нарушающий калибровочную инвариантность теории, согласно (6.2.16), имеет вид

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{2\xi} F^a F^a - \frac{1}{2\xi} F^2,$$

$$F^a = \partial^\mu W_\mu^a + \frac{1}{2} \xi f g \varphi^a, \quad F = \partial^\mu B_\mu - \frac{1}{2} \xi f g' \varphi^3.$$

Калибровочные поля  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$  преобразуются при бесконечно малых калибровочных преобразованиях согласно формулам (6.1.14)

$$\delta W_\mu^a = g \varepsilon^{abc} \varphi^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a \equiv \mathcal{D}_\mu^{ab} \omega^b, \quad \delta B_\mu = \partial_\mu \omega,$$

а скалярные поля — согласно формулам (6.2.43)

$$\delta \varphi^a = \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b \omega^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 \omega^a + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b \omega -$$

$$-\frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 \omega,$$

$$\delta \varphi^0 = -\frac{1}{2} g \varphi^a \omega^a + \frac{1}{2} g' \varphi^3 \omega,$$

где  $\omega^a$  и  $\omega$  — бесконечно малые калибровочные функции, связанные с локальными преобразованиями группы соответственно  $SU(2)_\omega$  и  $U(1)_\varphi$ .

Для инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L} + \mathcal{L}_\xi$  относительно преобразований (6.1.14), (6.2.43) необходимо, чтобы вариации  $\delta F^a$  и  $\delta F$ , связанные с вариациями поля (6.1.14), (6.2.43), обращались в нуль:

$$\delta F^a = 0, \quad \delta F = 0.$$

Эти уравнения, согласно (6.2.16), имеют вид

$$\partial^\mu \{ \partial_\mu \omega^a + g \varepsilon^{abc} W_\mu^b \omega^c \} + \frac{1}{2} \xi f g \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b \omega^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 \omega^a + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b \omega - \frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 \omega \right\} \equiv \Delta F^a(\omega^c, \omega) = 0, \quad (6.2.48)$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \omega - \frac{1}{2} \xi f g' \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{3bc} \varphi^b \omega^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 \omega^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} g' \varphi^0 \omega \right\} \equiv \Delta F(\omega^c, \omega) = 0$$

и представляют собой связь калибровочных функций  $\omega^a$ ,  $\omega$  с функциями поля  $W$ ,  $\varphi$ , которая обеспечивает калибровочную инвариантность теории в рамках обобщенной лоренцевской калибровки.

Отметим, что здесь, как и в § 4.2, в уравнения для  $\omega^a$ ,  $\omega$  входят поля  $W$ ,  $\varphi$ , поэтому уравнения (6.2.48) нельзя рассматривать независимо от уравнений поля для  $W$  и  $\varphi$ . Отсюда следует, что калибровочные функции  $\omega^a$  и  $\omega$  должны рассматриваться как независимые поля, которые мы будем обозначать через  $\zeta^a(x)$ ,  $\zeta(x)$  ( $\zeta$  — бесконечно малый множитель, не зависящий от  $x$ ).

Чтобы получить уравнения (6.2.48) из лагранжева формализма, мы должны, кроме полей  $c^a$ ,  $c$ , ввести еще новые поля  $\bar{c}^a$ ,  $\bar{c}$ , варьируемые по которым будет приводить к уравнениям (6.2.48). Таким образом, мы приходим к лагранжиану

$$\mathcal{L}_c = -i \bar{c}^a \Delta F^a(c^b, c) - i \bar{c} \Delta F(c^b, c), \quad (6.2.49)$$

де

$$\Delta F^a(c^b, c) = \partial^\mu \{ \partial_\mu c^a + g \varepsilon^{abc} W_\mu^b c^c \} + \xi m_W \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b c^c + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} g \varphi^0 c^a + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b c - \frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 c \right\},$$

$$\Delta F(c^b, c) = \partial^\mu \partial_\mu c - \xi m_W \frac{g'}{g} \left\{ \frac{1}{2} g \varepsilon^{3bc} \varphi^b c^c + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} g \varphi^0 c^3 - \frac{1}{2} g' \varphi^0 c \right\}. \quad (6.2.50)$$

Этот лагранжиан приводит к уравнениям поля как для  $c^a$ ,  $c$ , так и для  $\bar{c}^a$ ,  $\bar{c}$ . Поля  $c$  и  $\bar{c}$ , как и в общей теории калибровочных полей, должны быть фермионными (в классической теории они должны антикоммутировать друг с другом и между собой, т. е. должны быть грасмановыми функциями; по этой причине, рассматривая поля  $c$ ,  $\bar{c}$  как «вещественные», в лагранжиан (6.2.49) мы ввели в качестве множителя  $i$ ).

Покажем, что полный эффективный лагранжиан, включающий поля  $c$ ,  $\bar{c}$ ,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_c, \quad (6.2.51)$$

инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\delta W_\mu^a = i \zeta (g \varepsilon^{abc} W_\mu^b c^c + \partial_\mu c^a) \equiv i \zeta \mathcal{O}_\mu^{ab} c^b, \quad \delta B_\mu = i \zeta \partial_\mu c,$$

$$\delta \varphi^a = i \zeta \left( \frac{1}{2} g \varepsilon^{abc} \varphi^b c^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 c^a + \frac{1}{2} g' \varepsilon^{ab3} \varphi^b c - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} g' \delta_{a3} \varphi^0 c \right),$$

$$\delta \varphi^0 = i \zeta \left( -\frac{1}{2} g \varphi^a c^a + \frac{1}{2} g' \varphi^3 c \right), \quad (6.2.52)$$

в которых роль калибровочных функций  $\omega^a$  и  $\omega$  играют величины

$$\omega^a = i \zeta c^a, \quad \omega = i \zeta c, \quad (6.2.53)$$

где  $\zeta$  — бесконечно малый не зависящий от  $x$  параметр, антикоммутирующий со всеми фермионными полями, включая  $c$  и  $\bar{c}$ , и с самим собой ( $\zeta^2 = 0$ ), следовательно, представляющий грасмановую переменную. Введение этой грасмановой переменной необходимо потому, что поля  $c^a$ ,  $c$  являются фермионными, а калибровочные функции  $\omega^a$ ,  $\omega$  соответствуют бозонным полям (необходимость трактовки  $c$  и  $\bar{c}$  как фермионных полей для обеспечения инвариантности лагранжиана (6.2.51) относительно калибровочных преобразований (6.2.52) будет разъяснена далее).

К преобразованиям (6.2.52) должен быть добавлен закон преобразования полей  $c$  и  $\bar{c}$

$$\delta \bar{c}^a = -\zeta \frac{1}{\xi} F^a, \quad \delta \bar{c} = -\zeta \frac{1}{\xi} F, \quad (6.2.54)$$

$$\delta c^a = -\frac{1}{2} \zeta g e^{abc} c^b c^c, \quad \delta c = 0,$$

который совместно с преобразованиями (6.2.52) и обеспечивает инвариантность лагранжиана (6.2.51). Для убедительности заметим предварительно, что, согласно § 6.1,  $\delta \mathcal{L} = 0$ . Далее, используя преобразование (6.2.54), имеем

$$\delta \mathcal{L}_\xi = i \frac{\zeta}{\xi} F^a \Delta F^a + i \frac{\zeta}{\xi} F \Delta F - i \bar{c}^a \delta \Delta F^a - i c \delta \Delta F,$$

$$\delta \mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{\xi} F^a \delta F^a - \frac{1}{\xi} F \delta F,$$

где  $\delta F^a$ ,  $\delta F$  — вариации функций  $F^a$  и  $F$  при преобразовании (6.2.52), (6.2.53). Согласно (6.2.48),

$$i \zeta \Delta F^a = \delta F^a, \quad i \zeta \Delta F = \delta F$$

и, следовательно,

$$\delta \mathcal{L}_\xi + \delta \mathcal{L}_c = -i \bar{c}^a \delta \Delta F^a - i c \delta \Delta F. \quad (6.2.55)$$

Таким образом, для доказательства инвариантности лагранжиана  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  необходимо убедиться в справедливости равенств

$$\delta \Delta F = 0, \quad \delta \Delta F^a = 0. \quad (6.2.56)$$

С этой целью заметим, что

$$\delta \Delta F = -\xi m_W \frac{g'}{g} \left\{ \frac{1}{2} g e^{3bc} \delta \varphi^b c^c + \frac{1}{2} g e^{3bc} \varphi^b \delta c^c + \frac{1}{2} g \delta \varphi^0 c^3 + \frac{1}{2} g \varphi^0 \delta c^3 - \frac{1}{2} g' c \delta \varphi^0 \right\}.$$

Подставляя сюда вариации (6.2.52), (6.2.53), получаем

$$\begin{aligned} \delta \Delta F = & -\xi m_W i g' \left\{ \frac{1}{2} e^{3bc} c^c \zeta \left[ \frac{1}{2} g e^{bad} \varphi^a c^d + \frac{1}{2} g \varphi^0 c^b + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} g' e^{ba3} \varphi^a c - \frac{1}{2} g' \delta_{b3} \varphi^0 c \left. \right] + \frac{1}{2} e^{3bc} \varphi^b c^c + \frac{1}{2} g \varphi^0 c^3 + \\ & + \frac{1}{2} c^3 \zeta \left[ \frac{1}{2} g' \varphi^3 c - \frac{1}{2} g c^a \varphi^a \right] - \\ & \left. - \frac{1}{2} \frac{g'}{g} c \zeta \left[ \frac{1}{2} g' \varphi^3 c - \frac{1}{2} g c^a \varphi^a \right] \right\}. \end{aligned}$$

Используя соотношение

$$e^{dcb} e^{bac} = \delta_{ca} \delta_{de} - \delta_{da} \delta_{ce},$$

а также грассманов характер величин  $\zeta$ ,  $c$ ,  $\bar{c}$ , получаем отсюда  $\delta \Delta F = 0$ .

Для доказательства соотношения  $\delta \Delta F^a = 0$  заметим, что, согласно (6.2.52), (6.2.53),

$$\begin{aligned} \delta \Delta F^a = & \partial^\mu \left\{ \partial_\mu \delta c^a + g e^{abc} W_\mu^b \delta c^c + i \zeta g e^{abc} (\partial_\mu c^b + g e^{bid} W_\mu^i c^d) c^c \right\} + \\ & + \xi m_W \left\{ \frac{1}{2} g e^{abc} \varphi^b \delta c^c + \frac{i}{2} g e^{abc} c^c \zeta \left( \frac{1}{2} g e^{bid} \varphi^i c^d + \frac{1}{2} g \varphi^0 c^b + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} g' e^{b13} \varphi^i c - \frac{1}{2} g' \delta_{b3} \varphi^0 c \left. \right) + \frac{1}{2} g \varphi^0 \delta c^a + \frac{i}{2} g \zeta \left( \frac{1}{2} g' \varphi^3 c - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g \varphi^b c^b \right) c^a + \frac{i}{2} g' e^{ab3} \zeta \left( \frac{1}{2} g e^{bid} \varphi^i c^d + \frac{1}{2} g \varphi^0 c^b + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} g' e^{b13} \varphi^i c - \frac{1}{2} g' \delta_{b3} \varphi^0 c \right) c - \\ & \left. - \frac{i}{2} g' \delta_{a3} \zeta \left( \frac{1}{2} g' \varphi^3 c - \frac{1}{2} g \varphi^b c^b \right) c \right\}. \end{aligned}$$

Для сокращения членов, не содержащих полей  $\varphi$  и  $W$ , необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\partial_\mu \delta c^a = -i \zeta g e^{abc} \partial_\mu c^b c^c \equiv -\frac{i}{2} \zeta g e^{abc} (\partial_\mu c^b c^c - \partial_\mu c^c c^b),$$

т. е. чтобы правая сторона равенства представляла собой производную по  $x_\mu$ . Это возможно только в том случае, если величины  $c^b$  и  $c^c$  антикоммутируют, при этом вариации  $\delta c^a = \frac{i}{2} g \zeta e^{abc} c^b c^c$  в соответствии с (6.2.54). Используя соотношение (6.2.54), а также грассманов характер величин  $\zeta$ ,  $c$ ,  $\bar{c}$ , нетрудно убедиться в том, что  $\delta \Delta F^a = 0$ , что и требовалось доказать. Таким образом, для обеспечения калибровочной инвариантности лагранжиана (6.2.51) в рамках калибровки  $m'$  Хуфга необходимо предполагать, что добавочные поля  $c$  и  $\bar{c}$  являются фермиевскими.

Преобразования (6.2.54) (они называются преобразованиями Бекки, Руе, Стори, Тютина, см. также § 4.2) замечательны тем, что преобразования для  $\bar{c}^a$  и  $\bar{c}$  определяются функциями  $F^a$ ,  $F$ , фиксирующими калибровку, а преобразования для  $c^a$  и  $c$  определяется самой группой, т. е. структурными константами (равными  $e^{abc}$  для группы  $SU(2)$  и 0 для группы  $U(1)$ ). Кроме того, преобразования (6.2.54) являются преобразованиями

суперсимметрии, так как они смешивают бозонные и фермионные поля.

Выпишем теперь явный вид лагранжиана  $\mathcal{L}_c$ . Подставляя (6.2.50) в (6.2.49), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_c = & ig\epsilon^{abc}\partial^\mu\bar{c}^a c^b W_\mu^c - \frac{i}{2}g\xi m_W \epsilon^{abc}\bar{c}^a c^b \varphi^c + \frac{i}{2}g\xi m_W \bar{c}^a c^a \chi + \\ & + \frac{i}{2}\xi m_W g' \epsilon^{ab3}\bar{c}^a c^b - \frac{i}{2}\xi m_W g' \bar{c}^3 c^3 \chi + \\ & + \frac{i}{2}\xi m_W g' \epsilon^{ab3}\bar{c}^a c^b + i\bar{c}^a \partial^\mu \partial_\mu c^a + i\xi m_W^2 \bar{c}^a c^a - \\ & - \frac{i}{2}\xi m_W g' (\bar{c}^3 c + \bar{c}c^3) + \bar{c}\partial_\mu \partial^\mu c. \end{aligned} \quad (6.2.57)$$

При  $\varphi = \chi = f = 0$  этот лагранжиан переходит в лагранжиан (4.2.6), соответствующий уравнениям поля первого порядка.

Члены, квадратичные по полям  $c, \bar{c}$ , не являются диагональными. Для диагонализации членов, квадратичных по полям  $c, \bar{c}$ , введем преобразование полей  $c^3, c$  и  $\bar{c}^3, \bar{c}$ , аналогичное преобразованию (6.2.9):

$$c^3 = c_A \sin \theta_W + c_Z \cos \theta_W, \quad c = c_A \cos \theta_W - c_Z \sin \theta_W,$$

$$\bar{c}^3 = \bar{c}_A \sin \theta_W + \bar{c}_Z \cos \theta_W, \quad \bar{c} = \bar{c}_A \cos \theta_W - \bar{c}_Z \sin \theta_W,$$

где  $\theta_W$  — угол Вайнберга. В результате получим

$$\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_0(c) + \mathcal{L}_{\text{int}}(c, W, \varphi),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(c) = & i\bar{c}^1 \partial_\mu \partial^\mu c^1 + i\bar{c}^2 \partial_\mu \partial^\mu c^2 + i\xi m_W^2 (\bar{c}^1 c^1 + \bar{c}^2 c^2) + \\ & + i\bar{c}_Z \partial_\mu \partial^\mu c_Z + i\xi m_Z^2 \bar{c}_Z c_Z + i\bar{c}_A \partial_\mu \partial^\mu c_A \end{aligned} \quad (6.2.58)$$

лагранжиан свободных фермионных «духов» и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(c, W, \varphi) = & ig\epsilon^{abc}\partial_\mu\bar{c}^a c^b W_\mu^c - \frac{i}{2}g\xi m_W \epsilon^{abc}\bar{c}^a c^b \varphi^c + \\ & + \frac{i}{2}g\xi m_W \bar{c}^a c^a \chi + \frac{i}{2}\xi m_W g' \epsilon^{ab3}\bar{c}^a c^b - \frac{i}{2}\xi m_W g' \bar{c}^3 c^3 \chi + \\ & + \frac{i}{2}\xi m_W g' \epsilon^{ab3}\bar{c}^a c^b \end{aligned} \quad (6.2.59)$$

лагранжиан взаимодействия фермионных «духов» с калибровочными полями и хиггсовскими скалярными полями  $\varphi^a, \chi$ . Величины  $m_W \sqrt{\xi}$  и  $m_Z \sqrt{\xi}$  (зависящие от калибровки) представляют собой массы скалярных фиктивных фермионов. Один

из скалярных фиктивных фермионов обладает нулевой массой. Эффективный лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  инвариантен также относительно глобальных преобразований (6.1.7), (6.1.18) группы  $SU(2) \times U(1)$  с параметрами  $\omega^a, \omega$ , не зависящими от  $x$ . При этом поля  $c$  и  $\bar{c}$  должны преобразовываться согласно формулам

$$\begin{aligned} \delta c^a = g\epsilon^{abc}c^b \omega^c, \quad \delta \bar{c}^a = g\epsilon^{abc}\bar{c}^b \omega^c, \\ \delta c = \delta \bar{c} = 0. \end{aligned} \quad (6.2.60)$$

В частности, лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  инвариантен относительно преобразований (6.2.44), если считать, что, согласно (6.2.60),

$$\delta c^a = e\Lambda\epsilon^{ab3}c^b, \quad \delta \bar{c}^a = e\Lambda\epsilon^{ab3}\bar{c}^b, \quad \delta c = 0, \quad \delta \bar{c} = 0,$$

где  $\Lambda = \text{const}$ .

Лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  инвариантен относительно фазовых преобразований только лептонных полей

$$L_i \rightarrow L'_i = e^{i\alpha_i} L_i, \quad R_i \rightarrow R'_i = e^{i\alpha_i} R_i, \quad (6.2.61)$$

где  $\alpha_i$  — постоянные фазы, связанные с каждым сортом лептонов ( $e, \mu, \tau$ ). Отсюда следует сохранение трех лептонных чисел ( $N_e, N_\mu, N_\tau$ ) [46, 47]. Считается, что  $N_e = 1$  для электрона и  $\nu_e$ ,  $N_e = 0$  для мюона и  $\nu_\mu$  и  $N_e = 0$  для  $\tau$ -лептона и  $\nu_\tau$ . Аналогично определяются квантовые числа  $N_\mu$  и  $N_\tau$  (для античастиц эти квантовые числа имеют противоположные знаки).

### § 6.3. Электрослабое взаимодействие кварков

**6.3.1. Лагранжиан безмассовых кварков, взаимодействующих с калибровочными полями.** Ранее рассматривали взаимодействие лептонов с векторными калибровочными полями. Но слабому взаимодействию подвержены также и адроны, а следовательно, и составляющие их кварки. Поэтому возникает вопрос о построении теории электрослабого взаимодействия кварков, который и рассмотрим в этом разделе [48].

Теория электрослабого взаимодействия кварков строится аналогично теории электрослабого взаимодействия лептонов. Будем сначала исходить из представления о безмассовых кварках. В этом случае, как и для лептонов, можно предположить, что кварки обладают  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  симметрией и группируются в левые дублеты и правые синглеты. В этом параграфе мы будем исходить из картины шести сортов («ароматов») кварков:  $u, d, s, t, b$ . Каждый из этих сортов может находиться в трех цветовых состояниях, причем сильное взаимо-

действие не меняет сорт кварка (но меняет цвет кварка), тогда как слабое взаимодействие меняет сорт кварка, но сохраняет его цвет. Электрические заряды  $u$ -,  $c$ -,  $t$ -кварков равны  $2/3$ , а заряды  $d$ -,  $s$ -,  $b$ -кварков равны  $-1/3$  (в единицах заряда протона). Шесть кварков разделяются на три левых дублета и шесть правых синглетов, которые преобразуются по фундаментальному представлению группы  $SU(2) \times U(1)$ :

$$q_{1L}^0 = \begin{pmatrix} u_L^0 \\ d_L^0 \end{pmatrix}, \quad u_R^0; \quad q_{2L}^0 = \begin{pmatrix} c_L^0 \\ s_L^0 \end{pmatrix}, \quad c_R^0; \quad q_{3L}^0 = \begin{pmatrix} t_L^0 \\ b_L^0 \end{pmatrix}, \quad t_R^0. \quad (6.3.1)$$

Кварки с зарядом  $2/3$  ( $u$ -,  $c$ -,  $t$ -кварки) называются верхними, а кварки с зарядом  $-1/3$  нижними (мы их будем обозначать соответственно через  $q^{(u)}$  и  $q^{(d)}$ ). Индекс 0 указывает на безмассовость кварка. Эта структура кварковых мультиплетов аналогична структуре лептонных мультиплетов

$$\begin{pmatrix} \nu_l & \nu_\mu & \nu_\tau \\ e & \mu & \tau \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u & c & t \\ d & s & b \end{pmatrix}.$$

Различие заключается в том, что количество лептонных синглетов было в 2 раза меньше, так как мы не вводили правых синглетов нейтрино.

Разбиение лептонов и кварков на три группы называется разбиением на поколения. Именно лептоны  $\nu_l$ ,  $e$  и кварки  $u$ ,  $d$  называют лептонами и кварками первого поколения, лептоны  $\nu_\mu$ ,  $\mu$  и кварки  $c$ ,  $s$  — лептонами и кварками второго поколения, наконец,  $\nu_\tau$ ,  $\tau$  и  $t$ ,  $b$  — лептонами и кварками третьего поколения. Таким образом, индекс 1, 2, 3 в формулах (6.3.1) нумерует поколения.

Предполагая, что глобальная группа симметрии  $SU(2) \times U(1)$  лагранжиана безмассовых кварков

$$\mathcal{L}_0(q) = i \sum_{j=1}^3 \bar{q}_{jL}^0 \gamma^\mu \partial_\mu q_{jL}^0 + i \sum_{j=1}^3 \bar{q}_{jR}^{0(u)} \gamma^\mu \partial_\mu q_{jR}^{0(u)} + i \sum_{j=1}^3 \bar{q}_{jR}^{0(d)} \gamma^\mu \partial_\mu q_{jR}^{0(d)}$$

при учете взаимодействия с калибровочными полями расширяется до локальной, мы приходим (как и в § 6.1) к лагранжиану

$$\mathcal{L}(W, B, q) = i \sum_{j=1}^3 \bar{q}_{jL}^0 \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau^a W_\mu^a - \frac{i}{2} g' Y_L B_\mu \right) q_{jL}^0 +$$

$$+ i \sum_{j=1}^3 \bar{q}_{jR}^{0(u)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g' Y_R^{(u)} B_\mu \right) q_{jR}^{0(u)} + i \sum_{j=1}^3 \bar{q}_{jR}^{0(d)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} g' Y_R^{(d)} B_\mu \right) q_{jR}^{0(d)}, \quad (6.3.2)$$

описывающему кварки и их взаимодействия с калибровочными полями. Здесь  $Y_L$  — гиперзаряд левых дублетов кварков;  $Y_R^{(u)}$  и  $Y_R^{(d)}$  — гиперзаряды правых верхних и нижних кварков с зарядами  $2/3$  и  $-1/3$  (значения  $Y_L$ ,  $Y_R^{(u)}$ ,  $Y_R^{(d)}$  будут определены далее). В первом слагаемом происходит суммирование по трем левым дублетам  $q_{jL}^0$  ( $j = 1, 2, 3$ ); во втором слагаемом — по трем правым верхним синглетам  $q_{jR}^{0(u)}$ :  $q_{1R}^{0(u)} = u_R^0$ ,  $q_{2R}^{0(u)} = c_R^0$ ,  $q_{3R}^{0(u)} = t_R^0$ . В последнем слагаемом суммирование происходит по трем нижним синглетам  $q_{jR}^{0(d)}$ :  $q_{1R}^{0(d)} = d_R^0$ ,  $q_{2R}^{0(d)} = s_R^0$ ,  $q_{3R}^{0(d)} = b_R^0$ . Константы  $g$  и  $g'$  здесь те же, что и в лагранжиане (6.1.13). В этих формулах происходит также суммирование по цветам кварков (цветовой индекс не выписывается).

Вводя вместо  $W_\mu^a$ ,  $B_\mu$  поля  $W_\mu$ ,  $Z_\mu$ ,  $A_\mu$  и подставляя явное выражение для левых дублетов и матриц  $\tau^a$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(W, B, q) = & \sum_{j=1}^3 \left\{ i \bar{q}_j^{0(u)} \gamma^\mu \partial_\mu q_j^{0(u)} + i \bar{q}_j^{0(d)} \gamma^\mu \partial_\mu q_j^{0(d)} + \right. \\ & + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{jL}^{0(u)} \gamma^\mu q_{jL}^{0(d)} W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{jL}^{0(d)} \gamma^\mu q_{jL}^{0(u)} W_\mu^- + \bar{q}_j^{0(u)} \gamma^\mu \gamma^5 q_j^{0(u)} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{4} (1 + Y_L + Y_R^{(u)}) e A_\mu + \frac{g^2 - g'^2 (Y_L - Y_R^{(u)})}{4 \sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu \right] - \\ & - \bar{q}_j^{0(d)} \gamma^\mu \gamma^5 q_j^{0(d)} \left[ \frac{1}{4} (1 - Y_L + Y_R^{(d)}) e A_\mu + \right. \\ & + \left. \frac{g^2 + g'^2 (Y_L - Y_R^{(d)})}{4 \sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu \right] - \bar{q}_j^{0(d)} \gamma^\mu q_j^{0(d)} \times \\ & \times \left[ \frac{1}{4} (1 - Y_L - Y_R^{(d)}) e A_\mu + \frac{g^2 + g'^2 (Y_L + Y_R^{(d)})}{4 \sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu \right] + \\ & \left. + \bar{q}_j^{0(u)} \gamma^\mu q_j^{0(u)} \left[ \frac{1}{4} (1 + Y_L + Y_R^{(u)}) e A_\mu + \frac{g^2 - g'^2 (Y_L + Y_R^{(u)})}{4 \sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu \right] \right\} \end{aligned}$$

(мы использовали при этом соотношение  $e = gg' / \sqrt{g^2 + g'^2}$ ).

Так как электромагнитное взаимодействие сохраняет пространственную четность, то должны отсутствовать слагаемые вида

$$\bar{q}_j^{0(u)} \gamma^\mu \gamma^5 q_j^{0(u)} A_\mu, \quad \bar{q}_j^{0(d)} \gamma^\mu \gamma^5 q_j^{0(d)} A_\mu,$$

Отсюда следует, что

$$1 + Y_L - Y_R^{(u)} = 0, \quad 1 - Y_L + Y_R^{(d)} = 0. \quad (6.3.3)$$

Так как лагранжиан электромагнитного взаимодействия верхних кварков должен определяться формулой

$$\frac{2}{3} e \sum_j \bar{q}_j^{0(u)} \gamma^\mu q_j^{0(u)} A_\mu,$$

то должно иметь место соотношение

$$\frac{1}{4} (1 + Y_L + Y_R^{(u)}) = \frac{2}{3}. \quad (6.3.4)$$

Поэтому

$$Y_L = \frac{1}{3}, \quad Y_R^{(u)} = \frac{4}{3}, \quad Y_R^{(d)} = -\frac{2}{3}. \quad (6.3.5)$$

Легко видеть, что лагранжиан электромагнитного взаимодействия нижних кварков соответствует, как и должно быть, частицам с зарядом  $-1/3$ . Эти значения гиперзарядов кварков находятся в соответствии с формулой Гелл — Манна, Нишиджимы  $Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$ .

Таким образом, лагранжиан  $\mathcal{L}(W, B, q)$  можно представить в виде

$$\mathcal{L}(W, B, q) = \mathcal{L}_0(q) + \mathcal{L}_{\text{int}}(W, B, q), \quad (6.3.6)$$

где

$$\mathcal{L}_0(q) = \sum_j (i \bar{q}_j^{0(u)} \gamma^\mu \partial_\mu q_j^{0(u)} + i \bar{q}_j^{0(d)} \gamma^\mu \partial_\mu q_j^{0(d)}) \quad (6.3.7)$$

лагранжиан свободных безмассовых кварков и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(W, B, q) = \sum_j \left\{ \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{jL}^{0(u)} \gamma^\mu q_{jL}^{0(d)} W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{q}_{jL}^{0(d)} \gamma^\mu q_{jL}^{0(u)} W_\mu^- + \right. \\ \left. + \bar{q}_j^{0(u)} \gamma^\mu q_j^{0(u)} \left[ e Q^{(u)} A_\mu + \frac{g}{4 \cos \theta_W} (1 - 4 Q^{(u)} \sin^2 \theta_W) z_\mu \right] + \right. \\ \left. + \bar{q}_j^{0(d)} \gamma^\mu q_j^{0(d)} \left[ e Q^{(d)} A_\mu - \frac{g}{4 \cos \theta_W} (1 + 4 Q^{(d)} \sin^2 \theta_W) z_\mu \right] + \right. \\ \left. + \frac{g}{4 \cos \theta_W} (\bar{q}_j^{0(u)} \gamma^\mu \gamma^5 q_j^{0(u)} - \bar{q}_j^{0(d)} \gamma^\mu \gamma^5 q_j^{0(d)}) z_\mu \right\} \end{aligned}$$

лагранжиан взаимодействия кварков с калибровочными полями. В этой формуле  $Q^{(u)} = \frac{2}{3}$  — заряд верхних кварков и  $Q^{(d)} = -\frac{1}{3}$  — заряд нижних кварков ( $Q = -1$  для электронов).

Вводя, как и для лептонов, электромагнитный ток кварков

$$J_{em}^\mu = - \sum_{j=1}^3 (Q^{(u)} \bar{q}_j^{0(u)} \gamma^\mu q_j^{0(u)} + Q^{(d)} \bar{q}_j^{0(d)} \gamma^\mu q_j^{0(d)}) \quad (6.3.8)$$

и слабые заряженный  $\mathcal{J}^\mu$  и нейтральный  $\mathcal{J}_0^\mu$  токи

$$\mathcal{J}^\mu = \sum_{j=1}^3 \bar{q}_{jL}^{0(d)} \gamma^\mu q_{jL}^{0(u)}, \quad \mathcal{J}_0^\mu = \mathcal{J}_3^\mu + \sin^2 \theta_W \mathcal{J}_{em}^\mu, \quad (6.3.9)$$

где

$$\mathcal{J}_3^\mu = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \bar{q}_{jL}^0 \gamma^\mu \tau^3 q_{jL}^0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (\bar{q}_{jL}^{0(u)} \gamma^\mu q_{jL}^{0(u)} - \bar{q}_{jL}^{0(d)} \gamma^\mu q_{jL}^{0(d)}).$$

представим лагранжиан  $\mathcal{L}_{\text{int}}(W, B, q)$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(W, B, q) = - e \mathcal{J}_{em}^\mu A_\mu + \frac{g}{\cos \theta_W} \mathcal{J}_0^\mu z_\mu + \\ + \frac{g}{\sqrt{2}} (\mathcal{J}^\mu W_\mu + \mathcal{J}^{\mu+} W_\mu^+). \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Эти формулы, описывающие взаимодействие кварков с калибровочными полями, аналогичны формулам (6.2.28) и (6.2.29), описывающим взаимодействие лептонов с калибровочными полями.

**6.3.2. Спонтанное нарушение симметрии и массы кварков.** Взаимодействие кварков со скалярными полями (которое, как мы увидим, приводит после спонтанного нарушения симметрии к возникновению масс кварков) вводится в основном так же, как и взаимодействие лептонов со скалярными полями. Отличие состоит в том, что в случае лептонов нейтрино оставались безмассовыми и, кроме того, предполагалось наличие трех точных законов сохранения лептонных чисел: электронного, мюонного и  $\tau$ -лептонного чисел. Поэтому исходные лептонные поля после взаимодействия с хиггсовскими полями не смешивались и приобретали вполне определенную массу. В случае же кварков не только нижние, но и верхние кварки должны приобрести (в результате взаимодействия с хиггсовскими полями и спонтанного нарушения симметрии) массу. Кроме того, благодаря слабому взаимодействию возможны процессы, переводящие кварки одного мультиплетта в кварки другого мультиплетта (так как в слабом взаимодействии, в отличие от сильного и электромагнитного взаимодействия, не сохраняются «ароматы», т. е. такие квантовые числа, как странность, чарм и т. д.).

Рассмотрим сначала механизм возникновения масс нижних кварков.  $SU(2) \times U(1)$  инвариантный лагранжиан взаимодействия кварков с хиггсовским дублетом скалярных полей

(см. (6.1.21)) имеет вид

$$\mathcal{L}^{(d)}(q, \varphi) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \{ (\bar{q}_{iL}^0 \varphi) \Gamma_{ij}^{(d)} q_{jR}^{0(d)} + \text{э. с.} \}, \quad (6.3.11)$$

где  $\Gamma_{ij}^{(d)}$  — элементы  $3 \times 3$  матрицы констант взаимодействия поля  $\varphi$  с кварками разных сортов (матрица  $\Gamma^{(d)}$  может быть комплексной). Чтобы выделить из этого лагранжиана массовые члены, квадратичные по полям кварков, заменим выражение (6.2.3) для  $\varphi$  на  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ . В результате получим

$$\mathcal{L}_m^{(d)}(q) = - \sum_{ij=1}^3 (\bar{q}_{iL}^{0(d)} M_{ij}^{(d)} q_{jR}^{0(d)} + \text{э. с.}) = - (\bar{q}_L^{0(d)} M^{(d)} q_R^{0(d)} + \text{э. с.}), \quad (6.3.12)$$

где

$$M^{(d)} = \frac{f}{\sqrt{2}} \Gamma^{(d)}, \quad \bar{q}_{L,R}^{0(d)} = (\bar{d}_{L,R}^0, \bar{s}_{L,R}^0, \bar{b}_{L,R}^0) \quad (6.3.13)$$

(заметим, что если бы в формуле (6.3.11) вместо  $q_R^{0(d)}$  мы поставили  $q_R^{0(u)}$ , то массовый лагранжиан не удовлетворял бы требованию сохранения электрического заряда). Матрица  $M^{(d)}$  называется массовой матрицей и может быть всегда представлена в виде

$$M^{(d)} = U_L^{(d) \dagger} m^{(d)} U_R^{(d)}, \quad (6.3.14)$$

где  $m^{(d)}$  — диагональная матрица

$$m^{(d)} = \begin{pmatrix} m_d & & 0 \\ & m_s & \\ 0 & & m_b \end{pmatrix}$$

с положительными элементами  $m_d, m_s, m_b$  и  $U_L^{(d)}, U_R^{(d)}$  — две унитарные матрицы. В результате массовый лагранжиан можно преобразовать к виду

$$\mathcal{L}_m^{(d)}(q) = - (\bar{q}_L^{(d)} m^{(d)} q_R^{(d)} + \text{э. с.}) = - (m_d \bar{d} \bar{d} + m_s \bar{s} \bar{s} + m_b \bar{b} \bar{b}), \quad (6.3.15)$$

где

$$q_L^{(d)} = U_L^{(d)} q_L^{0(d)}, \quad q_R^{(d)} = U_R^{(d)} q_R^{0(d)}. \quad (6.3.16)$$

Таким образом, величины  $m_d, m_s, m_b$  играют роль масс нижних кварков, а величины  $q_L^{(d)}, q_R^{(d)}$  — роль полей физических кварков с определенными массами (эти поля определяются с точностью до фазовых множителей).

Аналогичным образом можно придать массы и верхним кваркам. Для этого введем сопряженный дублет скалярных

полей

$$\varphi^c = i\tau^2 \varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi^0 + i\varphi^3 \\ -\varphi^2 + i\varphi^1 \end{pmatrix}, \quad \varphi^0 = f + \chi, \quad (6.3.17)$$

который преобразуется при преобразованиях группы  $SU(2)$  так же, как и дублет  $\varphi$  (гиперзаряд поля  $\varphi^c$  равен  $-1$ ).  $SU(2) \times U(1)$  — инвариантный лагранжиан взаимодействия кварков с хигсовским дублетом  $\varphi^c$  имеет вид

$$\mathcal{L}^{(u)}(q, \varphi) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \{ (\bar{q}_{iL}^0 \varphi^c) \Gamma_{ij}^{(u)} q_{jR}^{0(u)} + \text{э. с.} \} \quad (6.3.18)$$

где  $\Gamma_{ij}^{(u)}$  — элементы некоторой комплексной  $3 \times 3$  матрицы. Подставляя в эту формулу вместо  $\varphi^c$  дублет (см. (6.2.3))

$$\varphi^c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$

получаем массовый лагранжиан в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^{(u)}(q) &= - \sum_{i,j=1}^3 (\bar{q}_{iL}^{0(u)} M_{ij}^{(u)} q_{jR}^{0(u)} + \text{э. с.}) = \\ &= - (\bar{q}_L^{0(u)} M^{(u)} q_R^{0(u)} + \text{э. с.}), \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

где

$$M^{(u)} = \frac{f}{\sqrt{2}} \Gamma^{(u)}, \quad \bar{q}_{L,R}^{0(u)} = (\bar{u}_{L,R}^0, \bar{c}_{L,R}^0, \bar{t}_{L,R}^0). \quad (6.3.20)$$

Аналогично (6.3.14), матрицу  $M^{(u)}$  можно привести к диагональному виду с помощью преобразования

$$m^{(u)} = U_L^{(u)} M^{(u)} U_R^{(u) \dagger},$$

где

$$m^{(u)} = \begin{pmatrix} m_u & & 0 \\ & m_c & \\ 0 & & m_t \end{pmatrix}$$

( $m_u > 0, m_c > 0, m_t > 0$ ) и  $U_L^{(u)}, U_R^{(u)}$  — два унитарных преобразования. В результате получим

$$\mathcal{L}_m^{(u)}(q) = - (\bar{q}^{(u)} m^{(u)} q^{(u)} + \text{э. с.}) = - (m_u \bar{u} u + m_c \bar{c} c + m_t \bar{t} t), \quad (6.3.21)$$

где  $m_u, m_c, m_t$  — массы  $u$ -,  $c$ -,  $t$ -кварков и

$$q_L^{(u)} = U_L^{(u)} q_L^{0(u)}, \quad q_R^{(u)} = U_R^{(u)} q_R^{0(u)} \quad (6.3.22)$$

физические поля массивных кварков.

Таким образом, массовый лагранжиан верхних и нижних кварков определяется формулой

$$\mathcal{L}_m(q) = - \sum_q m_q \bar{q} q. \quad (6.3.23)$$

Легко видеть, что лагранжиан взаимодействия кварков с хиггсовским скалярным бозоном  $\chi$  определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(q, \chi) = - \frac{1}{f} \sum_q m_q \bar{q} q \chi. \quad (6.3.24)$$

**6.3.3. Лагранжиан и токи физических кварков.** В предыдущих разделах мы установили вид лагранжиана безмассовых кварков, взаимодействующих с калибровочными и скалярными полями и, кроме того, установили связь между полями физических кварков и полями безмассовых кварков, которая возникает в результате механизма спонтанного нарушения симметрии. Используя соотношения (6.3.16) и (6.3.22), мы получаем лагранжиан физических кварков, т. е. кварков, обладающих ненулевой массой.

Лагранжиан свободных физических кварков, очевидно, определяется формулой

$$\mathcal{L}_0(q) = \sum_q \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q) q. \quad (6.3.25)$$

Здесь происходит суммирование по всем сортам и по трем цветам физических кварков.

Лагранжиан взаимодействия физических кварков с калибровочными полями определяется формулой (6.3.10), в которой токи кварков должны быть выражены через физические поля кварков. Электромагнитный ток кварков, согласно (6.3.8), можно представить в виде

$$\mathcal{J}_{em}^\mu = - Q^{(u)} (\bar{q}_L^{(u)} \gamma^\mu q_L^{(u)} + \bar{q}_R^{(u)} \gamma^\mu q_R^{(u)}) + (u \rightarrow d).$$

Используя формулы (6.3.16), (6.3.22), получаем

$$\mathcal{J}_{em}^\mu = - Q^{(u)} \bar{q}^{(u)} \gamma^\mu q^{(u)} - Q^{(d)} \bar{q}^{(d)} \gamma^\mu q^{(d)}. \quad (6.3.26)$$

Аналогичные преобразования легко сделать для нейтрального тока кварков. В результате получим

$$\mathcal{J}_3^\mu = \mathcal{J}_3^\mu + \sin^2 \theta_W \mathcal{J}_{em}^\mu, \quad (6.3.26')$$

$$\mathcal{J}_3^\mu = \frac{1}{2} \bar{q}_L \gamma^\mu \tau^3 q_L = \frac{1}{2} \bar{q}_L^{(u)} \gamma^\mu q_L^{(u)} - \frac{1}{2} \bar{q}_L^{(d)} \gamma^\mu q_L^{(d)}.$$

Таким образом, выражения для электромагнитного и нейтрального токов не меняются при переходе от безмассовых полей к физическим полям кварков. Это связано с тем, что в электромагнитном и нейтральном токах не перепутываются верхние и нижние кварки.

Перейдем, наконец, к нахождению выражения для заряженного тока в терминах физических полей кварков. Из формул (6.3.16) и (6.3.22) следует, что

$$\mathcal{J}^\mu = \bar{q}_L^{(u)} U_L^{(u)+} \gamma^\mu U_L^{(d)} q_L^{(d)}$$

или

$$\mathcal{J}^\mu = \bar{q}_L^{(u)} U \gamma^\mu q_L^{(d)}, \quad (6.3.27)$$

где  $U = U_L^{(u)+} U_L^{(d)}$  — унитарная матрица, называемая матрицей смешивания. Ее конкретный вид определяет структуру слабого заряженного тока. Отличные от нуля недиагональные элементы матрицы  $U$  будут приводить к нарушению в слабом взаимодействии законов сохранения таких квантовых чисел, как странность, чарм и др. Рассмотрим сначала случай, когда смешиваются четыре кварка ( $u$ -,  $d$ -,  $s$ -,  $c$ -кварки, [48])

$$U = \begin{pmatrix} U_c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.3.28)$$

где  $U_c$  —  $2 \times 2$  матрица смешивания кварков ( $u$ ,  $c$ ) и ( $d$ ,  $s$ ). Всякая унитарная  $n \times n$  матрица характеризуется  $n^2$  вещественными параметрами. В случае  $n = 2$  в качестве этих параметров можно выбрать угол  $\theta_c$  и три фазы  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ , и представить матрицу  $U_c$  в виде:

$$U_c = U_1^\dagger O_c U_2, \quad O_c = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}, \quad (6.3.29)$$

где

$$U_1 = e^{i\alpha_0} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2} \end{pmatrix}.$$

Подставляя (6.3.28) в (6.3.27) и переопределяя поля  $q_L^{(u)}$ ,  $q_L^{(d)}$

$$q_L^{(u)} \rightarrow U_1 q_L^{(u)}, \quad q_L^{(d)} \rightarrow U_2 q_L^{(d)},$$

получаем

$$\mathcal{J}^\mu = \bar{q}_L^{(u)} O_c \gamma^\mu q_L^{(d)} + \bar{t}_L \gamma^\mu b_L,$$

где  $\bar{q}_L^{(u)} = (\bar{u}_L, \bar{c}_L)$ ,  $q_L^{(d)} = (d_L, s_L)$ . Очевидно, что при указанном переопределении полей электромагнитный и нейтральный токи, а также свободный лагранжиан физических кварков не меняются.

Используя явное выражение для матрицы  $O_c$ , имеем

$$\mathcal{J}^\mu = \bar{u}_L \gamma^\mu d'_L + \bar{c}_L \gamma^\mu s'_L + \bar{t}_L \gamma^\mu b_L, \quad (6.3.30)$$

где

$$d'_L = d_L \cos \theta_c + s_L \sin \theta_c, \quad s'_L = s_L \cos \theta_c - d_L \sin \theta_c. \quad (6.3.31)$$



Угол  $\theta_c$  называется углом Кабибо [50]. Он равен  $\theta_c = 13^\circ$  ( $\sin \theta_c = 0,226 + 0,009$ ) [10]. Таким образом, в выражении для заряженного тока вошли суперпозиции  $d$ - и  $s$ -кварков. Благодаря этому в процессах слабого взаимодействия, обусловленных обменом заряженным  $W$ -бозоном при  $\theta_c \neq 0$ , происходит нарушение законов сохранения странности  $s$  и чарма  $c$ , которые имели место в сильном взаимодействии (очевидно, что в низшем порядке теории возмущений  $\Delta s = 0, \pm 1$  и  $\Delta c = 0, \pm 1$ ).

Отметим, что найденный нами лагранжиан не содержит комплексных констант связи и, следовательно, является  $T$ -инвариантным, а поэтому является также и  $CP$ -инвариантным (в силу  $CPT$ -теоремы). С другой стороны, в слабом взаимодействии с участием странных кварков  $s$  нарушается  $CP$ -инвариантность. Покажем, что это нарушение можно объяснить, если ввести смешивание в системе шести кварков. В этом случае  $3 \times 3$  матрица смешивания  $U$  зависит от девяти вещественных параметров. В качестве параметров можно выбрать три угла Эйлера  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  ортогонального преобразования и шесть фаз  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) унитарных преобразований. Пять фаз могут быть устранены переопределением кварковых полей без изменения электромагнитного и нейтрального токов. Остальные четыре параметра (три угла  $\vartheta_i$  и фаза  $\delta$ ) определяют существенную зависимость матрицы смешивания  $U$  от физических параметров. Согласно [49], матрица  $U$  представляется в виде

$$U = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 e^{i\delta} \\ s_1 s_2 & -c_1 s_2 c_3 - c_2 s_3 e^{i\delta} & -c_1 s_2 s_3 + c_2 c_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (6.3.32)$$

где  $c_i = \cos \vartheta_i$ ,  $s_i = \sin \vartheta_i$ . Наличие фазы  $\delta$  в лагранжиане заряженного тока и обуславливает нарушение  $CP$ -инвариантности, свидетельствующее о том, что число кварков должно быть больше четырех.

Матрица  $U$  переходит в матрицу (6.2.28), если положить  $\vartheta_1 = \theta_c$ ,  $\vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$ ,  $\delta = 0$ .

## § 6.4. Квантовая теория электрослабого взаимодействия

**6.4.1. Квантование свободных полей.** Имея лагранжиан электрослабого взаимодействия, мы можем построить, применяя процедуру канонического квантования, квантовую теорию электрослабого взаимодействия. В этом и следующем разделах мы рассмотрим свободные поля, а далее построим матрицу  $S$ , которая описывает различные процессы рассеяния, обусловленные электрослабым взаимодействием.

Начнем с квантования свободного поля  $Z$ -бозонов. Лагранжиан свободного поля  $Z$ -бозонов определяется, согласно (6.2.19), формулой

$$\mathcal{L}_0(Z) = -\frac{1}{4}(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu Z_\mu)^2 + \frac{1}{2}m_Z^2 Z_\mu Z^\mu. \quad (6.4.1)$$

Уравнения поля, соответствующие этому лагранжиану, имеют вид

$$\partial^\mu \partial_\mu Z_\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\nu \partial^\mu Z_\mu + m_Z^2 Z_\nu = 0. \quad (6.4.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$(\partial^\nu \partial_\nu + m_Z^2 \xi) \partial^\mu Z_\mu = 0.$$

Если мы будем считать в соответствии с этим уравнением  $\partial^\mu Z_\mu = 0$ , то уравнение (6.4.2) перейдет в уравнение для векторного поля разд. 2.2.1. При этом мы исключаем из рассмотрения поле  $\partial^\mu Z_\mu$ , частицы которого обладают нулевым спином. В квантовой теории, в которой поля  $Z_\mu(x)$  представляют собой операторы, а перестановочные соотношения находятся на основе лагранжиана (6.4.1) (см. ниже), мы не можем считать  $\partial_\mu Z^\mu = 0$ .

Для установления одновременных перестановочных соотношений для поля  $Z_\mu$  найдем обобщенные импульсы  $\partial \mathcal{L}_0 / \partial \partial_0 Z_\mu$ , соответствующие обобщенным координатам  $Z_\mu$ . Согласно (6.4.1), имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_0 Z_0} = -\frac{1}{\xi}(\partial_0 Z^0 + \partial_k Z^k), \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_0 Z_k} = \partial_0 Z_k - \partial_k Z_0.$$

Поэтому, учитывая, что обобщенные координаты  $Z_\mu(x)$  коммутируют друг с другом в один и тот же момент времени

$$[Z_\mu(x), Z_\nu(x')]_{t=t'} = 0, \quad (6.4.3)$$

и принимая во внимание, что

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}_0(x)}{\partial \partial_0 Z_k}, Z_l(x') \right]_{t=t'} = -i \delta_{kl} \delta(x - x'),$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}_0(x)}{\partial \partial_0 Z_0}, Z_0(x') \right]_{t=t'} = -i \delta(x - x'),$$

получаем

$$[\partial_0 Z_\mu(x), Z_\nu(x')]_{t=t'} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu \\ -i \delta_{kl} \delta(x - x'), & \mu = k, \nu = l, \\ i \xi \delta(x - x'), & \mu = \nu = 0. \end{cases} \quad (6.4.4)$$

Подчеркнем, что эти формулы, как и уравнения поля (6.4.2), относятся к гейзенберговскому представлению свободного поля  $Z$ -бозонов, в котором операторы поля зависят от времени.

Так как поля  $Z_\mu(x)$  удовлетворяют уравнению (6.4.2), то разновременной коммутатор  $[Z_\mu(x), Z_\nu(x')]$  удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \partial^\lambda \partial_\lambda \delta_\rho^\mu - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\rho \partial^\mu + m_Z^2 \delta_\rho^\mu \right\} [Z_\mu(x), Z_\nu(x')] = 0.$$

Коммутатор  $[Z_\mu(x), Z_\nu(x')]$  однозначно определяется этим уравнением и начальными условиями (6.4.3), (6.4.4). Поскольку начальные условия представляют собой  $c$ -числовые функции, то и коммутатор  $[Z_\mu(x), Z_\nu(x')]$  должен быть  $c$ -числовой функцией

$$[Z_\mu(x), Z_\nu(x')] = i \Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi). \quad (6.4.5)$$

Покажем, что функция  $i \Delta_{\mu\nu}$ , где

$$\Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4 k e^{-ik(x-x')} \left\{ \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{1}{m_Z^2 - k^2 \xi^{-1}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\} \quad (6.4.6)$$

и контур  $C_0$  в плоскости  $k_0$  (см. рис. 1) охватывает полюса подынтегрального выражения  $k_0 = \pm \sqrt{m_Z^2 + k^2} \equiv \pm k_{01}$  и  $k_0 = \pm \sqrt{\xi m_Z^2 + k^2} \equiv \pm k_{02}$  и обходится по часовой стрелке, удовлетворяет волновому уравнению (6.4.2) и начальным условиям (6.4.4) (полюсов  $k_0 = \pm |k|$  в подынтегральном выражении нет). Действительно,

$$\begin{aligned} & \left\{ \partial^\lambda \partial_\lambda \delta_\rho^\mu \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\rho \partial^\mu + m_Z^2 \delta_\rho^\mu \right\} \Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4 k e^{-ik(x-x')} \left\{ g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} + \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

(слагаемое  $g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2}$  происходит из поперечной части функции  $\Delta_{\mu\nu}$ , а слагаемое  $\frac{k_\rho k_\nu}{k^2}$  — из продольной части). Так как подынтегральное выражение представляет собой аналитическую функцию  $k_0$ , не имеющую полюсов внутри контура  $C_0$ , то интеграл в правой части выписанного равенства обращается в нуль. Убедимся теперь, что удовлетворяются также одновременные перестановочные соотношения (6.4.4). Действительно,

используя формулу

$$\oint \frac{g(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum \frac{g(z_i)}{f'(z_i)},$$

(суммирование происходит по простым нулям  $z_i$  аналитической функции  $f(z)$ , содержащимся внутри контура интегрирования;  $g(z)$  — аналитическая функция внутри контура интегрирования), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi)_{t=t'} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k (-2\pi i) e^{ik(x-x')}, \\ & \left\{ -\frac{1}{2k_{01}} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)_{k_0=k_{01}} + \frac{1}{2k_{01}} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)_{k_0=-k_{01}} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2k_{02}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Big|_{k_0=k_{02}} + \frac{1}{2k_{02}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Big|_{k_0=-k_{02}} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi)}{\partial t} \Big|_{t=t'} &= \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int d^3 k e^{ik(x-x')} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right)_{k_0=k_{01}} + \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right)_{k_0=-k_{01}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \Big|_{k_0=k_{02}} + \frac{1}{2} \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \Big|_{k_0=-k_{02}} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$i \frac{\partial \Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi)}{\partial t} \Big|_{t=t'} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ -i \delta_{kl} \delta(x - x'), & \mu = l, \quad \nu = k, \\ i \xi \delta(x - x'), & \mu = \nu = 0, \end{cases}$$

что находится в соответствии с формулой (6.4.4). Таким образом, разновременной коммутатор поля  $Z$ -бозонов определяется формулами (6.4.5), (6.4.6).

Определим теперь вакуум  $\Phi_0$  поля  $Z$ -бозонов формулой

$$Z_\mu^{(+)}(x) \Phi_0 = 0, \quad (6.4.7)$$

где  $Z_\mu^{(+)}(x)$  — положительно частотная часть поля  $Z_\mu(x)$ . Функция распространения (пропагатор) поля  $Z_\mu(x)$  определяется формулой

$$i \Delta_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi) = (\Phi_0, T \{ Z_\mu(x) Z_\nu(x') \} \Phi_0) \quad (6.4.8)$$

или, учитывая определение вектора состояния вакуума, формулой

$$i \Delta_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi) = \begin{cases} [Z_\mu^{(+)}(x), Z_\nu^{(-)}(x')], & t > t', \\ -[Z_\mu^{(-)}(x), Z_\nu^{(+)}(x')], & t < t'. \end{cases}$$

Используя определение перестановочной функции  $\Delta_{\mu\nu}(x - x'; \xi)$ , имеем отсюда

$$\Delta_{\mu\nu}^c(x - x'; \xi) = \begin{cases} \Delta_{\mu\nu}^{(+)}(x - x'; \xi), & t > t', \\ -\Delta_{\mu\nu}^{(-)}(x - x'; \xi), & t < t' \end{cases}$$

(знаки «+» и «-» служат для обозначения положительно и отрицательно частотных частей функции  $\Delta_{\mu\nu}$ ). Поэтому, согласно (6.4.6),

$$\Delta_{\mu\nu}^c(x; \xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4k e^{-ikx} \left\{ \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{1}{m_Z^2 - k^2 \xi^{-1}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\},$$

где контур интегрирования в плоскости  $k_0$  изображен на рис. 1. Отсюда следует, что фурье-компонента функции  $\Delta_{\mu\nu}^c(k; \xi)$

$$\Delta_{\mu\nu}^c(k; \xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ikx} \Delta_{\mu\nu}^c(k; \xi) \quad (6.4.9)$$

определяется формулой

$$\Delta_{\mu\nu}^c(k; \xi) = \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{1}{m_Z^2 - k^2 \xi^{-1}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (6.4.10)$$

(при этом необходимо помнить, что  $k^2 \rightarrow k^2 + i0$ , см. раздел 2.2.3). Мы видим, что при  $\xi < \infty$  пропагатор убывает в области больших  $k$ . При  $\xi = 1$  пропагатор соответствует фейнмановской калибровке

$$\Delta_{\mu\nu}^c(k; 1) = \frac{g_{\mu\nu}}{m_Z^2 - k^2}.$$

При  $\xi = 0$  пропагатор соответствует калибровке Ландау

$$\Delta_{\mu\nu}^c(k; 0) = \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right).$$

Наконец, при  $\xi = \infty$  пропагатор не убывает в области больших  $k$  и имеет вид

$$\Delta_{\mu\nu}^c(k; \infty) = \frac{1}{m_Z^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right).$$

Он совпадает с пропагатором векторного поля частиц со спином 1 (уравнение Прока; см. раздел 2.2.1).

Рассмотрим теперь свободное поле  $W$ -бозонов. Лагранжиан этого поля, согласно (6.2.18), имеет вид

$$\mathcal{L}_0(W) = -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) (\partial^\mu W^{\nu+} - \partial^\nu W^{\mu+}) + m_W^2 W_\mu^+ W^\mu - \frac{1}{\xi} \partial^\mu W_\mu \partial^\nu W_\nu^+, \quad (6.4.11)$$

Поступая так же, как и в случае  $Z$ -бозонов, отсюда находим уравнения поля

$$\partial^\mu \partial_\mu W_\nu - \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial_\nu \partial^\mu W_\mu + m_W^2 W_\nu = 0 \quad (6.4.12)$$

и одновременные перестановочные соотношения

$$[W_\mu(x), W_\nu^+(x')] = i\Delta_{\mu\nu}^{W^c}(x - x'; \xi), \quad (6.4.13)$$

$$[W_\mu(x), W_\nu(x')] = [W_\mu^+(x), W_\nu^+(x')] = 0,$$

где функция  $\Delta_{\mu\nu}^{W^c}$  определяется формулой (6.4.6) с заменой  $m_Z$  на  $m_W$ .

Определяя вакуум поля  $W$ -бозонов формулой

$$W_\mu^{(+)}(x) \Phi_0 = W_\mu^{+(-)}(x) \Phi_0 = 0, \quad (6.4.14)$$

для пропагаторов получаем выражения

$$\underline{W_\mu(x) W_\nu^+(x')} \equiv (\Phi_0, T \{W_\mu(x) W_\nu^+(x')\} \Phi_0) = i\Delta_{\mu\nu}^{W^c}(x - x'; \xi),$$

$$\underline{W_\mu(x) W_\nu(x')} = \underline{W_\mu^+(x) W_\nu^+(x')} = 0, \quad (6.4.15)$$

где функция  $\Delta_{\mu\nu}^{W^c}$  определяется формулой (6.4.10) с заменой  $m_Z$  на  $m_W$ .

Пропагатор электромагнитного поля определяется формулой (6.4.53), а пропагатор лептонных полей (или кварков) — формулой (2.4.70), в которой вместо массы электрона должна быть подставлена масса соответствующего лептона (или кварка)

Нетривиальные (отличные от нуля) пропагаторы скалярных полей определяются формулами

$$\underline{\Phi(x) \Phi^+(x')} = (\Phi_0, T \{\Phi(x) \Phi^+(x')\} \Phi_0) = i\Delta^{\Phi^c}(x - x'),$$

$$\underline{\chi(x) \chi(x')} = i\Delta^{\chi^c}(x - x'), \quad (6.4.16)$$

$$\underline{\varphi^3(x) \varphi^3(x')} = i\Delta^{\varphi^c}(x - x'),$$

в которых функции  $\Delta^{\Phi^c}$ ,  $\Delta^{\chi^c}$ ,  $\Delta^{\varphi^c}$  определяются формулой (2.1.27) с заменой массы электрона на массы скалярных частиц

$$m_\Phi = \sqrt{\xi} m_W, \quad m_\chi, \quad m_\phi = \sqrt{\xi} m_Z. \quad (6.4.17)$$

Приведем, наконец, выражения для пропагаторов скалярных фермионов (см. (6.2.58)):

$$\begin{aligned} \overline{c^a}(x) c^b(x') &= \mathcal{D}^c(x-x') \delta_{ab}, \quad \overline{c^a c^b} = \overline{c^a c^b} = 0, \\ \overline{c}(x) c(x') &= \mathcal{D}^c(x-x'), \quad \overline{cc} = \overline{c\overline{c}} = 0. \end{aligned}$$

**6.4.2. Разложение векторных полей по плоским волнам.** Обратимся к уравнению (6.4.2) для поля  $Z$ -бозонов. Поле  $Z_\nu(x)$  всегда можно представить в виде

$$Z_\nu(x) = Z_\nu^{(t)}(x) + \frac{1}{m_Z} \partial_\nu Z(x), \quad (6.4.18)$$

где  $Z_\nu^{(t)}(x)$  — поперечная ( $\partial^\nu Z_\nu^{(t)}(x) = 0$ ) часть поля  $Z_\nu(x)$  и  $m_Z^{-1} \partial_\nu Z(x)$  — продольная часть поля  $Z_\nu(x)$ . Подставляя (6.4.18) в (6.4.2), получаем уравнение

$$\partial^\mu \partial_\mu Z_\nu^{(t)} + m_Z^2 Z_\nu^{(t)} = 0 \quad (6.4.19)$$

для поперечного поля  $Z_\nu^{(t)}$  и уравнение

$$\partial^\mu \partial_\mu Z + \xi m_Z^2 Z = 0 \quad (6.4.20)$$

для скалярного поля  $Z(x)$ . Поля  $Z_\nu^{(t)}(x)$  и  $Z(x)$  можно разложить по плоским волнам

$$Z_\nu^{(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{ e_{k\nu}^{(\lambda)} a_{k\lambda} e^{-ikx} + e_{k\nu}^{(\lambda)*} a_{k\lambda}^\dagger e^{ikx} \}, \quad (6.4.21)$$

$$k^2 = m_Z^2,$$

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_\xi}} \{ a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \}, \quad k^2 = m_Z^2 \xi.$$

В первой из этих формул  $\omega = +\sqrt{k^2 + m_Z^2}$ , а во второй —  $\omega_\xi = +\sqrt{k^2 + m_Z^2 \xi}$ . Величины  $e_{k\nu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) представляют собой векторы поляризации, которые удовлетворяют соотношениям

$$e_{k\nu}^{(\lambda)} k^\nu = 0, \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (6.4.22)$$

Коэффициенты разложения  $a_{k\lambda}$ ,  $a_k$  представляют собой операторы, удовлетворяющие определенным перестановочным соотношениям (см. ниже).

Так как векторы поляризации  $e_{k\nu}^{(\lambda)}$  являются пространственноподобными (они ортогональны времени подобному век-

тору  $k^\nu$ ), то условие ортогональности для них можно записать в виде

$$e_{k\mu}^{(\lambda)} e_k^{(\lambda')\mu*} = -\delta_{\lambda\lambda'}. \quad (6.4.23)$$

Дополним векторы  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) вектором  $e_{k\mu}^{(0)} \equiv k_\mu/m_Z$  до полной системы векторов в 4-пространстве. Очевидно, векторы  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ), согласно (6.4.22) и (6.4.23), удовлетворяют условиям ортогональности:

$$e_{k\mu}^{(\lambda)} e_k^{(\lambda')\mu*} = \zeta_\lambda \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \zeta_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = 0 \\ -1, & \lambda = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (6.4.24)$$

Так как произвольный вектор  $f_\mu$  можно разложить по векторам  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$ :

$$f_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 c_\lambda e_{k\mu}^{(\lambda)}, \quad c_\lambda = f_\mu e_k^{(\lambda)\mu*} \zeta_\lambda,$$

то

$$\sum_{\lambda=0}^3 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_k^{(\lambda)\nu*} \zeta_\lambda = \delta_\mu^\nu. \quad (6.4.25)$$

Поэтому

$$\sum_{\lambda=0}^3 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_{k\nu}^{(\lambda)*} \zeta_\lambda = g_{\mu\nu}, \quad \sum_{\lambda=1}^3 e_{k\mu}^{(\lambda)} e_{k\nu}^{(\lambda)*} = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2}.$$

Векторы  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  для  $\lambda = 1, 2, 3$  можно выбрать, в частности, в виде

$$e_{k\mu}^{(1)} = (0, \mathbf{e}_k^{(1)}), \quad e_{k\mu}^{(2)} = (0, \mathbf{e}_k^{(2)}), \quad e_{k\mu}^{(3)} = \left( \frac{|\mathbf{k}|}{m_Z}, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \frac{k_0}{m_Z} \right),$$

где  $e_{\frac{k}{k}}^{(1)}$ ,  $e_{\frac{k}{k}}^{(2)}$  — пространственные части векторов поперечной поляризации  $e_{k\mu}^{(1)}$ ,  $e_{k\mu}^{(2)}$  ( $\mathbf{e}_k^{(1)}$ ,  $\mathbf{e}_k^{(2)}$  ортогональны друг другу и вектору  $\mathbf{k}$ ).

Покажем, что операторы  $a_{k\lambda}$ ,  $a_k$  удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[a_{k\lambda}, a_{k'\lambda'}^\dagger] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad [a_k, a_{k'}^\dagger] = -\delta_{kk'} \quad (6.4.26)$$

(остальные коммутаторы обращаются в нуль). Для этого достаточно доказать, что  $Z_\nu(x)$ , определяемое формулами (6.4.18), (6.4.21) и перестановочными соотношениями (6.4.26), удовлетворяет перестановочным соотношениям (6.4.5). С этой целью заметим, что

$$[Z_\nu(x), Z_\mu(x')] = [Z_\nu^{(t)}(x), Z_\mu^{(t)}(x')] + \frac{1}{m_Z^2} \partial_\nu \partial'_\mu [Z(x), Z(x')], \quad (6.4.27)$$

где

$$[Z_\nu^{(t)}(x), Z_\mu^{(t)}(x')] = \frac{1}{V} \sum_{k\lambda=1}^3 \frac{1}{2\omega} \{e_{k\nu}^{(\lambda)} e_{k\mu}^{(\lambda)*} e^{-ik(x-x')} - e_{k\nu}^{(\lambda)*} e_{k\mu}^{(\lambda)} e^{ik(x-x')}\},$$

$$[Z(x), Z(x')] = -\frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{2\omega_\xi} \{e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}\}.$$

Используя условия полноты (6.4.25), эти формулы можно переписать в виде

$$[Z_\nu^{(t)}(x), Z_\mu^{(t)}(x')] = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m_Z^2} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right),$$

$$[Z(x), Z(x')] = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - \xi m_Z^2}. \quad (6.4.28)$$

Мы учли при этом, что

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2\omega} (e^{-ikx} - e^{ikx}) =$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ikx} \frac{\sin \omega t}{\omega} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2},$$

где контур интегрирования  $C_0$  в плоскости  $k_0$  обходит по часовой стрелке и охватывает оба полюса подынтегрального выражения (см. разд. 2.1.3).

Поле  $Z_\nu^{(t)}(x)$  представляет собой векторное поле, уже рассмотренное в разд. 2.2.1, а поле  $Z(x)$  — скалярное поле, которое мы рассматривали в разд. 2.1.1. Однако, в отличие от условий коммутации раздела 2.1.2, здесь коммутатор  $[Z(x), Z(x')]$  отличается знаком от коммутатора в разделе 2.1.2. Это связано с тем, что  $[a_k, a_k^\dagger] = -\delta_{kk'}$ . Необходимость же последнего из соотношений (6.4.26) связана с тем, что мы должны получить формулу (6.4.5) для коммутатора  $[Z_\nu(x), Z_\nu(x')]$ . Подставляя (6.4.28) в (6.4.27), получаем

$$[Z_\nu(x), Z_\mu(x')] = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4k e^{-ik(x-x')} \left\{ \frac{1}{k^2 - m_Z^2} \times \right.$$

$$\left. \times \left( -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_Z^2} \right) - \frac{1}{m_Z^2} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_Z^2} \right\}. \quad (6.4.29)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{m_Z^2} \left( \frac{1}{k^2 - m_Z^2} - \frac{1}{k^2 - \xi m_Z^2} \right) = \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{k^2 - m_Z^2} - \frac{1}{k^2 \xi^{-1} - m_Z^2} \right),$$

мы приходим к формуле (6.4.5).

Обратим внимание на то, что подынтегральное выражение в (6.4.5) (как и в пропагаторах (6.4.9)) убывает в области больших  $k$ . Это связано с тем, что в формуле (6.4.29) слагаемые входят с разными знаками, что в свою очередь связано с наличием знака минус во втором из перестановочных соотношений (6.4.26). Так как вакуум поля  $Z$ -бозонов мы определяли формулой (6.4.21), то оператор  $a_k$  является оператором уничтожения (а не рождения!). Это приводит к индефинитной метрике в пространстве скалярных «духов» поля  $Z_\mu(x)$ . Мы видим, что в квантовой теории векторного поля  $Z_\mu(x)$  с убывающими пропагаторами векторное поле нельзя рассматривать независимо от скалярного поля, как, казалось, можно было бы делать, если исходить из того, что неприводимые векторное  $Z_\nu^{(t)}$  и скалярное  $Z$  поля относятся к различным представлениям группы Лоренца. В действительности в квантовой теории мы должны их рассматривать вместе, чтобы получить перенормируемую теорию, но при этом гильбертово пространство скалярных частиц («духов») должно обладать индефинитной метрикой.

Разложение, аналогичное (6.4.21), имеет место и для поля  $W$ -бозонов:

$$W_\mu = W_\mu^{(t)} + \frac{1}{m_W^2} \partial_\mu W, \quad (6.4.30)$$

где

$$W_\mu^{(t)} = \frac{1}{V\sqrt{V}} \sum_{k\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{e_{k\mu}^{(\lambda)} b_{k\lambda} e^{-ikx} + e_{k\mu}^{(\lambda)*} \bar{b}_{k\lambda} e^{ikx}\}, \quad (6.4.31)$$

$$\omega = \sqrt{k^2 + m_W^2},$$

здесь  $b_{k\lambda}, \bar{b}_{k\lambda}$  — операторы уничтожения  $W^+$ - и  $W^-$ -бозонов (векторы поляризации  $e_{k\mu}^{(\lambda)}$  определяются формулами, аналогичными формулам для  $Z$ -бозонов). Разложений для поля «духов» скалярных  $W$ -бозонов здесь не выписываем.

Приведем в заключение этого раздела разложение на плоские волны реальных хиггсовских бозонов:

$$\chi(x) = \frac{1}{V\sqrt{V}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (c_k e^{-ikx} + c_k^\dagger e^{ikx}), \quad \omega = \sqrt{k^2 + m_\chi^2}, \quad (6.4.32)$$

где  $c_k, c_k^\dagger$  — операторы уничтожения и рождения хиггсовских бозонов, удовлетворяющие соотношениям коммутации:

$$[c_k, c_k^\dagger] = \delta_{kk'}. \quad (6.4.33)$$

**6.4.3. Матрица рассеяния и правила Фейнмана.** Зная лагранжиан электрослабого взаимодействия, по формуле (1.6.35)

можно найти плотность гамильтониана электрослабого взаимодействия и тем самым определить плотность гамильтониана взаимодействия полей  $\omega_{\text{int}}(x)$ . После этого матрица рассеяния может быть определена согласно общей формуле

$$S = T \exp \left( -i \int d^4x \omega_{\text{int}}(x) \right).$$

При этом, однако,  $\omega_{\text{int}}(x)$  не является релятивистским инвариантом, так как лагранжиан взаимодействия (который является релятивистским инвариантом) содержит, как и в хромодинамике, производные от полей (в отличие от квантовой электродинамики). Связь между полями представляют собой релятивистски ковариантные величины. Поскольку гамильтониан взаимодействия содержит производные полей, то нам необходимы также и связи между производными полей. Связи между производными полей могут быть получены путем дифференцирования по  $x^\mu$  связей между полями. При этом при дифференцировании  $T$ -произведений появляются нековариантные члены, содержащие  $g_{\mu\nu}$  (см. разд. 4.3.1). Таким образом, матрица рассеяния содержит нековариантные величины, обусловленные как гамильтонианом взаимодействия, так и связями между производными полей. Между тем матрица рассеяния является релятивистским инвариантом. Поэтому нековариантные слагаемые в матрице рассеяния должны сокращаться.

Можно, однако, построить явно релятивистски инвариантное выражение для матрицы рассеяния. Для этого, как и в хромодинамике, следует в  $S$ -матрице заменить релятивистски нековариантный гамильтониан взаимодействия  $\omega_{\text{int}}(x)$  на релятивистски инвариантный лагранжиан взаимодействия, взятый с обратным знаком  $\omega_{\text{int}} \rightarrow -\mathcal{L}_{\text{int}}$ , и, кроме того, в качестве связей между производными полей (входящими в  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ ) использовать релятивистски ковариантные связи, которые получаются в результате дифференцирования по  $x^\mu$  релятивистски ковариантных связей между полями (без учета дополнительных слагаемых, связанных с дифференцированием  $T$ -произведений). Доказательство этого факта такое же, как и в квантовой хромодинамике, поэтому не будем здесь на нем останавливаться.

Таким образом, мы будем использовать следующее выражение для матрицы рассеяния [40, 41, 43, 1]:

$$S = T \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) \quad (6.4.34)$$

и выражения для связей между производными полей, входящими в  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ , вычисляемые по формуле




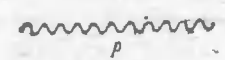
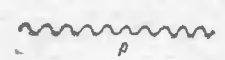
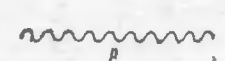
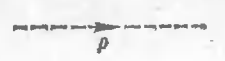
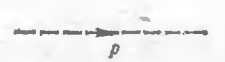
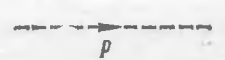
$$\underline{\partial}_\mu \underline{A} \underline{\partial}'_\nu B = \partial_\mu \partial'_\nu \underline{A} B \quad (6.4.35)$$

(подчеркнем, что это выражение не совпадает с  $(\Phi_0, T \{ \partial_\mu \underline{A} \partial'_\nu B \} \Phi_0)$ ).

Используя явное выражение для  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ , полученное в § 6.3, а также выражения для связей между полями (см. предыдущий раздел), нетрудно установить правила Фейнмана в теории электрослабого взаимодействия. Согласно этим правилам, внутренним линиям различных частиц сопоставляются пропагаторы соответствующих полей (см. таблицу пропагаторов), а каждой вершине сопоставляются константы взаимодействия вместе с соответствующей тензорной структурой [52] (см. таблицу вершин). При использовании правил Фейнмана следует помнить, что каждой замкнутой фермионной петле (в том числе и шпурной петле) должен сопоставляться дополнительный множитель  $-1$ .

**6.4.4. Перенормируемость теории электрослабого взаимодействия и аксиальные аномалии.** В § 3.3 мы разъяснили смысл понятий перенормируемости и неперенормируемости физической теории. Именно, если имеется только ограниченное число типов расходящихся диаграмм (к одному типу относятся диаграммы с вполне определенным набором внешних линий), то теория называется перенормируемой. Если же число типов расходящихся диаграмм бесконечно, то теория называется неперенормируемой. В случае перенормируемой теории расходимости в  $S$ -матрице могут быть устранены переопределением (перенормировкой) затравочных констант, входящих в исходный лагранжиан, либо конечного числа дополнительных констант, вводимых в лагранжиан вместе с добавочными членами. Если функции распространения свободных частиц асимптотически в области больших импульсов не содержат массы частиц и константы связи являются безразмерными, то теория будет перенормируемой.

В этой связи возникает вопрос о перенормируемости теории электрослабого взаимодействия. Как видно из лагранжианов взаимодействия (6.2.28), (6.3.10), (6.1.17), константы взаимодействия калибровочных, лептонных, кварковых и скалярных полей безразмерны. В функциях распространения лептонов, кварков и скалярных частиц в области больших импульсов масса частиц выпадает. Что же касается векторных частиц с отличной от нуля массой ( $Z$ - и  $W$ -бозоны), то при  $\xi = \infty$  (стандартные пропагаторы векторных частиц, см. § 2.2) пропагаторы не убывают в области больших импульсов и зависят от массы. В этом случае мы не можем воспользоваться сформулированным критерием перенормируемости теории. Однако, если пользоваться теорией, в которой калибровочный параметр  $\xi$  не равен бесконечности (калибровка  $m'$  Хоофта), то, согласно (6.4.10), в области больших импульсов пропагаторы векторных частиц не

Лептон		$\frac{i}{\hat{p} - m_l + i0} \delta_{ij}$
Фотон		$(-i) \frac{1}{k^2 + i0} \times$ $\times \left\{ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\}$
$W^+$ — бозон		$(-i) \frac{1}{k^2 - m_W^2 + i0} \times$ $\times \left\{ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_W^2} \right\}$
Z — бозон		$(-i) \frac{1}{k^2 - m_Z^2 + i0} \times$ $\times \left\{ g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_Z^2} \right\}$
$\chi$ — бозон		$\frac{1}{p^2 - m_\chi^2 + i0}$
$\Phi^\pm$ — бозон		$\frac{1}{p^2 - \xi m_W^2 + i0}$
$\Phi^3$ — бозон		$\frac{1}{p^2 - \xi m_Z^2 + i0}$
$c^\pm$ — шпурин		$\frac{1}{p^2 - \xi m_W^2 + i0}$
$c_z$ — шпурин		$\frac{1}{p^2 - \xi m_Z^2 + i0}$
$c_A$ — шпурин		$\frac{1}{p^2 + i0}$

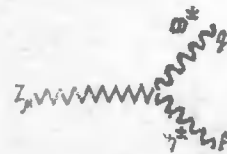
Вершины электрослабого взаимодействия



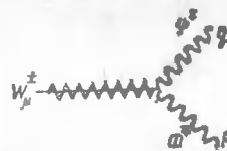
$$-ie\gamma^\mu$$



$$\frac{-ig}{4c_\theta} \gamma^\mu (1 - 4s_\theta^2 + \gamma^5)$$



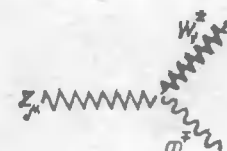
$$\frac{c_\theta^2 - s_\theta^2}{2c_\theta} g (p + q)_\mu$$



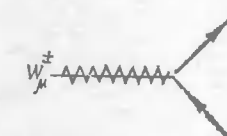
$$\pm \frac{1}{2} g (p + q)_\mu$$



$$\pm iem_W g_{\mu\nu}$$



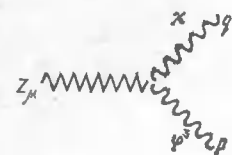
$$\mp i \frac{s_\theta^2}{c_\theta} m_W g g_{\mu\nu}$$



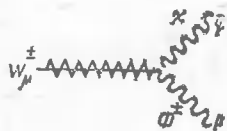
$$\frac{i}{2\sqrt{2}} g \gamma^\mu (1 + \gamma^5)$$



$$\frac{1}{4c_\theta} g \gamma^\mu (1 + \gamma^5)$$



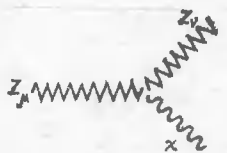
$$\frac{ig}{2c_\theta} (\rho + q)_\mu$$



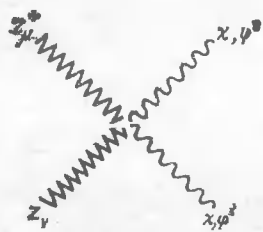
$$\frac{ig}{2} (\rho + q)_\mu$$



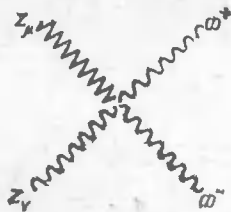
$$e(\rho + q)_\mu$$



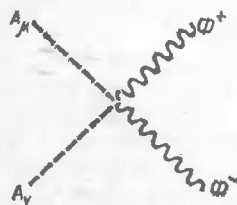
$$-\frac{m_z}{c_\theta} g \cdot g_{\mu\nu}$$



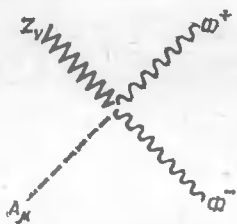
$$-\frac{1}{2c_\theta^2} g^2 g_{\mu\nu}$$



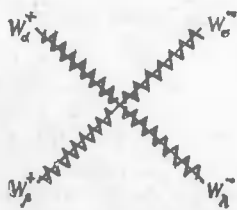
$$-\frac{1}{2} \frac{(s_\theta^2 - c_\theta^2)^2}{c_\theta^2} g^2 g_{\mu\nu}$$



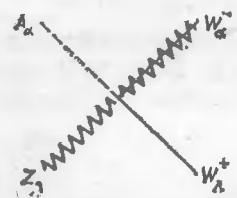
$$-2e^2 g_{\mu\nu}$$



$$\frac{s_\theta^2 - c_\theta^2}{c_\theta} e g g_{\mu\nu}$$



$$g^2 (2g_{\alpha\beta}g_{\lambda\sigma} - g_{\alpha\lambda}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\lambda}) \equiv g^2 \Gamma_{\alpha\beta;\lambda\sigma}$$

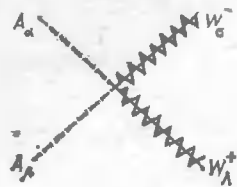


$$-g^2 s_\theta^2 c_\theta \Gamma_{\alpha\beta;\lambda\sigma} = -e g c_\theta \Gamma_{\alpha\beta;\lambda\sigma}$$



$$-g^2 c_\theta^2 \Gamma_{\alpha\beta;\lambda\sigma}$$





$$-g^2 s_\theta^2 \Gamma_{\alpha\beta;\lambda\sigma} = -e^2 \Gamma_{\alpha\beta;\lambda\sigma}$$

$$c_\theta \equiv \cos \theta_W, \quad s_\theta = \sin \theta_W$$

будут содержать массы векторных частиц и будут убывать. Поэтому такая теория будет перенормируемой, но в отличие от случая  $\xi = \infty$  она будет содержать дополнительные нефизические скалярные частицы («духи»), связанные с векторными частицами, что может в принципе привести к нарушению физической унитарности  $S$ -матрицы. Кроме того, хотя теория и будет перенормируемой, может оказаться, что перенормируемость достигается только путем введения добавочных контрчленов, не входящих в исходный лагранжиан классической теории электрослабого взаимодействия. В действительности эти трудности не возникают, т. е. при  $\xi < \infty$   $S$ -матрица рассеяния оказывается физически унитарной (т. е. скалярные «духи» нигде не проявляются) и для перенормируемости теории нет необходимости во введении в лагранжиан дополнительных контрчленов. Последнее утверждение, как мы увидим, тесно связано с учетом вкладов, вносимых в диаграммы электрослабой теории различными частицами, принадлежащими к определенному поколению.

Чтобы разъяснить возникающую в теории электрослабого взаимодействия ситуацию, обратимся к треугольным диаграммам, содержащим лептонные или кварковые петли, вершины

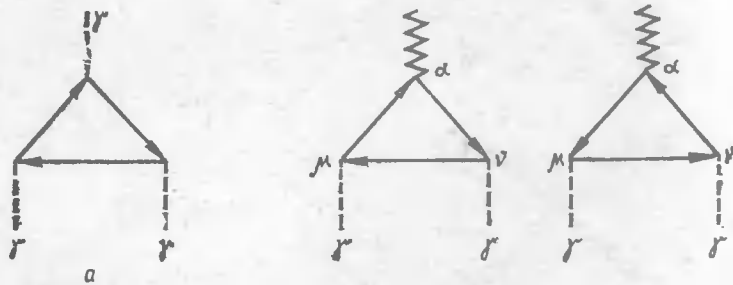


Рис. 45.

которых связаны с массивными бозонами или фотонами. Легко видеть, что такие диаграммы в области больших импульсов линейно расходятся. С каждой вершиной диаграммы связана определенная часть лагранжиана взаимодействия (см. (6.2.24), (6.2.28), (6.2.29)) и соответствующий этой части лептонный или кварковый ток. Для диаграмм рис. 45, а вершины связаны с сохраняющимися векторными электромагнитным током. В этом случае, согласно теореме Фарри, две диаграммы с противоположными направлениями обхода лептонной петли, которые встречаются в  $S$ -матрице, взаимно сокращаются (происходит сокращение вкладов лептонных и антилептонных петель). Поэтому в лагранжиан не нужно вводить контрчленов, связанных с тремя внешними фотонными линиями.

Рассмотрим теперь случай, когда диаграммы содержат лептонную (или кварковую) петлю, вершины которой связаны с двумя фотонами и  $Z$ -бозоном. Такие диаграммы приводят к отличному от нуля вкладу в  $S$ -матрицу. Этот вклад обусловлен аксиальной частью нейтрального тока, связанного с  $Z$ -бозоном (см. рис. 45, б; эти диаграммы существенны при изучении распада  $Z$ -бозона или при исследовании процесса  $\nu - e$  рассеяния). Поэтому, казалось бы, что такие диаграммы должны приводить к необходимости введения в лагранжиан контрчленов типа  $ZAA$ . С этими диаграммами связаны так называемые аксиальные аномалии в теории электрослабого взаимодействия, к анализу которых мы теперь и перейдем.

С диаграммой рис. 45, б связана обобщенная функция Грина [53]

$$T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ik_1x_1 + ik_2x_2} \times \\ \times \langle 0 | T(V_\mu(x_1) V_\nu(x_2) A_\lambda(0)) | 0 \rangle, \quad q = k_1 + k_2, \quad (6.4.36)$$

в которой под  $V_\mu$  и  $A_\mu$  мы будем понимать векторный ток и аксиальную часть нейтрального типа  $Z$ -бозонов, связанных с определенным сортом (ароматом) лептонов (или кварков)

$$V^\mu(x) = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad A^\mu(x) = \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi, \quad (6.4.37)$$

где  $\psi(x)$  — оператор лептонного (кваркового) поля. Оператор  $V_\mu(x)$  представляет собой сохраняющийся векторный электромагнитный ток

$$\partial^\mu V_\mu(x) = 0. \quad (6.4.38)$$

Оператор  $A_\mu(x)$ , согласно (6.2.14), удовлетворяет уравнению

$$\partial^\mu A_\mu(x) = -2im\mathcal{P}(x), \quad (6.4.39)$$

где псевдоскаляр  $\mathcal{P}(x)$  определяется формулой

$$\mathcal{P}(x) = \bar{\psi} \gamma^5 \psi.$$

Заметим, что векторная часть нейтрального тока Z-бозона приводит к функциям Грина (вершинным диаграммам), обладающим свойствами функций Грина квантовой электродинамики.

Замечая, что  $[V_0(x), A_0(y)]_{x_0=y_0} = 0$ , имеем

$$\partial^\mu T_{\mu\nu\lambda}(x_1, x_2, x_3) = i \langle 0 | T (\partial_1^\mu V_\mu(x_1) V_\nu(x_2) A_\lambda(x_3)) | 0 \rangle,$$

$$\partial^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(x_1, x_2, x_3) = i \langle 0 | T (V_\mu(x_1) V_\nu(x_2) \partial_3^\lambda A_\lambda(x_3)) | 0 \rangle$$

и, учитывая соотношения (6.4.38), (6.4.39), легко видеть, что

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = k_2^\nu T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = 0, \quad (6.4.40)$$

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = 2m T_{\mu\nu}(k_1, k_2, q),$$

где

$$T_{\mu\nu}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ik_1x_1 + ik_2x_2} \times \langle 0 | T (V_\mu(x_1) V_\nu(x_2) \mathcal{S}(0)) | 0 \rangle. \quad (6.4.41)$$

Первое из этих соотношений связано с законом сохранения векторного тока, обеспечивающего калибровочную инвариантность рассматриваемой функции Грина. При  $m = 0$  аксиальный ток сохраняется и последнее из соотношений (6.4.40) в этом случае связано с этим законом сохранения.

Однако при конкретных вычислениях соотношения (6.4.40) нарушаются. Чтобы в этом убедиться, вычислим величину  $T_{\mu\nu\lambda}$  в главном (третьем) приближении теории возмущений. Согласно диаграммам рис. 45, б, имеем  $(T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) \equiv T_{\mu\nu\lambda} \times \times (k_1, k_2) | m)$ ,

$$T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2 | m) = C \{ \Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2 | m) + \Gamma_{\nu\mu\lambda}(k_2, k_1 | m) \}, \quad (6.4.42)$$

где

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2 | m) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_\alpha \gamma^5 \frac{1}{\hat{p} - \hat{k}_1 - m} \times \left. \times \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} + \hat{k}_2 - m} \right\}$$

и  $C = Q^2 g_A$  ( $g_A$  — константа аксиального взаимодействия Z-бозона с фермионом с зарядом  $Q$ ). Замечая, что

$$\frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \hat{k} \frac{1}{\hat{p} - m} = \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} - \frac{1}{\hat{p} - m},$$

$$\frac{1}{\hat{p} - m} \hat{k} \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - m} = \frac{1}{\hat{p} - m} - \frac{1}{\hat{p} + \hat{k} - m},$$

имеем

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2 | m) = iC \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_\alpha \gamma^5 \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\hat{p} - \hat{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} + \hat{k}_2 - m} - \frac{1}{\hat{p} - \hat{k}_2 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} + \hat{k}_1 - m} \right\}. \quad (6.4.43)$$

При этом мы учли, что

$$\int d^4p \text{Sp} \gamma_\alpha \gamma^5 \left[ -\frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} + \hat{k}_2 - m} + \frac{1}{\hat{p} + \hat{k}_2 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} - m} \right] = 0, \quad (6.4.43')$$

так как каждое из слагаемых представляет собой антисимметричный тензор второго ранга (благодаря наличию матрицы  $\gamma^5$ , который должен быть построен с помощью одного вектора  $k_2^\mu$ , что невозможно. В (6.4.43) первое слагаемое может быть получено из второго добавлением вектора  $k_2 - k_1$  к вектору интегрирования  $p$ . Таким образом, (6.4.43) представляет собой разность двух линейно расходящихся интегралов. Используя формулу [54]

$$\int d^4p [f(p+a) - f(p)] = a_\beta \int d^4p \frac{\partial}{\partial p_\beta} f(p) = 2\pi^2 i a_\beta \lim_{p \rightarrow \infty} \overline{p^2 p_\beta f(p)} \quad (6.4.44)$$

(черта означает усреднение по углам трехмерной сферы) и полагая

$$f(p) = \frac{iC}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_\alpha \gamma^5 \frac{1}{\hat{p} - \hat{k}_2 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} + \hat{k}_1 - m},$$

имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \overline{p^2 p_\beta f(p)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{iC}{(2\pi)^4} p_\beta \frac{1}{p^2} \text{Sp} \gamma_\alpha \gamma^5 \hat{p} \gamma_\nu (\hat{k}_1 + \hat{k}_2) = \frac{iC}{(2\pi)^4} \varepsilon_{\alpha\nu\beta\rho} (k_1 + k_2)_\rho.$$

Поэтому

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2 | m) = \frac{C}{4\pi^2} \varepsilon_{\alpha\nu\beta\rho} k_1^\beta k_2^\rho. \quad (6.4.45)$$

Поскольку при использовании регуляризации Паули — Вилларса (регуляризации подвергаются не функции распространения, а фермионные петли)

$$T_{\mu\nu\lambda}^{\text{Phy}}(k_1, k_2 | m) = \lim_{M \rightarrow \infty} \{ T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2 | m) - T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2 | M) \}, \quad (6.4.46)$$

то вследствие того, что правая часть (6.4.45) не зависит от массы, мы имеем

$$\begin{aligned} k_1^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{\text{Phys}}(k_1, k_2 | m) &= 0, \\ k_2^\nu T_{\mu\nu\alpha}^{\text{Phys}}(k_1, k_2 | m) &= 0. \end{aligned} \quad (6.4.46')$$

Проверим теперь сохранение аксиального тока в пределе  $m \rightarrow 0$ . Для этого умножим  $T_{\mu\nu\alpha}(k_1, k_2 | m)$  на  $q^\alpha$  и воспользуемся тождеством

$$\hat{q} = 2m + (\hat{p} + \hat{k}_1 - m) - (\hat{p} - \hat{k}_2 + m). \quad (6.4.47)$$

Тогда

$$\begin{aligned} q^\alpha T_{\mu\nu\alpha}(k_1, k_2 | m) &= 2m T_{\mu\nu}(k_1, k_2 | m), \\ T_{\mu\nu}(k_1, k_2 | m) &= \frac{Cm}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{m^2 - q^2 xy}. \end{aligned} \quad (6.4.48)$$

Действительно, слагаемые с  $\hat{p} + \hat{k}_1 - m$  и  $\hat{p} - \hat{k}_2 + m$  в (6.4.47) при подстановке в  $q^\alpha T_{\mu\nu\alpha}(k_1, k_2 | m)$  обращаются в нуль, так как приводят к антисимметричному тензору второго ранга, который должен быть построен из одного вектора (см. формулу (6.4.43')).

Выражение для  $T_{\mu\nu}(k_1, k_2 | m)$  можно получить из (6.4.42) заменой  $\gamma_\alpha \gamma^5$  на  $\gamma^5$ . В результате приходим к формуле (6.4.48).

Используя регуляризацию Паули — Вилларса для  $q^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{\text{Phys}}(k_1, k_2 | m)$ , имеем

$$\begin{aligned} q^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{\text{Phys}}(k_1, k_2 | m) &= 2m T_{\mu\nu}(k_1, k_2 | m) - \lim_{M \rightarrow \infty} 2M T_{\mu\nu}(k_1, k_2 | M) = \\ &= 2m T_{\mu\nu}(k_1, k_2 | m) - \frac{C}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma. \end{aligned} \quad (6.4.49)$$

Таким образом, мы видим, что даже в пределе  $m \rightarrow 0$  аксиальный ток не сохраняется. Можно предполагать, что это является результатом регуляризации Паули — Вилларса. Однако более подробное рассмотрение показывает, что совместное выполнение равенств  $k_1^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{\text{Phys}}(k_1, k_2 | m) = 0$  и  $q^\alpha T_{\mu\nu\alpha}^{\text{Phys}}(k_1, k_2 | m) = 2m T_{\mu\nu}$  невозможно. В этой ситуации необходимо выбрать одно из этих равенств. Поскольку калибровочная инвариантность является более важной, то выбираются равенства  $k_1^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{\text{Phys}}(k_1, k_2 | m) = k_2^\nu T_{\mu\nu\alpha}^{\text{Phys}}(k_1, k_2 | m) = 0$ . Тогда для дивергенции аксиального тока остается результат, полученный в регуляризации Паули — Вилларса (6.4.49), отличающийся от результата, полученного в формальной теории с использованием квантовых уравнений движения. Имеющее место

нарушение соотношения (6.4.40) (тождества Уорда), связанное с аксиальным током, называется аксиальной аномалией, а дополнительное слагаемое  $-\frac{C}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_1^\rho k_2^\sigma$  в уравнении (6.4.49) — аномальным слагаемым.

Происхождение аномалии легко понять в случае регуляризации Паули — Вилларса. Учет радиационных поправок приводит к расходимостям, для регуляризации которых вводится параметр — масса  $M$ . Если исходный лагранжиан и некоторый ток обладал некоторой симметрией, то после введения массы  $M$  эта симметрия может нарушиться. Такая ситуация имеет место в случае аксиального тока. Классический ток сохраняется при  $m = 0$ . Но введение параметра  $M$  нарушает его сохранение, хотя аномальное (второе) слагаемое в (6.4.49) от  $M$  не зависит.

Характерными чертами аксиальной аномалии в (6.4.49) являются независимость ее от масс частиц, а также то, что аномальный член в (6.4.49) не изменяется при учете более высоких радиационных поправок.

Можно показать, что, как и величины  $q^\alpha T_{\mu\nu\alpha}$ ,  $k_1^\mu T_{\mu\nu\alpha}$ , величина  $T_{\mu\nu\alpha}$ , связанная с треугольной диаграммой, содержащей фермионную петлю, конечна (линейные и логарифмические расходимости в этой величине сокращаются). Однако подстановка этого конечного выражения для  $T_{\mu\nu\alpha}$  в выражения для амплитуд других процессов (например, процесса  $\nu \rightarrow e$ , рассеяния) приводит к расходимостям. При этом расходимости, связанные с нормальной частью величины  $T_{\mu\nu\alpha}$ , для которой выполняются все тождества Уорда (как векторные, так и аксиально векторные), устраняются путем обычной процедуры перенормировки. Что же касается расходимостей, связанных с аномальным слагаемым в величине  $T_{\mu\nu\alpha}$ , то они остаются и не могут быть устранены обычной процедурой перенормировки.

Покажем теперь, что в теории электрослабого взаимодействия расходимости, связанные с аномальными слагаемыми, в действительности сокращаются, если учесть вклад в нейтральный ток  $Z$ -бозонов всех фермионов, относящихся к фиксированному поколению [55]. Это следует из того, что

$$\sum_i C_i = 0, \quad (6.4.50)$$

где  $C_i = g_A^i Q_i$  и индекс  $i$  нумерует фермионы, относящиеся к какому-либо поколению. Значения величин  $g_A^i$ ,  $Q_i$  для электронного поколения приведены ниже (см. в этой связи формулы (6.2.31))

Лепто- ны и кварки	$g_A$	$Q$
$\nu$	$-\frac{1}{4}$	0
$e$	$\frac{1}{4}$	-1
$u$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
$d$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$

Из этих данных и следует равенство (6.4.50), если учесть, что кварк может находиться в трех цветовых состояниях.

Точно так же сохратится вклад лептонов  $\nu_\mu$ ,  $\mu$  и кварков  $s$ ,  $s$  (моонное поколение). Если существует  $t$ -кварк, то его вклад в аномалию сохратится вместе с вкладом  $b$ -кварка и  $\nu_\tau$ ,  $\tau$  — лептонов. Таким образом, в теории электрослабого взаимодействия расходимости, связанные с аксиальной аномалией в  $Z\gamma\gamma$  взаимодействии, исчезают.

Рассмотрим теперь линейно расходящиеся треугольные диаграммы, вершины которых связаны с нейтральным током  $Z$ -бозонов. Нейтральный ток  $Z$ -бозонов определяется формулой (6.2.31)

$$\mathcal{J}_0^\mu = V_0^\mu + A_0^\mu, \quad (6.4.51)$$

$$V_0^\mu = \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu (\tau^3 - 4Q \sin^2 \theta_W) \psi, \quad A_0^\mu = -\frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \tau^3 \psi,$$

где  $\tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  — матрица, действующая на компоненты лептонных и кварковых дублетов;  $Q$  — зарядовая матрица.

Если в  $ZZZ$  диаграмме в качестве трех вершин взять векторные части токов, то, согласно теореме Фарри, мы получим нуль.

Если в  $ZZZ$  диаграмме в качестве одной из вершин взять аксиальную часть нейтрального тока, а в качестве двух других вершин взять векторные части тока, то в соответствии с правилами Фейнмана аномальная часть  $ZZZ$  диаграммы будет содержать множитель

$$C = \text{tr} \tau^3 (\tau^3 - 4 \sin^2 \theta_W Q)^2 = -8 \sin^2 \theta_W \text{tr} Q. \quad (6.4.52)$$

Так как заряды фермионов электронного поколения ( $\nu_e$ ,  $e$ ,  $u$ ,  $d$ ) равны 0, -1, 2/3, -1/3, то  $\text{tr} Q = 0$  (мы учитываем, что имеется три цветовых состояния кварка). Аналогичный результат имеет место и для двух остальных поколений лептонов и кварков.

Таким образом, расходимости диаграмм, содержащих аномальные слагаемые в  $ZZZ$  взаимодействии, для  $AVV$  случая сокращаются при учете всех лептонов и кварков в каждом поколении.

В случае  $AVV$ -вершины аномальная часть  $ZZZ$  диаграммы, согласно (6.4.51), содержит множитель

$$C = \text{tr} \tau^{32} (\tau^3 - 4 \sin^2 \theta_W Q) = -4 \sin^2 \theta_W \text{tr} Q, \quad (6.4.53)$$

который, согласно предыдущему, равен нулю.

Наконец, в случае  $AAA$ -вершины

$$C = \text{tr} (\tau^3)^3 = 0, \quad (6.4.54)$$

т. е. в  $AAA$  случае коэффициент  $C$  обращается в нуль при учете даже одного лептонного (кваркового) дублета.

Аналогичным образом можно показать, что аномалии, связанные с заряженными токами  $W$ -бозонов, также не приводят к расходимостям  $S$ -матрицы.

Таким образом, расходимости в  $S$ -матрице, связанные с аномальными частями треугольных диаграмм, содержащих фермионные петли, сокращаются в каждом поколении, если учесть конкретные заряды лептонов и кварков и число цветовых состояний кварков. Это является ярким подтверждением существующей кварковой картины.

**6.4.5. Низкоэнергетический предел теории электрослабого взаимодействия.** Мы покажем в этом разделе, как, исходя из общей теории электрослабого взаимодействия, построить теорию локального четырехфермионного слабого взаимодействия. Теория четырехфермионного слабого взаимодействия относится к области энергий, малых по сравнению с массами  $W$ - и  $Z$ -бозонов. В этой области энергий в процессах рассеяния и аннигиляции начальных частиц (лептонов, фотонов, кварков) не могут образовываться реальные  $W$ - и  $Z$ -бозоны. Для описания процессов в низкоэнергетической области с участием только лептонов удобно перейти от полного лагранжиана взаимодействия, содержащего фермионные и бозонные поля, к «эффективному», содержащему фермионные поля.

Необходимо отметить, что процессы с участием только лептонов можно описывать с помощью матрицы рассеяния второго порядка (см. (6.4.34)):

$$S_2 = -\frac{1}{2} \langle 0 | T \int d^4x_1 \int d^4x_2 \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2) | 0 \rangle, \quad (6.4.55)$$

где  $\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_{\text{int}}(W, l) + \mathcal{L}_{\text{int}}(Z, l)$  — часть общего лагранжиана, содержащего взаимодействие лептонов и  $W$ -,  $Z$ -бозонов (см. (6.2.28), (6.2.29)), и усреднение происходит по вакууму  $W$ - и  $Z$ -бозонов. Мы хотим в низкоэнергетической области представить это выражение в виде

$$S_2 = i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) \quad (6.4.56)$$

и считать, что изучаемые нами процессы происходят в первом порядке теории возмущений по  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ .

Учитывая, что  $\underline{WZ} = 0$ , формулу (6.4.55) можно представить в виде

$$S_2 = S_2^W + S_2^Z,$$

где

$$S_2^W = -\frac{1}{2} g^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \underline{W_\mu(x_1) W_\nu^+(x_2)} \mathcal{F}^\mu(x_1) \mathcal{F}^{\nu+}(x_2), \quad (6.4.57)$$

$$S_2^Z = -\frac{g^2}{2 \cos^2 \theta_W} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \underline{Z_\mu(x_1) Z_\nu(x_2)} \mathcal{F}_0^\mu(x_1) \mathcal{F}_0^\nu(x_2).$$

Связи  $W$ - и  $Z$ -бозонов определяются, согласно (6.4.15) и (6.4.9), формулами

$$\underline{W_\mu(x_1) W_\nu^+(x_2)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x_1-x_2)} \times \left\{ \frac{i}{m_W^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{i}{m_W^2 - \frac{k^2}{\xi}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\},$$

$$\underline{Z_\mu(x_1) Z_\nu(x_2)} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-ik(x_1-x_2)} \times \left\{ \frac{i}{m_W^2 - k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{i}{m_W^2 - \frac{k^2}{\xi}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\}.$$

Область малых энергий и переданных импульсов соответствует формально асимптотике

$$\underline{W_\mu(x_1) W_\nu^+(x_2)} \rightarrow \frac{i}{m_W^2} \delta(x_1 - x_2) g_{\mu\nu},$$

$$\underline{Z_\mu(x_1) Z_\nu(x_2)} \rightarrow \frac{i}{m_Z^2} \delta(x_1 - x_2) g_{\mu\nu}.$$

Подставляя эти выражения в (6.4.57), получаем

$$S_2^W = -i \frac{g^2}{2m_W^2} \int d^4x \mathcal{F}^\mu(x) \mathcal{F}_\mu^+(x),$$

$$S_2^Z = -i \frac{g^2}{2m_Z^2 \cos^2 \theta_W} \int d^4x \mathcal{F}_0^\mu(x) \mathcal{F}_{0\mu}(x).$$

Сравнивая эти формулы с (6.4.37), мы приходим к следующему выражению для эффективного лагранжиана взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) = \mathcal{F}_{\text{eff}}^W(x) + \mathcal{F}_{\text{eff}}^Z(x),$$

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}^W(x) = \frac{g^2}{2m_W^2} \mathcal{F}^\mu(x) \mathcal{F}_\mu^+(x), \quad (6.4.58)$$

$$\mathcal{F}_{\text{eff}}^Z(x) = \frac{g^2}{2m_Z^2} \mathcal{F}_0^\mu(x) \mathcal{F}_{0\mu}(x)$$

(мы учли, что  $m_Z = m_W \cos \theta_W$ ). Сравнение первой из этих формул с (6.1.2) приводит к связи между фермиевской константой взаимодействия  $G$  и константой электрослабого взаимодействия  $g$  [56]

$$g^2 = \frac{8Gm_W^2}{\sqrt{2}}, \quad G = 1,116 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (6.4.59)$$

Таким образом, мы приходим к «эффективным» лагранжианам слабого четырехфермионного взаимодействия, содержащим заряженные и нейтральные токи:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^W(x) = 2\sqrt{2}G \mathcal{F}^\mu(x) \mathcal{F}_\mu^+(x), \quad (6.4.60)$$

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(x) = 2\sqrt{2}G \mathcal{F}_0^\mu(x) \mathcal{F}_{0\mu}^+(x).$$

Выразим в заключение этого раздела массы  $W$ - и  $Z$ -бозонов через фермиевскую константу взаимодействия  $G$ , заряд лептона  $e > 0$  и угол Вайнберга  $\theta_W$ . Согласно (6.2.26), (6.2.12),  $e = g \sin \theta_W$ ,  $m_Z = m_W \cos \theta_W$ . Поэтому, используя (6.4.59), находим

$$m_W = \frac{1}{\sin \theta_W} \sqrt{\frac{\pi\alpha}{G\sqrt{2}}} = \frac{37,3}{\sin \theta_W} \text{ ГэВ}, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W} = \frac{74,6}{\sin 2\theta_W} \text{ ГэВ}, \quad (6.4.61)$$

где  $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ . Из экспериментов по рассеянию лептонов (см. раздел 6.4.6) было найдено, что  $\sin^2 \theta_W = 0,220 \pm \pm 0,015$  [10]. Поэтому, согласно (6.4.61),

$$m_W = (80 \pm 3) \text{ ГэВ}, \quad m_Z = (90 \pm 3) \text{ ГэВ}.$$

Непосредственное измерение масс (при изучении процессов рождения и распада  $W$ - и  $Z$ -бозонов на встречных  $p\bar{p}$ -пучках) привело к следующим результатам [10, 21, 22]:

$$m_W = (80,8 \pm 2,7) \text{ ГэВ}, \quad m_Z = (92,9 \pm 1,6) \text{ ГэВ}.$$

Очевидно, что найденные экспериментальные значения масс  $W$ - и  $Z$ -бозонов находятся в хорошем согласии с теорией электрослабого взаимодействия.

**6.4.6. Процессы рассеяния лептонов и распады  $W$ - и  $Z$ -бозонов.** Имея лагранжиан четырехфермионного взаимодействия, можно вычислить сечения различных процессов слабого взаимодействия лептонов [38, 57, 58]

Рассмотрим сперва процессы взаимодействия нейтрино с заряженными лептонами. В низкоэнергетической области они описываются, согласно (6.4.60), частью четырехфермионного лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\nu, l) = \mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(\nu, l) + \mathcal{L}_{\text{eff}}^W(\nu, l),$$

где  $\mathcal{L}_{\text{eff}}^W(\nu, l)$  — полный эффективный лагранжиан взаимодействия заряженных токов

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^W(\nu, l) = 2\sqrt{2}G \sum_{ll'} (\bar{l}L\gamma^\mu\nu_{lL}) (\bar{\nu}_{lL}\gamma_\mu l'_L), \quad (6.4.62)$$

и  $\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(\nu, l)$  — эффективный лагранжиан нейтральных токов, связанный с процессами взаимодействия нейтрино с заряженными лептонами:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(\nu, l) = 2\sqrt{2}G \sum_{ll'} (\bar{\nu}_{lL}\gamma^\mu\nu_{lL}) (\bar{l}'(g_V + g_A\gamma^5)\gamma_\mu l'), \quad (6.4.63)$$

$$\text{где } g_V = \sin^2\theta_W - \frac{1}{4}, \quad g_A = \frac{1}{4}.$$

Полный лагранжиан взаимодействия нейтральных токов можно записать в виде

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z = \mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(\nu, l) + \mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(l, l), \quad (6.4.64)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^Z(l, l) = 2\sqrt{2}G \sum_{ll'} (l(g_V + g_A\gamma^5)\gamma^\mu l) (\bar{l}'(g_V + g_A\gamma^5)\gamma_\mu l').$$

Отметим, что  $g_V = 0,03 \pm 0,02$ , т. е.  $g_V \ll g_A$  и нейтральный слабый ток (связанный с заряженными лептонами), является в основном аксиальным вектором, тогда как заряженный ток (и часть нейтрального тока, связанного с нейтрино) представляет собой суперпозицию вектора и аксиального вектора с равными весами ( $V - A$ -взаимодействие).

Рассмотрим сначала процессы, обусловленные взаимодействием только слабых нейтральных токов:

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-, \quad (6.4.65)$$



Рис. 46.

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^- \quad (6.4.66)$$

(рассеяние мюонного нейтрино на электроном).

Матричный элемент процесса (6.4.65) (см. рис. 46, б) определяется формулой

$$\begin{aligned} \langle f | S | i \rangle &= \\ &= -i \frac{(2\pi)^4 \delta(k + p - k' - p')}{(16\epsilon\epsilon'\omega\omega')^{1/2}} \times \\ &\quad \times M(\nu_\mu, e), \end{aligned}$$

$$M(\nu_\mu, e) = 2\sqrt{2}G\bar{u}(k') \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^\mu u(k) \cdot u(p') (g_V + g_A\gamma^5) \times \gamma_\mu u(p),$$

где  $\epsilon, \omega$  ( $\epsilon', \omega'$ ) — энергия начальных (конечных) электрона и нейтрино.

Усредняя квадрат модуля амплитуды процесса (6.4.65) по поляризациям начальных частиц и суммируя по поляризациям конечных частиц, получаем дифференциальное сечение процесса

$$\begin{aligned} d\sigma(\nu_\mu e^-) &= \frac{G^2}{8\pi m_e \omega^2} \{ (g_V + g_A)^2 (pk)^2 + (g_V - g_A)^2 (pk')^2 - \\ &\quad - m_e^2 (g_V^2 - g_A^2) (kk')^2 \} \frac{d\epsilon'}{\omega}, \end{aligned} \quad (6.4.67)$$

где  $m_e$  — масса электрона.

Полное сечение имеет вид

$$\sigma(\nu_\mu e^-) = \frac{G^2(kp)}{2\pi} [(1 - 2\sin^2\theta_W)^2 + \frac{4}{3}\sin^4\theta_W] \quad (6.4.68)$$

(мы предполагаем, что  $\omega \gg m_e$ ).

Рассмотрим далее процесс (6.4.66). Дифференциальное сечение этого процесса может быть получено из (6.4.67), если сделать в выражении в фигурных скобках замену  $k \rightleftharpoons k'$ :

$$\begin{aligned} d\sigma(\bar{\nu}_\mu e^-) &= \frac{G^2}{8\pi m_e \omega^2} \{ (g_V + g_A)^2 (pk')^2 + (g_V - g_A)^2 (pk)^2 - \\ &\quad - m_e^2 (g_V^2 - g_A^2) (kk')^2 \} \frac{d\epsilon'}{\omega}. \end{aligned} \quad (6.4.69)$$

Полное сечение процесса при  $\omega \gg m_e$  определяется формулой

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e^-) = \frac{G^2 kp}{2\pi} \left[ \frac{1}{3} (1 - 2\sin^2\theta_W)^2 + 4\sin^4\theta_W \right]. \quad (6.4.70)$$

Из измерений сечений этих процессов находится значение угла Вайнберга  $\theta_W$ . Отметим, что в системе покоя начального

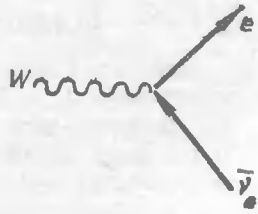


Рис. 47.

электрона сечения этих процессов, растущие линейно с энергией начального нейтрино, приближенно равны ( $\sin^2 \theta_W \approx 1/4$ )

$$\sigma \approx \frac{G^2 m_e}{6\pi} \omega \approx 1,4 \cdot 10^{-42} \frac{\omega}{\text{ГэВ}} \text{ см}^2.$$

В заключение рассмотрим еще вопрос о распадах  $W$ - и  $Z$ -бозонов.

Рассмотрим двухлептонный распад  $W$ -бозона,  $W \rightarrow l + \bar{\nu}_l$ . Этот процесс в низшем порядке обуславливается лагранжианом взаимодействия (6.3.10). Матричный элемент этого процесса имеет вид (см. диаграмму рис. 47)

$$\langle f | S | i \rangle = -i \frac{(2\pi)^4 \delta(p + q - p_W)}{(8\epsilon_0 m_W)^{1/2}} M(W \rightarrow l \bar{\nu}_l),$$

$$M(W \rightarrow l \bar{\nu}_l) = -\frac{g}{2\sqrt{2}} e_{p_W \mu}^{(\lambda)} \bar{u}(p) \gamma^\mu (1 + \gamma^5) u^c(q),$$

где  $e_{p_W \mu}^{(\lambda)}$  — вектор поляризации  $W$ -бозона. Поскольку не только  $m_e \ll m_W$ , но и массы  $\mu$ - и  $\tau$ -лептонов значительно меньше  $m_W$ , то для ширин распадов  $W$ -бозона на  $e \bar{\nu}_e$ ,  $\mu \bar{\nu}_\mu$  и  $\tau \bar{\nu}_\tau$  имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_e) &= \Gamma(W \rightarrow \mu \bar{\nu}_\mu) = \\ &= \Gamma(W \rightarrow \tau \bar{\nu}_\tau) = \frac{G m_W^3}{6\sqrt{2}\pi} = (230 \pm 20) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (6.4.71)$$

Таким образом, если существует только три заряженных лептона, взаимодействующих с  $W$ -бозоном, то полная ширина распада  $W$ -бозона в двухчастичные лептонные каналы равна

$$\Gamma_l(W) = 3\Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_e) \approx 0,7 \text{ ГэВ}.$$

Рассмотрим теперь двухлептонные распады  $Z$ -бозона. Матричный элемент распада  $Z$ -бозона

$$\langle f | S | i \rangle = -i \frac{(2\pi)^4 \delta(q_1 + q_2 - p_Z)}{(8m_Z \omega_1 \omega_2)^{1/2}} M(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l),$$

$$M(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l) = \frac{g}{4 \cos \theta_W} e_{p_Z \mu}^{(\lambda)} \bar{u}(q_1) (1 + \gamma^5) \gamma^\mu u(q_2)^c.$$

Поэтому ширина распада равна

$$\Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l) = \frac{G m_Z^3}{12\sqrt{2}\pi} \approx (180 \pm 10) \text{ МэВ}. \quad (6.4.72)$$

Ширин распадов на пары заряженных лептонов равны

$$\begin{aligned} \Gamma(Z \rightarrow e \bar{e}) &= \Gamma(Z \rightarrow \mu \bar{\mu}) = \\ &= \Gamma(Z \rightarrow \tau \bar{\tau}) = \frac{4 \sin^2 \theta_W + (1 - 2 \sin^2 \theta_W)^2}{12\sqrt{2}\pi} G m_Z^3. \end{aligned} \quad (6.4.73)$$

Для  $\sin^2 \theta_W \approx 1/4$

$$\Gamma(Z \rightarrow e \bar{e}) = \Gamma(Z \rightarrow \mu \bar{\mu}) = \Gamma(Z \rightarrow \tau \bar{\tau}) \approx \frac{1}{2} \Gamma(Z \rightarrow \nu_l \bar{\nu}_l).$$

Таким образом, полная ширина распада  $Z$ -бозона в двухчастичные лептонные каналы равна

$$\Gamma_l(Z) = 3\Gamma(Z \rightarrow e \bar{e}) + \frac{3}{2} \Gamma(Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e) \approx 0,8 \text{ ГэВ}.$$

Аналогично лептонным распадам можно рассмотреть кварковые (адронные) распады  $W$ - и  $Z$ -бозонов. Пренебрегая, как и в случае лептонов, массами кварков, получаем для ширин распадов  $W$ -бозона (множитель 3 возникает из-за суммирования по цветам кварков) формулы:

$$\begin{aligned} \Gamma(W \rightarrow d \bar{u}) &= \Gamma(W \rightarrow s \bar{c}) = 3 \cos^2 \theta_c \Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_e), \\ \Gamma(W \rightarrow s \bar{u}) &= \Gamma(W \rightarrow c \bar{d}) = 3 \sin^2 \theta_c \Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_e), \\ \Gamma(W \rightarrow b \bar{t}) &= 3\Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_e). \end{aligned} \quad (6.4.74)$$

Таким образом, для полной ширин распада  $W$ -бозона получим оценку ( $\sin \theta_c \approx 0,226$ )

$$\Gamma_l(W) = 12\Gamma(W \rightarrow e \bar{\nu}_e) \approx 2,8 \text{ ГэВ}.$$

Из эксперимента известна пока лишь верхняя граница для полной ширин [10]

$$\Gamma_l(W) < 7 \text{ ГэВ}.$$

Для кварковых распадов  $Z$ -бозонов имеем

$$\begin{aligned} \Gamma(Z \rightarrow u \bar{u}) &= \Gamma(Z \rightarrow c \bar{c}) = \Gamma(Z \rightarrow t \bar{t}) = \\ &= [(1 - 2 \sin^2 \theta_W)^2 + 4 \sin^4 \theta_W] \Gamma(Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e), \\ \Gamma(Z \rightarrow d \bar{d}) &= \Gamma(Z \rightarrow s \bar{s}) = \Gamma(Z \rightarrow b \bar{b}) = \\ &= \left[ \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W\right)^2 + \frac{16}{9} \sin^4 \theta_W \right] \Gamma(Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e). \end{aligned}$$

Для  $\sin^2 \theta_W \approx 1/4$  получаем оценку полной ширин распада  $Z$ -бозона:

$$\Gamma_l(Z) = 16\Gamma(Z \rightarrow \nu_e \bar{\nu}_e) \approx 2,9 \text{ ГэВ}.$$

Экспериментальная верхняя граница для полной ширин [10]  $\Gamma_l(Z) < 8,5 \text{ ГэВ}$ .

## § 6.5. Идея великого объединения

**6.5.1. Бегущие константы связи.** В предыдущих параграфах мы видели, что локальная симметрия лежит в основе динамики частиц. Именно, если предположить локальность цветовой  $SU(3)$ -симметрии кваркового поля, то необходимо ввести калибровочные глюонные поля (октет глюонов), которые будут обеспечивать сильное взаимодействие. Мы видели далее, что  $W$ - и  $Z$ -бозоны, обуславливающие слабое взаимодействие, также должны выступать как калибровочные поля, причем они должны вводиться на той же основе, что и фотон. Поэтому мы рассматривали систему лептонов и кварков с характерной для них  $SU(2) \times U(1)$  глобальной симметрией (в предположении, что массы лептонов и кварков равны нулю). Чтобы сделать эту симметрию локальной, нужно ввести четыре калибровочных векторных поля:

$W_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ),  $B_\mu$  (промежуточные бозоны, так же как лептоны и кварки, приобретают массы благодаря хиггсовому механизму спонтанного нарушения симметрии). В результате возникает единая теория электромагнитного и слабого взаимодействий, которые объединяются в единое электрослабое взаимодействие.

Важнейшей чертой вводимых таким образом для обеспечения локальной симметрии калибровочных полей является то, что эффективные константы взаимодействия этих полей с фермионами (т. е. кварками и лептонами) зависят от переданного импульса или, иначе говоря, от расстояния от фермиона. Именно эти эффективные константы связи уменьшаются с уменьшением расстояния в случае глюонов (благодаря этому возникает явление асимптотической свободы) и возрастают с уменьшением расстояния в случае фотонов; в случае промежуточных  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонов поведение «константы» такое же, как и в случае глюонов. Причина непостоянства «констант» взаимодействия, т. е. зависимости «констант» от переданного импульса, заключается в поляризации вакуума, которой соответствуют на языке диаграмм Фейнмана петли виртуальных частиц — векторных бозонов и фермионов. Зависимость эффективных констант связи от переданного импульса оказывается логарифмической.

Будем обозначать через  $g_3$ ,  $g_2$  и  $g_1$  константы взаимодействия, связанные с локальными группами симметрии  $SU(3)_c$ ,  $SU(2)_w$  и  $U(1)_y$ . Константа  $g_3$  определяет сильное взаимодействие кварков и калибровочных полей глюонов  $A_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), лагранжиан которого определяется формулой (см. § 4.2)

$$g_3 A_\mu^a \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q, \quad (6.4.75)$$

Константа  $g_2 = g$  определяет слабое взаимодействие кварков и лептонов с калибровочными полями  $W_\mu^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), лагранжиан которого определяется формулой (см. § 6.1)

$$g_2 W_\mu^a \left( \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} q_L + \sum_l \bar{l} \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} l_L \right). \quad (6.4.76)$$

Наконец, константа  $g_1$  определяет слабое взаимодействие кварков и лептонов с абелевым калибровочным полем  $B_\mu$ , лагранжиан которого определяется формулой (см. § 6.1)

$$g_1 B_\mu \sum_f \bar{f} \left( C \frac{Y_f}{2} \right) \gamma^\mu f, \quad (6.4.77)$$

где  $g_1 C = g'$  и суммирование производится по правым и левым кваркам и лептонам (они обозначаются через  $f$ ;  $Y_f$  — гиперзаряд). Нормировочная постоянная  $C$ , определяющая константу  $g_1$ , находится из условия [59]

$$\text{sp} \left( C \frac{Y_f}{2} \right)^2 \equiv C^2 \Sigma \left( \frac{Y_f}{2} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

где суммирование происходит по квинтету левых кварков  $\bar{d}_L^i$  ( $i = 1, 2, 3$  — индекс цвета) и лептонов  $e_L^-, \nu_{eL}$  (см. следующий раздел). Это условие аналогично условию нормировки генераторов групп  $SU(2)_w$  и  $SU(3)_c$ :

$$\text{sp} \left( \frac{\tau_i}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{sp} \left( \frac{\lambda_a}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Так как

$$\frac{Y}{2} (\bar{d}_L^i) = \frac{1}{3}, \quad \frac{Y}{2} (e_L^-) = \frac{Y}{2} (\nu_{eL}) = -\frac{1}{2},$$

то

$$\Sigma \left( \frac{Y_f}{2} \right)^2 = \left( \frac{1}{3} \right)^2 \cdot 3 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \cdot 2 = \frac{5}{6}.$$

Поэтому  $C = \sqrt{\frac{3}{5}}$ .

Вводя константы связи  $\alpha_i = g_i^2/4\pi$  и вспоминая, что

$$g' = g \text{tg} \theta_W, \quad g = \frac{e}{\sin \theta_W},$$

получаем

$$\alpha_1 = \frac{5}{3} \frac{\alpha}{\cos^2 \theta_W}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha}{\sin^2 \theta_W}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}.$$

Соответствующие эффективные константы связи  $\alpha_i(M)$ , зависящие от переданного импульса  $M$  (от переданного импульса поэтому зависят и величины  $\alpha(M)$ ,  $\sin^2 \theta_W(M)$ ), определяются



формулой

$$\frac{1}{\alpha_i(M)} - \frac{1}{\alpha_i(\mu)} = \frac{b_i}{2\pi} \ln \frac{M}{\mu}, \quad (6.4.78)$$

где переданные импульсы  $M$  и  $\mu$  должны быть больше масс рассматриваемых нами частиц, а постоянные  $b_i$  определяются числом фермионных ароматов  $n_f$ , размерностью неабелевой калибровочной группы  $SU(n)$  и числом хиггсовских дублетов  $n_h$ , обеспечивающих массы калибровочных бозонов в случае спонтанного нарушения калибровочной симметрии [64]

$$b_i = \frac{11}{3}n - \frac{3}{3}n_f - \frac{1}{6}cn_h,$$

где  $c = 1$  для группы  $SU_W(2)$  и  $c = \frac{3}{5}$  для группы  $U_Y(1)$ . Если калибровочная группа является точной, то мы должны, очевидно, положить  $c = 0$ .

В случае абелевой группы в отсутствие самодействия калибровочных полей

$$b_1 = -\frac{2}{3}n_f - \frac{1}{10}n_h.$$

Полагая  $n_f = 6$  и  $n_h = 1$ , получаем

$$b_1 = -\frac{41}{10}, \quad b_2 = \frac{19}{6}, \quad b_3 = 7.$$

Уравнение (6.4.78) может быть использовано для проверки идеи великого объединения, которое состоит в том, что при некотором масштабе энергий  $M$  константы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , благодаря своей эволюции, становятся равными. Их дальнейшее поведение будет определяться единой калибровочной группой  $G$ , которая включает в себя в качестве подгруппы группу  $SU_c(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ . Если на масштабе порядка  $M$  группа  $G$  нарушена до трех калибровочных групп, то эволюция соответствующих констант не зависит от структуры группы  $G$  (например,  $SU(5)$  см. ниже), а зависит только от структуры ее подгруппы (например,  $SU_c(3) \times SU_W(2) \times U_Y(1)$ ).

Поскольку экстраполяция бегущих констант должна иметь место, на очень большом интервале энергий (от  $M_W$  до  $M \sim 10^{16}$  GeV), необходимо как можно точнее задать начальные условия, т. е. константы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  при определенной энергии. В качестве трех независимых констант, определяемых экспериментально, обычно выбираются  $\alpha_s = \alpha_3 = g_s^2/4\pi$  — константа  $KXD$ ,  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  — «постоянная» тонкой структуры и  $\sin^2 \theta_W$ .

Анализ эволюции констант связи  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , основанный на точных данных экспериментов на  $LEP$  в районе  $Z$ -бозона:

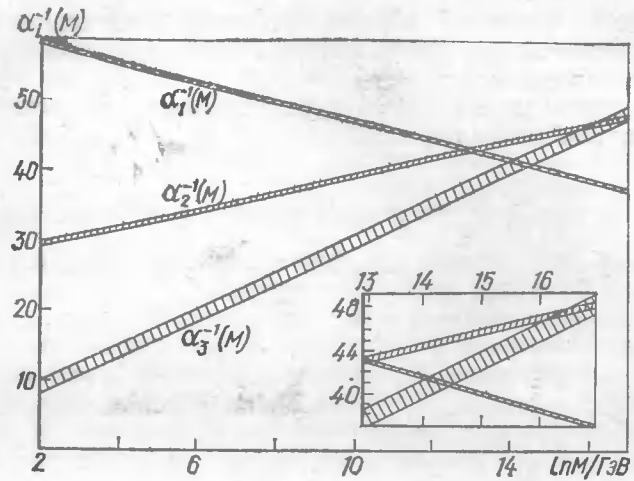


Рис. 48.

$\alpha^{-1}(M_Z) = 128,8$ ;  $\alpha_3(M_Z) = 0,108 \pm 0,05$ ;  $\sin^2 \theta_W = 0,2336 \pm 0,0018$ , показал [65] (см. рис. 48), что единственная точка пересечения трех линий, соответствующих бегущим константам, не может быть достигнута при современной точности (рис. 48). Только при  $\alpha_3(M_Z) = 0,07$  можно считать, что  $\alpha_3$  проходит через точку пересечения кривых  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . С другой стороны, можно оставить  $\alpha_3(M_Z) = 0,108$ , но понизить  $\sin^2 \theta_W(M_Z)$  до 0,21 и также получить одну точку пересечения. Однако  $\alpha_3(M_Z) = 0,07$  и  $\sin^2 \theta_W(M_Z) = 0,21$  не согласуются с их экспериментальными значениями.

В любом случае масштаб  $M$ , при котором происходит пересечение кривых, не превосходит  $10^{16}$  GeV. Как мы увидим ниже, это значение  $M$  входит в противоречие с экспериментальным пределом времени жизни протона относительно его распада на  $\pi^0$  и  $e^+$ .

Для восстановления единой точки пересечения бегущих констант связи  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  и увеличения масштаба точки их пересечения необходимо предположить существование новых частиц (новой физики) на масштабах много меньших  $M$ . Такая физика может идти от суперсимметричного расширения стандартной модели (см. гл. 8). Можно показать, что коэффициенты  $b_i$ , определяющие поведение бегущих констант, в этом случае равны [66]

$$b_1 = -n_f - \frac{3}{10}n_h, \quad b_2 = 6 - n_f - \frac{1}{2}n_h, \quad b_3 = 9 - n_f.$$

Изменение констант  $b_i$  обусловлено наличием суперсимметричных партнеров, благодаря которым происходит усиление эффекта экранировки.

В случае минимального суперсимметричного расширения стандартной модели  $n_f$  остается равным 6, а  $n_h = 2$  [67]. Поэтому

$$b_1 = -\frac{33}{5}, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = 3. \quad (6.4.79')$$

Отметим, что константа  $\alpha_2$  теряет свойство асимптотической свободы (т. е. она становится растущей с увеличением энергии), которым она обладала в стандартной модели.

Как показывают расчеты [65], коэффициенты (6.4.79') приводят к общей точке пересечения бегущих констант связи на масштабе порядка  $10^{16}$  GeV. Таким образом, минимальное суперсимметричное расширение стандартной модели обеспечивает великое объединение (равенство трех констант  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ ), не вступая при этом в противоречие с экспериментальной оценкой времени жизни протона (см. формулу 6.4.81).

При переданных импульсах, соответствующих расстояниям порядка  $r_0 \approx 10^{-29}$  см, интенсивность трех фундаментальных взаимодействий (сильного, электромагнитного и слабого) становится одинаковой. Поэтому мы можем говорить о едином фундаментальном взаимодействии — сильноэлектрослабом [59—61]. Это и есть явление большого объединения или великого синтеза. Общее значение эффективной константы взаимодействия  $\bar{\alpha}(M) \approx 0,02$ . Эта величина мала по сравнению с единицей, поэтому при исследовании различных процессов в области великого синтеза будет применима теория возмущений.

**6.5.2. SU(5)-симметрия.** Одинаковость констант взаимодействия при великом объединении означает, что единое фундаментальное взаимодействие должно обладать некоторой единой симметрией, которая проявляется только в области очень больших энергий  $M > M_0$ ,  $M_0 = 10^{16}$  GeV. Эта симметрия должна объединить  $SU_c(3)$ -цветовую симметрию кварков и  $SU_W(2) \times U_Y(1)$ -симметрию, которая лежит в основе единого электрослабого взаимодействия. Все известные «элементарные фермионы», т. е. лептоны и кварки, должны подчиняться этой объединенной симметрии и должны быть сгруппированы в минимальное число фундаментальных мультиплетов [61, 62, 63].

Простейшей такой объединенной симметрией является  $SU(5)$ -симметрия. Важной характеристикой группы симметрии является ранг группы, т. е. число коммутирующих друг с другом генераторов группы (которые одновременно могут

быть приведены к диагональному виду, позволяя тем самым охарактеризовать частицы определенными квантовыми числами). Поскольку группа цветовой  $SU_c(3)$ -симметрии является группой второго ранга, а ранг группы  $SU_W(2)$  равен единице, то ранг группы симметрии единого фундаментального взаимодействия, основанного одновременно на  $SU_c(3)$  и  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -симметриях, должен быть равен четырем. Простейшей группой четвертого ранга и является группа  $SU(5)$ .

При использовании группы  $SU(5)$  все известные фермионы (кварки и лептоны) подразделяются на три совокупности или, как говорят, три поколения — I, II, III (см. разд. 6.3.1):

$$\begin{array}{ccc} (v_e; ud), & (v_\mu; cs), & (v_\tau; tb). \\ \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array}$$

Каждое поколение включает два лептона и два кварка. Частицы каждого поколения описываются идентично. В рамках  $SU(5)$ -симметрии не удается все лептоны и кварки, относящиеся к одному поколению, объединить в один мультиплет. Но подобная ситуация уже встречалась нам при описании лептонов в группе  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -симметрии электрослабого взаимодействия: там левый электрон и левое нейтрино объединялись в дублет, а правый электрон представлял собой синглет.

Чтобы сконструировать фермионные фундаментальные мультиплеты в рамках  $SU(5)$ -симметрии, необходимо найти число независимых состояний в каждом поколении. Поступая так же, как и в единой теории электрослабого взаимодействия, мы будем различать левые и правые частицы. В каждом поколении содержится 15 левых и правых частиц (с учетом цветов кварков). Например, в первом поколении содержится восемь левых частиц

$$\begin{pmatrix} v_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}_L, \quad i = 1, 2, 3$$

и семь правых частиц

$$e_R, u_R^i, d_R^i, \quad i = 1, 2, 3$$

( $L, R$  обозначают левые и правые частицы, индекс  $i$  служит для обозначения цвета кварка; предполагается, что правые нейтрино не существуют). Заметим, что вместо правых состояний частиц  $e_R, u_R^i, d_R^i$  можно использовать левые состояния соответствующих античастиц  $\bar{e}_L, \bar{u}_L^i, \bar{d}_L^i$ . Эти 15 фермионных состояний можно «разместить» в двух фундаментальных

мультиплетах группы  $SU(5)$ :

$$\bar{5} = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ e \\ \nu_e \end{bmatrix}_L, \quad 10 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{u}_3 & -\bar{u}_2 & -u_1 & -d_1 \\ -\bar{u}_3 & 0 & \bar{u}_1 & -u_2 & -d_2 \\ \bar{u}_2 & -\bar{u}_1 & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -\bar{e} \\ d_1 & d_2 & d_3 & \bar{e} & 0 \end{bmatrix}_L.$$

Эти совокупности частиц образуют базисы двух простейших представлений группы  $SU(5)$ .

Такими же мультиплетами описываются частицы, принадлежащие ко II и III поколениям.

Из структуры мультиплета  $\bar{5}$  легко видеть, что дробность электрического заряда кварка связана с их цветом. Дело в том, что если электрический заряд кварка не зависит от его цвета (а это непременно условие локальной цветовой симметрии) и если суммарный электрический заряд всех частиц данного мультиплета  $SU(5)$  обращается в нуль, то имеет место соотношение

$$3Q(d) - Q(e) = 0, \quad Q(d) = -\frac{1}{3}$$

(отметим, что обращение суммарного заряда в  $SU(5)$ -мультиплете в нуль имеет ту же природу, что и обращение в нуль суммарной проекции изотопического спина частиц, принадлежащей мультиpletу группы  $SU(2)$ ).

Ранее речь шла о классификации лептонов и кварков, т. е. о размещении их по мультиплетам глобальной группы симметрии  $SU(5)$ . Теперь, так же как и при изучении цветовой  $SU(3)_c$ -симметрии кварков и  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ -симметрии лептонов, мы должны сделать симметрию  $SU(5)$  локальной. Для этого должны быть введены калибровочные поля. Число полей равно  $n^2 - 1 = 24$  (по числу генераторов группы  $SU(5)$ ,  $n = 5$ ). С этими полями связаны частицы (векторные бозоны), обмен которыми приводит к взаимодействию в системе фермионов, т. е. между кварками, лептонами и между кварками и лептонами. Сперва все бозоны являются безмассовыми, но затем мы с помощью хиггсова механизма спонтанно нарушаем симметрию  $SU(5)$ , в результате чего бозоны и фермионы приобретают массу (все, кроме фотона и глюонов).

В число рассматриваемых калибровочных бозонов входят, прежде всего, восемь глюонов  $A_\mu^a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ), отвечающих подгруппе  $SU(3)_c$  и ответственных за переходы между известными кварками (отличающимися цветом); далее, сюда входят три бозона  $W_\mu^1, W_\mu^2$  и  $W_\mu^3$ , отвечающие группе  $SU(2)$ , и бозон

$B_\mu$ , отвечающий группе  $U(1)$ , причем линейные комбинации  $W_\mu^3$  и  $B_\mu$  дают  $Z$ -бозон и фотон, как и в теории электрослабого взаимодействия.

Наконец, остается еще 12 бозонов, представляющих собой четыре заряженных цветowych триплета:

$$X_i^{(4/3)}, \quad \bar{X}_i^{(-4/3)}, \quad Y_i^{(1/3)}, \quad \bar{Y}_i^{(-1/3)},$$

где  $i$  — цветовой индекс ( $i = 1, 2, 3$ ) и индексы  $4/3, 1/3$  обозначают электрические заряды частиц.

С  $X$ - и  $Y$ -бозонами мы ранее не встречались, это новые частицы, связанные с  $SU(5)$ -симметрией. Они обуславливают переходы кварков в лептоны ( $X_i$  и  $\bar{X}_i$  обуславливают переходы  $\bar{d} \leftrightarrow e$ , а  $Y_i$  и  $\bar{Y}_i$  — переход  $\bar{d} \leftrightarrow \nu_e$ ).

	$\bar{d}_1$	$\bar{d}_2$	$\bar{d}_3$	$e$	$\nu_e$
$\bar{d}_1$	8 ГЛЮОНОВ			$\bar{X}_1^{(-4/3)}$	$\bar{Y}_1^{(-1/3)}$
$\bar{d}_2$				$\bar{X}_2^{(-4/3)}$	$\bar{Y}_2^{(-1/3)}$
$\bar{d}_3$				$\bar{X}_3^{(-4/3)}$	$\bar{Y}_3^{(-1/3)}$
$e$	$X_1^{(4/3)}$	$X_2^{(4/3)}$	$X_3^{(4/3)}$	$\gamma$	$W^+$
$\nu_e$	$Y_1^{(1/3)}$	$Y_2^{(1/3)}$	$Y_3^{(1/3)}$	$W^-$	$Z$

Представим схему переходов в мультиплете  $\bar{5}$ , обусловленных взаимодействиями фермионов со всеми бозонами, т. е. с глюонами,  $w$ -,  $Z$ -бозонами,  $X$ -,  $Y$ -бозонами и фотоном. Она имеет вид матрицы  $5 \times 5$ , в верхнем левом углу которой находится матрица  $3 \times 3$ , описывающая переходы, обусловленные восемью глюонами, а в правом нижнем углу — матрица, описывающая переходы, обусловленные  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонами, а также фотоном  $\gamma$ ; к этим матрицам примыкают матрицы  $2 \times 3$  и  $3 \times 2$ , описывающие переходы между кварками и лептонами, обусловленные  $X$ - и  $Y$ -бозонами.

Если считать, что массы  $X$ - и  $Y$ -бозонов не превосходят величины  $M_0 \approx 10^{14}$  GeV, то при переданных импульсах  $M \gg M_0$  три бегущие константы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  объединяются в одну общую константу связи  $\bar{\alpha}(M)$ , определяемую формулой

$$\frac{1}{\bar{\alpha}(M)} - \frac{1}{\bar{\alpha}(\mu)} = \frac{\bar{b}}{2\pi} \ln \frac{M}{\mu}, \quad (6.4.79)$$

где постоянная  $\bar{b}$  соответствует группе симметрии  $SU(5)$  и равна, согласно (4.6.22),

$$\bar{b} = \frac{11}{3} \cdot 5 - \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{43}{3}.$$

Таким образом, в области высоких энергий имеет место  $SU(5)$ -симметрия и соответствующая ей теория характеризуется только одной константой связи. В области малых энергий происходит расщепление единого взаимодействия на три фундаментальных взаимодействия (сильное, электромагнитное и слабое), которые характеризуются тремя константами связи. Это расщепление, как и возникновение конечных масс всех фермионов и бозонов (за исключением фотонов и глюонов), обязано спонтанному нарушению  $SU(5)$ -симметрии с помощью хиггсовских скалярных бозонов.

Мы не будем выписывать исходный  $SU(5)$  инвариантный лагранжиан единой теории, включающий в себя хиггсовы бозоны. Отметим лишь, что этот лагранжиан характеризуется только одной константой взаимодействия  $g$ , связанной с  $SU(5)$ -группой, а также константами взаимодействия скалярных полей.

Спонтанное нарушение симметрии происходит в два этапа: сначала благодаря введению 24-плета скалярных полей бозоны  $X$  и  $Y$  приобретают массу и возникают две новые константы связи, так что всего получается три константы связи  $g_1$ ,  $g_2$  и  $g_3$ , характеризующие три фундаментальных взаимодействия. При этом теория теряет  $SU(5)$ -инвариантность и становится  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$  инвариантной. В результате дальнейшего спонтанного нарушения симметрии с помощью квинтета скалярных хиггсовых бозонов приобретают массу все остальные частицы — фермионы и бозоны, кроме фотона и глюонов. В конечном итоге теория теряет также  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$ -инвариантность и сохраняет только  $SU(3)_c \times U(1)_Y$ -инвариантность, соответствующую цветовой и фазовой симметрии.

**6.5.3. Нестабильный протон.** Необычным является то, что  $X$ - и  $Y$ -бозоны обладают как барионным, так и лептонным зарядами. Поэтому их можно назвать лептокварками.

Взаимодействие  $X$ - и  $Y$ -бозонов с фермионами таково, что  $X$ - и  $Y$ -бозоны могут переходить как в пары кварков, так и в пары антилептон — антикварк

$$\begin{aligned} \bar{e} + \bar{d} &\leftarrow X \rightarrow u + u, \\ \bar{\nu}_e + \bar{d} &\leftarrow Y \rightarrow u + d. \end{aligned} \quad (6.4.80)$$

Это следует (как и таблица переходов предыдущего раздела) из структуры квинтета и декуплета, входящих в фермионный свободный лагранжиан кварков и лептонов, а также из принципа введения калибровочных полей, который состоит в том, что производные  $\partial_\mu$  заменяются на ковариантные производные  $D_\mu$ , включающие в себя калибровочные поля. В результате переходов (6.4.80), идущих с несохранением барионного заряда, протон и нейтрон становятся нестабильными, так как они могут превращаться в лептоны:

$$p = uud \rightarrow \bar{e}, \quad a = udd \rightarrow \bar{\nu}_e.$$

Ясно, что в силу сохранения энергии и импульса одиночные лептоны появляться не смогут, а будут иметь место реакции типа

$$p \rightarrow \bar{e} + \pi^0, \quad p \rightarrow \bar{\nu}_e + \pi^+.$$

Интересно, что возможен распад протона и с образованием  $\mu^+$ -мезона, он должен сопровождаться образованием  $K$ -мезонов,  $p \rightarrow \mu^+ + K^0$  или  $p \rightarrow \bar{\nu}_\mu + K^+$ . Такая корреляция среди продуктов распада протона связана с тем, что электрон и мюон принадлежат к разным поколениям группы  $SU(5)$ -симметрии.

Нестабильность протона должна быть очень малой (если вообще она есть). Поэтому массы  $X$ - и  $Y$ -бозонов должны быть очень большими ( $\approx 10^{15}$  GeV). Действительно, матричный элемент распада протона должен быть пропорционален  $g^2/M_x^2$ , где  $M_x$ -масса  $X$ -бозона и  $g^2 \approx \alpha$  — квадрат универсального заряда. Отсюда можно получить следующую оценку для времени жизни протона:

$$\tau_p \approx \frac{M_x^4}{\alpha^2 m_p^5}, \quad (6.4.81)$$

где  $m_p$  — масса протона. Время жизни протона следует считать не меньше  $5 \cdot 10^{31}$  лет. Отсюда следует оценка массы  $M_x$ ,  $M_x \approx 3 \cdot 10^{15} m_p$ . Такова же оценка массы  $Y$ -бозонов. Эта оценка массы  $X$ -бозона соответствует оценке, сделанной в предыдущем разделе.

Заметим, что время жизни протона на двадцать порядков выше времени существования Вселенной, которое составляет  $10^{10}$  лет.

Поскольку в физике элементарных частиц возможна регистрация одиночных распадов, то регистрация подобной неустойчивости протона в принципе не составляет труда. Так, в бочке воды в одну тонну в течение года должен происходить один распад, если время жизни протона  $10^{30}$  лет. В последнее время наряду с моделью  $SU(5)$  появились новые модели великого объединения, в основе которых, в частности, лежит группа  $SO(10)$ . Мы, однако, не будем здесь останавливаться на этих моделях (см. обзор [63]).

Великое объединение касается только сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий, но не затрагивает гравитационное взаимодействие. Между тем подлинно великий синтез должен включить и гравитационное взаимодействие.

Идея такого включения связана с расширением суперсимметрии (см. гл. 8) от глобального уровня до локального. При этом в качестве калибровочных полей в теорию войдет и гравитационное поле. Однако эта идея пока далека еще от завершения.

## ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### § 7.1. Калибровочные поля, связанные с группой Лоренца — Пуанкаре

**7.1.1. Введение калибровочных полей.** В параграфе 4.1 мы вводили калибровочные поля, связанные с унитарной группой симметрии. Эти поля необходимо было вводить с целью сделать теорию инвариантной не только по отношению к глобальным преобразованиям группы унитарной симметрии, но и к локальным преобразованиям, в которых параметры группы являются произвольными функциями координат и времени.

Теперь мы вместо унитарной группы рассмотрим группу преобразований Лоренца — Пуанкаре. Любая физическая теория, как мы знаем, должна быть инвариантной по отношению к глобальным преобразованиям этой группы. Возникает теперь вопрос: как сделать теорию инвариантной по отношению к локальным преобразованиям Лоренца — Пуанкаре, для которых параметры группы  $a^\mu_\nu$ ,  $a^\mu \equiv d^\mu$  (см. § 1.1) являются произвольными функциями координат и времени (т. е. с каждой точкой пространства — времени связывается свое преобразование Лоренца — Пуанкаре)? В этом случае для достижения локальной инвариантности также необходимо введение добавочных калибровочных полей, которые, как мы разъясним далее, представляют собой гравитационные поля [1, 2].

Напомним предварительно, что при бесконечно малых преобразованиях Лоренца — Пуанкаре

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad \delta x^\mu = \epsilon^\mu_{\nu} x^\nu + \epsilon^\mu \equiv \xi^\mu(x) \quad (7.1.1)$$

функции поля  $\chi(x)$  преобразуются согласно формуле (см. (1.1.17))

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x) = \chi(x) + \delta\chi(x),$$

где

$$\delta\chi(x) = -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \chi(x) - \xi^\mu \partial_\mu \chi(x). \quad (7.1.2)$$

Если теория инвариантна по отношению к глобальным преобразованиям Лоренца — Пуанкаре, то при этих вариациях лагранжиан полей  $\mathcal{X}(x)$  преобразуется согласно формуле

$$\delta L(\mathcal{X}(x), \partial_\mu \mathcal{X}(x)) = -\xi^\mu \partial_\mu L(\mathcal{X}(x), \partial_\lambda \mathcal{X}(x)), \quad (7.1.3)$$

так как

$$L(\mathcal{X}'(x'), \partial'_\mu \mathcal{X}'(x')) = L(\mathcal{X}(x), \partial_\mu \mathcal{X}(x)).$$

Обратим внимание на то, что вариация поля, определяемая формулой (7.1.2), коммутирует с операцией дифференцирования  $\partial_\mu \delta \mathcal{X}(x) = \delta \partial_\mu \mathcal{X}(x)$ , поэтому

$$\delta \partial_\lambda \mathcal{X}(x) = -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \partial_\lambda \mathcal{X}(x) - \epsilon^\mu_{\lambda} \partial_\mu \mathcal{X}(x) - \xi^\mu \partial_\mu \partial_\lambda \mathcal{X}(x).$$

В случае локальных преобразований Лоренца — Пуанкаре, когда параметры  $\epsilon^\mu_\nu$ ,  $\epsilon_\mu$  зависят от  $x$ , справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \delta \partial_\lambda \mathcal{X}(x) = & -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu}(x) \Sigma_{\mu\nu} \partial_\lambda \mathcal{X}(x) - \xi^\mu(x) \partial_\mu \partial_\lambda \mathcal{X}(x) - \\ & -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu}_{,\lambda}(x) \Sigma_{\mu\nu} \mathcal{X}(x) - \xi^\mu_{,\lambda} \partial_\mu \mathcal{X}(x), \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

где

$$\epsilon^{\rho\nu}_{,\lambda} = \partial_\lambda \epsilon^{\rho\nu}, \quad \xi^\mu_{,\lambda} = \partial_\lambda \xi^\mu.$$

Такая структура вариаций  $\delta \partial_\lambda \mathcal{X}(x)$  нарушает свойство инвариантности лагранжиана по отношению к локальным преобразованиям Лоренца — Пуанкаре, которые характеризуются функциями  $\epsilon^{\mu\nu}_v(x)$ ,  $\epsilon_\mu(x)$ . Вместо этих величин удобнее рассматривать величины  $\epsilon^{\mu\nu}_v(x)$ ,  $\xi_\mu(x)$ . Первая из этих величин характеризует локальное 4-вращение, а вторая — произвольное координатное преобразование. Поэтому мы будем говорить, что общая вариация поля складывается из  $\epsilon$ -преобразования, связанного с локальным поворотом и  $\xi$ -преобразования, связанного с произвольным координатным преобразованием.

Индексы  $\mu$ ,  $\nu$ , связанные с 4-поворотом, с операцией дифференцирования под знаком лагранжиана, а также тензорные индексы, которыми может обладать поле  $\mathcal{X}(x)$ , мы будем обозначать латинскими буквами  $i, k, \dots$  ( $i, k, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) и называть лоренцевыми индексами. Греческие индексы  $\mu, \nu, \dots$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ) сохраним для обозначения индексов  $\xi$ -преобразования и индексов мировых тензоров и будем называть мировыми индексами. Таким образом, лагранжиан  $L$  запишем в виде

$$L(x) = L(\mathcal{X}(x), \partial_k \mathcal{X}(x)), \quad (7.1.5)$$

а вариацию (7.1.2) — в виде

$$\delta \mathcal{X}(x) = -\frac{i}{2} \epsilon^{ik}(x) \Sigma_{ik} \mathcal{X}(x) - \xi^\mu(x) \partial_\mu \mathcal{X}(x). \quad (7.1.2')$$

Под мировым тензором  $T^{\nu_1 \dots \nu_n}(x)$ , как обычно, понимается величина, которая при бесконечно малых общих преобразованиях координат  $x \rightarrow x' = x + \xi(x)$  ( $\xi \ll 1$ ) преобразуется согласно формуле

$$\begin{aligned} \delta T^{\nu_1 \dots \nu_n}(x) = & \xi^{\nu_1}_{,\lambda_1}(x) T^{\lambda_1 \dots \nu_n}(x) + \dots - \xi^{\lambda_1}_{,\mu_1}(x) T^{\nu_1 \dots \lambda_1 \dots}(x) - \dots \\ & - \xi^\lambda(x) \partial_\lambda T^{\nu_1 \dots \nu_n}(x) \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

(индексы  $\mu$  называются ковариантными, а индексы  $\nu$  — контрвариантными).

Величины  $\Sigma_{ik}$  представляют собой генераторы группы Лоренца и удовлетворяют соотношениям коммутации (1.1.33)

$$i[\Sigma_{ij}, \Sigma_{ps}] = \eta_{si} \Sigma_{pj} - \eta_{pj} \Sigma_{si} + \eta_{sj} \Sigma_{ip} - \eta_{pi} \Sigma_{js}, \quad (7.1.7)$$

где  $\eta_{ik}$  — метрический тензор плоского пространства — времени (мы не используем обозначения  $g_{ik}$ , так как в дальнейшем  $g_{\mu\nu}$  будет обозначать метрику риманова пространства — времени). Эта формула аналогична формуле (1.1.27) для генераторов группы  $SU(n)$ .

Для достижения инвариантности лагранжиана (в смысле (7.1.3)) относительно локальных преобразований Лоренца — Пуанкаре необходимо заменить в лагранжиане обычные производные  $\partial_k \mathcal{X}$  на ковариантные (удлиненные) производные  $D_k \mathcal{X}$

$$L(\mathcal{X}(x), \partial_k \mathcal{X}(x)) \rightarrow L(\mathcal{X}(x), D_k \mathcal{X}(x)), \quad (7.1.8)$$

которые преобразуются согласно формуле (см. (7.1.2'))

$$\begin{aligned} \delta D_k \mathcal{X}(x) = & -\frac{i}{2} \epsilon^{is}(x) \Sigma_{is} D_k \mathcal{X}(x) - \epsilon^i_k(x) D_i \mathcal{X}(x) - \\ & - \xi^\mu(x) \partial_\mu D_k \mathcal{X}(x). \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Эта формула показывает, что при  $\epsilon$ -преобразованиях поле  $D_k \mathcal{X}$  преобразуется, как и поле  $\mathcal{X}$ , с дополнительным лоренцевским индексом  $k$  (два первых слагаемых в формуле (7.1.9)). При  $\xi$ -преобразованиях величина  $D_k \mathcal{X}$  преобразуется, как и поле  $\mathcal{X}$  (т. е. как мировой скаляр; последнее слагаемое в формуле (7.1.9)). С наличием двух типов преобразований,  $\epsilon$ - и  $\xi$ -преобразований, связана необходимость введения двух типов калибровочных полей  $A^i_k$ ,  $a_k^\mu$ , которые и определяют ковариантную производную  $D_k \mathcal{X}$ :

$$D_k \mathcal{X} = \partial_k \mathcal{X} - \frac{i}{2} A^i_k \Sigma_{ij} \mathcal{X} + a_k^\mu \partial_\mu \mathcal{X} \quad (7.1.10)$$

(в соответствии с (7.1.9) при поле  $a_k^\mu$  должна стоять производная  $\partial_\mu \chi$  поля  $\chi$ ). Вводя вместо поля  $a_k^\mu$  поле  $h_k^\mu = \delta_k^\mu + a_k^\mu$ , эту формулу можно переписать в виде

$$D_k \chi = h_k^\mu \left( \partial_\mu \chi - \frac{i}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} \right) \chi, \quad (7.1.11)$$

где

$$A^{ij}{}_k = A^{ij}{}_\mu h_k^\mu. \quad (7.1.12)$$

Чтобы величина  $D_k \chi$  при преобразованиях поля  $\chi$  (см. (7.1.2')) преобразовывалась согласно формуле (7.1.9), необходимо, чтобы калибровочные поля  $h_k^\mu$ ,  $A^{ij}{}_\mu$  преобразовывались согласно формуле

$$\delta h_k^\mu = -\epsilon^i{}_k h_i^\mu + \xi^\mu{}_{,\lambda} h_k^\nu - \xi^\lambda \partial_\lambda h_k^\mu, \quad (7.1.13)$$

$$\delta A^{ij}{}_\mu = \epsilon^i{}_k A^{kj}{}_\mu + \epsilon^j{}_k A^{ik}{}_\mu - \xi^\nu{}_{,\mu} A^{ij}{}_\nu - \epsilon^{ij}{}_{,\mu} - \xi^\lambda \partial_\lambda A^{ij}{}_\mu. \quad (7.1.14)$$

Эти формулы показывают, что поле  $h_k^\mu$  по индексу  $k$  преобразовывается как лоренцевский вектор ( $\epsilon$ -преобразование), а по индексу  $\mu$  — как мировой контрвариантный вектор ( $\xi$ -преобразование). Поле  $A^{ij}{}_\mu$  по индексам  $i, j$  преобразуется как лоренцев тензор второго ранга (поле  $A^{ij}{}_\mu$ , очевидно, антисимметрично по индексам  $i, j$ ), если отвлечься от неоднородного члена  $\epsilon^{ij}{}_{,\mu}$ . Последний аналогичен неоднородному члену, появляющемуся в законе преобразования поля  $A^a{}_\mu$  обычной калибровочной теории. При  $\xi$ -преобразованиях поле  $A^{ij}{}_\mu$  по индексу  $\mu$  преобразуется как ковариантный мировой вектор. Поля  $h, A$  аналогичны калибровочным полям  $A^a{}_\mu$ , рассматриваемым в § 4.1, а функции  $\epsilon_{ik}(x)$ ,  $\xi_\mu(x)$  аналогичны калибровочным функциям  $\omega^a(x)$ .

Чтобы убедиться в справедливости формулы (7.1.9), заметим, что

$$\begin{aligned} \delta D_k \chi &= \delta h_k^\mu \left( \partial_\mu \chi - \frac{i}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} \chi \right) - \frac{i}{2} h_k^\mu \delta A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} \chi + \\ &+ h_k^\mu \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} \right) \delta \chi. \end{aligned}$$

Используя вариации (7.1.2'), (7.1.13), (7.1.14) для полей  $\chi(x)$ ,  $h_k^\mu(x)$ ,  $A^{ij}{}_\mu(x)$ , а также формулу (7.1.7) для генераторов группы Лоренца, мы придем к формуле (7.1.9). Обратим внимание на то, что после удлинения производной в лагранжиане появляются поля с мировым индексом.

**7.1.2. Тензорный анализ калибровочных полей, связанных с группой Лоренца — Пуанкаре.** Наша дальнейшая задача

должна заключаться в построении полного калибровочно инвариантного лагранжиана исходных полей  $\chi$  и калибровочных полей  $h_k^\mu$ ,  $A^{ij}{}_\mu$ . Для построения калибровочно-инвариантного лагранжиана необходимо определить ковариантные производные, которые преобразовывались бы подобно дифференцируемым величинам. В предыдущем разделе мы такие производные уже вводили, но применительно к величинам, не содержащим мировых индексов.

Для этого введем наряду с полем  $h_i^\mu$  поле  $b_\mu^i$  такое, что

$$b^i{}_\mu h_i{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu, \quad b^i{}_\mu h_j{}^\mu = \delta^i{}_j, \quad (7.1.15)$$

(матрица  $b^i{}_\mu$ , определяющая поле  $b$ , обратна матрице  $h_i{}^\nu$ , определяющей поле  $h$ ). Тогда, если  $v_i$  представляет собой лоренцевский вектор, т. е. величину, преобразующуюся по закону

$$v_i(x) \rightarrow v_i(x) = -\epsilon^k{}_i(x) v_k(x) - \xi^\lambda(x) \partial_\lambda v_i(x) + v_i(x)$$

(см. формулу (7.1.2')), в которой  $\chi$  представляет собой векторное поле; в этом случае  $(\Sigma_{ik})_{ls}$  представляет собой матрицу в пространстве векторных индексов  $l, s$ ), то величины

$$v^\mu = b^i{}_\mu v_i, \quad v^\mu = h_i{}^\mu v^i \quad (7.1.16)$$

( $v_i = \eta_{ik} v^k$ ) будут представлять собой ковариантный и контрвариантные мировые векторы, инвариантные относительно  $\epsilon$ -преобразования, т. е. величины, преобразующиеся по закону

$$\delta v_\mu = -\xi^\nu{}_{,\mu} v_\nu - \xi^\lambda \partial_\lambda v_\mu, \quad \delta v^\mu = \xi^\mu{}_{,\nu} v^\nu - \xi^\lambda \partial_\lambda v^\mu. \quad (7.1.17)$$

Это непосредственно следует из закона преобразования (7.1.13) величины  $h_i{}^\mu$

$$\delta h_i{}^\mu = -\epsilon^k{}_i h_k{}^\mu + \xi^\mu{}_{,\nu} h_i{}^\nu - \xi^\lambda \partial_\lambda h_i{}^\mu$$

и закона преобразования величины  $b^i{}_\mu$

$$\delta b^i{}_\mu = \epsilon^i{}_k b^k{}_\mu - \xi^\nu{}_{,\mu} b^i{}_\nu - \xi^\lambda \partial_\lambda b^i{}_\mu, \quad (7.1.18)$$

который следует из формул (7.1.15), (7.1.13).

Из результатов предыдущего раздела имеем

$$D_k v_i = h_k{}^\nu (\partial_\nu v_i - A^k{}_{i\nu} v_\nu) \quad (7.1.18')$$

(латинские индексы поднимаются и опускаются с помощью метрического тензора  $\eta$ ). Следовательно, величины

$$\mathcal{D}_\mu v_i \equiv b^k{}_\mu D_k v_i \quad (7.1.19)$$

будут преобразовываться по индексу  $\mu$  как мировой вектор, а по индексу  $i$  — как лоренцев вектор. Из этой формулы

следует, что

$$\mathcal{D}_\mu v_i = \partial_\mu v_i - A^k_{i\mu} v_k. \quad (7.1.19')$$

Эта величина определяет ковариантную мировую производную от лоренцева вектора.

Определим теперь ковариантную мировую производную от мирового вектора формулой

$$\mathcal{D}_\mu v_\nu \equiv b^i_\nu \mathcal{D}_\mu v_i. \quad (7.1.20)$$

Поле  $\mathcal{D}_\mu v_\nu$  в силу закона преобразования входящих сюда величин преобразуется как мировой тензор второго ранга при  $\xi$ -преобразованиях и как лоренцев скаляр при  $\varepsilon$ -преобразованиях. Подставляя в (7.1.20) выражение (7.1.19') для  $\mathcal{D}_\mu v_i$  и затем выражая лоренцев вектор  $v_i$  с помощью формул (7.1.16) через мировой вектор  $v_\mu$ , получаем

$$\mathcal{D}_\mu v_\nu = \partial_\mu v_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} v_\lambda, \quad (7.1.21)$$

где

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = h_i^\lambda (\partial_\mu b^i_\nu + A^i_{k\mu} b^k_\nu). \quad (7.1.22)$$

Отсюда следует, что величины  $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$  представляют собой аффинную связность [3]. Аналогичным образом легко доказать, что

$$\mathcal{D}_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\mu} v^\lambda, \quad (7.1.21')$$

где  $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$  по-прежнему определяется формулой (7.1.22).

Зная закон преобразования полей  $h$ ,  $b$ ,  $A$ , легко найти закон преобразования величин  $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$

$$\begin{aligned} \delta \Gamma^\mu_{\lambda\nu} = & -\xi^\rho_{,\lambda} \Gamma^\mu_{\rho\nu} - \xi^\rho_{,\nu} \Gamma^\mu_{\lambda\rho} + \xi^\mu_{,\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \\ & - \xi^\mu_{,\lambda\nu} - \xi^\rho \partial_\rho \Gamma^\mu_{\lambda\nu}. \end{aligned} \quad (7.1.23)$$

Таким образом, если отвлечься от неоднородного члена  $\xi^{\lambda\nu}_{,\mu}$ , то коэффициенты аффинной связности преобразуются как тензор третьего ранга при  $\xi$ -преобразованиях и как скаляр при  $\varepsilon$ -преобразованиях.

Заметим, что из определения (7.1.22) не следует, что величины  $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$  симметричны по индексам  $\lambda$ ,  $\nu$ . Разность  $\Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  в силу формулы (7.1.23) представляет собой мировой тензор третьего ранга.

**7.1.3. Общее определение операции ковариантного дифференцирования.** Выше мы дали определение ковариантной производной  $D_i \chi$  от величины  $\chi$ , которая содержит лоренцев индекс  $i$ . В соответствии с формулой (7.1.19) можно дать следующее определение мировой ковариантной производной от величины  $\chi$ :

$$\mathcal{D}_\mu \chi \equiv b^k_\mu D_k \chi = \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} A^i_{\mu} \Sigma_{ij} \right) \chi. \quad (7.1.24)$$

Величина  $\chi$  в этой формуле не содержит мировых индексов. Пусть теперь величина  $\chi$  кроме лоренцевых индексов (спинорных и 4-тензорных индексов  $i$ ) содержит мировые индексы  $\chi_{\mu\dots}$  (лоренцевы индексы явно не выписываются). Тогда при  $\varepsilon$ - и  $\xi$ -преобразованиях она будет преобразовываться по формуле

$$\begin{aligned} \delta \chi_{\mu\dots} = & -\frac{i}{2} \varepsilon^{ij} \Sigma_{ij} \chi_{\mu\dots} - \xi^\lambda_{,\mu} \chi_{\lambda\dots} - \dots + \\ & + \xi^\nu_{,\lambda} \chi_{\mu\dots} + \dots - \xi^\lambda \partial_\lambda \chi_{\mu\dots}. \end{aligned} \quad (7.1.25)$$

Эту формулу мы будем записывать в более компактном виде

$$\delta \chi = -\frac{i}{2} \varepsilon^{ij} \Sigma_{ij} \chi - i \xi^\lambda_{,\mu} Q_\lambda{}^\mu \chi - \xi^\lambda \partial_\lambda \chi, \quad (7.1.25')$$

где  $Q_\lambda{}^\mu$  — генератор  $\xi$ -преобразования ( $\Sigma_{ij}$  — генератор  $\varepsilon$ -преобразования). Этот генератор представляет оператор, действующий на мировые индексы величины  $\chi$ , и удовлетворяет следующим перестановочным соотношениям:

$$i [Q_\lambda{}^\mu, Q_\rho{}^\sigma] + \delta_\rho{}^\mu Q_\lambda{}^\sigma - \delta_\lambda{}^\sigma Q_\rho{}^\mu = 0 \quad (7.1.26)$$

(сравним с формулой (7.1.7) для  $\Sigma_{ij}$ ). Чтобы убедиться в справедливости этой формулы, рассмотрим, например, преобразование ковариантного мирового вектора  $v_\mu$

$$\delta v_\mu = -\xi^\lambda_{,\mu} v_\lambda - \xi^\lambda \partial_\lambda v_\mu.$$

С другой стороны, согласно (7.1.25'), имеем

$$\delta v_\mu = -i \xi^\lambda_{,\rho} (Q_\lambda{}^\rho)_\mu{}^\nu v_\nu - \xi^\lambda \partial_\lambda v_\mu.$$

Поэтому

$$(Q_\lambda{}^\rho)_\mu{}^\nu = -i \delta_\lambda{}^\nu \delta_\mu{}^\rho$$

и, следовательно,

$$i (Q_\lambda{}^\mu)_\alpha{}^\nu (Q_\rho{}^\sigma)_\nu{}^\beta - i (Q_\rho{}^\sigma)_\alpha{}^\nu (Q_\lambda{}^\mu)_\nu{}^\beta = -\delta_\rho{}^\mu (Q_\lambda{}^\sigma)_\alpha{}^\beta + \delta_\lambda{}^\sigma (Q_\rho{}^\mu)_\alpha{}^\beta,$$

что и доказывает формулу (7.1.26).

Определим теперь ковариантную мировую производную общего поля  $\chi_{\mu\dots} \equiv \chi$ :

$$\mathcal{D}_\nu \chi = \partial_\nu \chi - \frac{i}{2} A^i_{\nu} \Sigma_{ij} \chi - i \Gamma^\lambda_{\mu\nu} Q_\lambda{}^\mu \chi. \quad (7.1.27)$$

Если величина  $\chi$  не содержит мировых индексов, то это определение переходит в определение (7.1.24), если же величина  $\chi$  содержит только один мировой индекс и не содержит никаких других индексов, то это определение переходит в формулы (7.1.21), (7.1.21').



Для доказательства формулы (7.1.27) достаточно убедиться, что величина  $D_\nu \chi$  преобразуется так же, как величина  $\chi$  с добавочным мировым индексом  $\nu$ . Используя формулы для вариаций полей  $\chi$ ,  $A^i{}_\mu$ ,  $h^i{}_\mu$ , имеем

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D}_\nu \chi &= \partial_\nu \left\{ -\frac{i}{2} \varepsilon^{ij} \Sigma_{ij} \chi - i \xi^\lambda{}_{,\mu} Q_\lambda{}^\mu \chi - \xi^\lambda \partial_\lambda \chi \right\} - \\ &- \frac{i}{2} A^i{}_\nu \Sigma_{ij} \left\{ -\frac{i}{2} \varepsilon^{sp} \Sigma_{sp} \chi - i \xi^\lambda{}_{,\mu} Q_\lambda{}^\mu \chi - \xi^\lambda \partial_\lambda \chi \right\} - \\ &- i \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} Q_\lambda{}^\mu \left\{ -\frac{i}{2} \varepsilon^{ij} \Sigma_{ij} \chi - i \xi^\rho{}_{,\sigma} Q_\rho{}^\sigma \chi - \xi^\rho \partial_\rho \chi \right\} - \\ &- \frac{i}{2} \left\{ \varepsilon^i{}_k A^{kj}{}_\nu + \varepsilon^i{}_k A^{ik}{}_\nu - \varepsilon^{ij}{}_{,\nu} - \xi^\mu{}_{,\nu} A^i{}_\mu - \xi^\lambda \partial_\lambda A^i{}_\nu \right\} \Sigma_{ij} \chi - \\ &- i \left\{ -\xi^\rho{}_{,\mu} \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} - \xi^\rho{}_{,\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} + \xi^\lambda{}_{,\rho} \Gamma^\rho{}_{,\mu\nu} - \xi^\lambda{}_{,\mu\nu} - \xi \partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \right\} Q_\lambda{}^\mu \chi. \end{aligned}$$

Используя далее соотношения коммутации (7.1.7), (7.1.26) для генераторов  $\Sigma_{ij}$  и  $Q_\lambda{}^\mu$  и замечая, что  $[\Sigma_{ij}, Q_\lambda{}^\mu] = 0$ , получаем после несложных выкладок

$$\delta \mathcal{D}_\nu \chi = -\frac{i}{2} \varepsilon^{ij} \Sigma_{ij} \mathcal{D}_\nu \chi - i \xi^\lambda{}_{,\mu} Q_\lambda{}^\mu \mathcal{D}_\nu \chi - \xi^\lambda{}_{,\nu} \mathcal{D}_\lambda \chi - \xi^\lambda \partial_\lambda \mathcal{D}_\nu \chi. \quad (7.1.28)$$

Лоренцева ковариантная производная  $D_i$  для произвольной величины  $\chi$  определяется формулой

$$\mathcal{D}_i \chi = h_i{}^\mu \mathcal{D}_\mu \chi, \quad \mathcal{D}_\mu \chi = b^i{}_\mu D_i \chi. \quad (7.1.29)$$

Таким образом, с помощью полей  $h_i{}^\mu$ ,  $b^i{}_\mu$  устанавливается связь между величинами, несущими лоренцевский индекс, и величинами, несущими мировой индекс.

В качестве примера найдем ковариантную мировую производную величин  $h_i{}^\lambda$ ,  $b^i{}_\mu$ . Эти величины содержат один лоренцев индекс  $i$  и один мировой индекс  $\mu$ . Поэтому, согласно (7.1.27),

$$\mathcal{D}_\nu h_i{}^\lambda = \partial_\nu h_i{}^\lambda - A^k{}_{i\nu} h_k{}^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} h_i{}^\mu.$$

Используя далее формулу (7.1.22) для  $\Pi^\lambda{}_{\mu\nu}$  и то, что  $h_i{}^\mu b^k{}_\mu = \delta_i{}^k$ , получаем

$$\mathcal{D}_\nu h_i{}^\lambda = 0. \quad (7.1.30)$$

Аналогичным образом доказывается формула

$$\mathcal{D}_\nu b^i{}_\mu = 0. \quad (7.1.31)$$

Покажем теперь, что величина  $\Sigma_{ij} \chi$  преобразуется так же, как и величина  $\chi$  с двумя дополнительными лоренцевскими индексами  $i, j$ , а величина  $Q_\lambda{}^\mu \chi$  — так же, как и величина  $\chi$  с двумя дополнительными мировыми индексами  $\mu, \lambda$ . Заметим с этой целью, что, согласно (7.1.25'),

$$\begin{aligned} \delta (\Sigma_{ij} \chi) &= -\frac{i}{2} \varepsilon^{sp} \Sigma_{sp} (\Sigma_{ij} \chi) - i \xi^\lambda{}_{,\mu} Q_\lambda{}^\mu \Sigma_{ij} \chi - \xi^\lambda \partial_\lambda \Sigma_{ij} \chi + \\ &+ \frac{i}{2} \varepsilon^{sp} [\Sigma_{sp}, \Sigma_{ij}] \chi. \end{aligned}$$

Поэтому, используя перестановочные соотношения для генераторов  $\Sigma_{ij}$  (см. (7.1.7)), имеем

$$\begin{aligned} \delta (\Sigma_{ij} \chi) &= -\frac{i}{2} \varepsilon^{sp} \Sigma_{sp} (\Sigma_{ij} \chi) - \varepsilon^p{}_i \Sigma_{pj} \chi - \varepsilon^p{}_j \Sigma_{ip} \chi - \\ &- i \xi^\lambda{}_{,\mu} Q_\lambda{}^\mu (\Sigma_{ij} \chi) - \xi^\lambda \partial_\lambda (\Sigma_{ij} \chi), \end{aligned} \quad (7.1.32)$$

что и доказывает высказанное утверждение. Аналогичным образом доказывается формула для

$$\begin{aligned} \delta (Q_\mu{}^\lambda \chi) &= -\frac{i}{2} \varepsilon^{sp} \Sigma_{sp} (Q_\mu{}^\lambda \chi) - i \xi^\rho{}_{,\sigma} Q_\rho{}^\sigma (Q_\mu{}^\lambda \chi) - \\ &- \xi^\rho{}_{,\mu} Q_\rho{}^\lambda \chi + \xi^\lambda{}_{,\rho} Q_\mu{}^\rho \chi - \xi^\rho \partial_\rho (Q_\mu{}^\lambda \chi). \end{aligned} \quad (7.1.33)$$

Найдем в заключение этого раздела разность  $\mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\nu \chi - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\rho \chi$ . Согласно определению (7.1.27),

$$\mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\nu \chi = \partial_\rho \mathcal{D}_\nu \chi - \frac{i}{2} A^i{}_\rho \Sigma_{ij} \mathcal{D}_\nu \chi - i \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} Q_\lambda{}^\mu \mathcal{D}_\nu \chi - \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \mathcal{D}_\lambda \chi$$

(мы рассматриваем здесь величину  $\mathcal{D}_\nu \chi$  как величину типа  $\chi$  с добавочным индексом  $\nu$ ). Подставляя в эту формулу выражение (7.1.27) для  $\mathcal{D}_\nu \chi$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\nu \chi &= \partial_\rho \left\{ \partial_\nu \chi - \frac{i}{2} A^i{}_\nu \Sigma_{ij} \chi - i \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} Q_\lambda{}^\mu \chi \right\} - \\ &- \frac{i}{2} A^i{}_\rho \Sigma_{ij} \left\{ \partial_\nu \chi - \frac{i}{2} A^k{}_\nu \Sigma_{kl} \chi - i \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} Q_\lambda{}^\mu \chi \right\} - \\ &- i \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} Q_\lambda{}^\mu \left\{ \partial_\nu \chi - \frac{i}{2} A^k{}_\nu \Sigma_{kl} \chi - i \Gamma^\sigma{}_{\kappa\nu} Q_\sigma{}^\kappa \chi \right\} - \\ &- \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \left\{ \partial_\lambda \chi - \frac{i}{2} A^k{}_\lambda \Sigma_{kl} \chi - i \Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda} Q_\sigma{}^\kappa \chi \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\nu \chi - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\rho \chi &= -(\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}) \mathcal{D}_\lambda \chi - \frac{i}{2} (\partial_\rho A^i{}_\nu - \\ &- \partial_\nu A^i{}_\rho) \Sigma_{ij} \chi - \frac{1}{4} A^i{}_\rho A^k{}_\nu [\Sigma_{ij}, \Sigma_{kl}] \chi - i (\partial_\rho \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \end{aligned}$$

$$-\partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} Q_\lambda{}^\mu \chi - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\kappa\nu} [Q_\lambda{}^\mu, Q_\sigma{}^\kappa] \chi.$$

Подставляя сюда выражения (7.1.7), (7.1.26) для коммутаторов генераторов  $\Sigma_{ij}$ ,  $Q_\mu{}^\nu$ , получаем окончательно

$$\mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\nu \chi - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\rho \chi = i R^\lambda_{\mu\rho\nu} Q_\lambda{}^\mu \chi + \frac{i}{2} R^{ij}_{\rho\nu} \Sigma_{ij} \chi - C^\lambda_{\nu\rho} \mathcal{D}_\lambda \chi, \quad (7.1.34)$$

где

$$R^\lambda_{\mu\rho\nu} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho} \Gamma^\lambda_{\kappa\nu} - \Gamma^\lambda_{\kappa\rho} \Gamma^\kappa_{\mu\nu}, \quad (7.1.35)$$

$$R^{ij}_{\rho\nu} = \partial_\nu A^{ij}_\rho - \partial_\rho A^{ij}_\nu - A^{ik}_\rho A^{ij}_\nu \eta_{kl} + A^{ik}_\nu A^{ij}_\rho \eta_{kl}, \quad (7.1.36)$$

$$C^\lambda_{\rho\nu} = \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho}.$$

Так как величины  $\mathcal{D}_\rho \mathcal{D}_\nu \chi - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\rho \chi$ ,  $Q_\lambda{}^\mu \chi$ ,  $\Sigma_{ij} \chi$ ,  $\mathcal{D}_\lambda \chi$  преобразуются при  $\varepsilon$ -,  $\xi$ -преобразованиях как величина  $\chi$  с соответствующими дополнительными индексами, то величины  $R^\lambda_{\mu\rho\nu}$ ,  $C^\lambda_{\nu\rho}$  представляют собой мировые тензоры четвертого и третьего рангов (они являются скалярными по отношению к  $\varepsilon$ -преобразованию), а величина  $R^{ij}_{\rho\nu}$  — мировой тензор по индексам  $\rho$ ,  $\nu$  и лоренцевский тензор по индексам  $i$ ,  $j$ .

## § 7.2. Интерпретация калибровочных полей, связанных с группой Лоренца — Пуанкаре, как гравитационных полей

### 7.2.1. Геометрическая интерпретация калибровочных полей.

Введенным калибровочным полям  $h_i{}^\mu$ ,  $A^{ik}_\mu$  можно дать геометрическую интерпретацию, связав с ними некоторое риманово пространство.

Поскольку величины  $b^k_\mu(x)$  преобразуются по индексу  $k$  как лоренцевский 4-вектор, а по индексу  $\mu$  — как мировой вектор, то величина  $b^k_\mu b_{k\nu}$  является инвариантом по отношению к  $\varepsilon$ -преобразованиям и симметричным мировым тензорам второго ранга по отношению к  $\xi$ -преобразованиям. Поэтому можно отождествить эту величину с метрическим тензором некоторого риманова пространства

$$g_{\mu\nu}(x) = b^k_\mu(x) b_{k\nu}(x), \quad (7.2.1)$$

в котором квадрат расстояния  $ds^2$  определяется формулой

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (7.2.2)$$

При этом величины  $x^\mu$ , которые до сего времени являлись декартовыми координатами в пространстве Минковского (с

метрикой, определяемой тензором  $\eta_{kl}$ ), в римановом пространстве теряют свой первоначальный смысл и приобретают смысл произвольных четырех параметров, определяющих положение точки в римановом пространстве. Это риманово пространство в разделе 7.2.3 мы свяжем с физическим 3 + 1-мерным пространством-временем.

Ясно, что если  $v^\nu$  — некоторый контрвариантный мировой вектор, то величина  $g_{\nu\mu} v^\nu \equiv v_\mu$  представляет собой соответствующий ковариантный вектор по отношению к  $\xi$ -преобразованиям. В частности, легко видеть, что  $b^k_\mu = g_{\mu\nu} h^{k\nu}$  (латинские индексы опускаются и поднимаются с помощью тензора Минковского  $\eta_{kl}$ ). Поэтому можно было бы записать  $b^k_\mu = h^k_\mu$ .

Калибровочным полям  $b^k_\mu$  также можно дать геометрическую интерпретацию в рассматриваемом римановом пространстве. Рассмотрим с этой целью касательное эвклидово пространство, связанное с точкой  $x$ . В этом пространстве введем два репера — лоренцевский ортонормированный репер  $\underline{e}_l(x)$ , для которого

$$(\underline{e}_l(x), \underline{e}_s(x)) = \eta_{ls}, \quad (7.2.3)$$

и афинный репер  $\underline{e}_\mu(x)$ , для которого

$$(\underline{e}_\mu(x), \underline{e}_\nu(x)) = g_{\mu\nu}(x), \quad (7.2.4)$$

где круглые скобки служат для обозначения обычного скалярного произведения в касательном эвклидовом пространстве. Тогда произвольный вектор  $\underline{A}$  можно разложить либо по ортам  $\underline{e}_\mu(x)$ , либо по ортам  $\underline{e}_l(x)$

$$\underline{A}(x) = A^\mu(x) \underline{e}_\mu(x) = A^l(x) \underline{e}_l(x),$$

где  $A^\mu(x)$  — компоненты мирового вектора в римановом пространстве, совпадающие по определению с соответствующими компонентами в касательном эвклидовом пространстве в системе ортов  $\underline{e}_\mu(x)$ , и  $A^l(x)$  — компоненты вектора  $\underline{A}$  в том же касательном эвклидовом пространстве в системе ортов  $\underline{e}_l(x)$ . В частности, вектор  $\underline{dx}$  может быть представлен в виде

$$\underline{dx} = dx^\mu \underline{e}_\mu(x) = dx^l \underline{e}_l(x),$$

а интервал  $ds^2$  в фиксированной точке  $x$ , согласно (7.2.3), в виде

$$ds^2 = (\underline{dx}, \underline{dx}) = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}(x) = dx^l dx^l. \quad (7.2.5)$$

Подчеркнем, что последнее представление является локальным, т. е. относится к фиксированной точке  $x$ , поскольку

не существует глобальной связи между  $x^\mu$  и  $x^i$ . Орты  $\underline{e}_\mu(x)$  можно разложить по лоренцевским ортам  $\underline{e}_i(x)$

$$\underline{e}_\mu(x) = b^k{}_\mu(x) e_k(x), \quad (7.2.6)$$

так, что, согласно (7.2.4),

$$g_{\mu\nu}(x) = b^k{}_\mu(x) b_{k\nu}(x).$$

Сравнение этой формулы с формулой (7.2.1) показывает, что калибровочные поля  $b^k{}_\mu(x)$  можно рассматривать как коэффициенты разложения локальных аффинных ортов  $\underline{e}_\mu(x)$  по системе локальных лоренцевских ортов  $\underline{e}_i(x)$ .

Калибровочные поля  $A^k{}_\mu(x)$  вместе с калибровочными полями  $h_i{}^\lambda(x)$  определяют, согласно (7.1.22), коэффициенты аффинной связности

$$\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} = h_i{}^\lambda(\partial_\mu b^i{}_\nu + A^i{}_{k\mu} b^k{}_\nu),$$

с помощью которых производится ковариантное дифференцирование мировых тензоров и связанный с ним параллельный перенос (см. следующий раздел). Величина  $C^\mu{}_{\lambda\nu} = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}$ , введенная в предыдущем разделе, представляет собой мировой тензор третьего ранга и носит название тензора кручения рассматриваемого риманова пространства.

Свяжем теперь величины  $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$  с метрическим тензором  $g_{\mu\nu}$  и тензором кручения  $C^\mu{}_{\lambda\nu}$ . Учитывая, что греческие индексы опускаются (и поднимаются) с помощью метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  ( $g^{\mu\nu}$ ), а латинские индексы — с помощью тензора  $\eta_{kl}$  ( $\eta^{kl}$ ), перепишем формулу (7.1.22) в виде

$$A_{\rho\lambda\nu} \equiv b_{i\rho} b_{j\lambda} A^{ij}{}_\nu = \Gamma_{\rho\lambda\nu} + b^k{}_\mu b_{k\rho} b^i{}_\lambda \partial_\nu h_i{}^\mu,$$

откуда

$$\begin{aligned} A_{\rho\lambda\nu} - A_{\rho\nu\lambda} &= C_{\rho\lambda\nu} + b^k{}_\mu b_{k\rho} (b^i{}_\lambda \partial_\nu h_i{}^\mu - b^i{}_\nu \partial_\lambda h_i{}^\mu) = \\ &= C_{\rho\lambda\nu} - b_{i\rho} \partial_\nu b^i{}_\lambda + b_{i\rho} \partial_\lambda b^i{}_\nu, \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

где

$$C_{\rho\lambda\nu} = g_{\rho\mu} C^\mu{}_{\lambda\nu}.$$

Переставляя в (7.2.7) индексы  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\nu$ , имеем

$$A_{\lambda\rho\nu} - A_{\lambda\nu\rho} = C_{\lambda\rho\nu} - b_{i\lambda} \partial_\nu b^i{}_\rho + b_{i\lambda} \partial_\rho b^i{}_\nu,$$

$$A_{\nu\lambda\rho} - A_{\nu\rho\lambda} = C_{\nu\lambda\rho} - b_{i\nu} \partial_\rho b^i{}_\lambda + b_{i\nu} \partial_\lambda b^i{}_\rho.$$

Учитывая далее, что  $A_{\rho\lambda\nu} = -A_{\rho\nu\lambda}$ , получаем отсюда

$$A_{\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2} (C_{\rho\lambda\nu} + C_{\nu\lambda\rho} - C_{\lambda\nu\rho}) +$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \{ b_{i\rho} (\partial_\lambda b^i{}_\nu - \partial_\nu b^i{}_\lambda) + b_{i\nu} (\partial_\lambda b^i{}_\rho - \partial_\rho b^i{}_\lambda) + \\ &+ b_{i\lambda} (\partial_\rho b^i{}_\nu - \partial_\nu b^i{}_\rho) \}. \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Из этой формулы следует, что

$$A_{l k j} \equiv h_l{}^\lambda h_k{}^\nu h_j{}^\rho A_{\lambda\nu\rho} = \frac{1}{2} (C_{l k j} + C_{j k l} - C_{k l j}) + \omega_{l k j}, \quad (7.2.9)$$

$$\begin{aligned} 2\omega_{l k j} &= (h_k{}^\lambda h_l{}^\nu - h_k{}^\nu h_l{}^\lambda) \partial_\lambda b_{j\nu} + (h_j{}^\nu h_k{}^\lambda - h_j{}^\lambda h_k{}^\nu) \partial_\lambda b_{l\nu} + \\ &+ (h_j{}^\lambda h_l{}^\nu - h_j{}^\nu h_l{}^\lambda) \partial_\lambda b_{k\nu}. \end{aligned}$$

Величины  $A_{l k j}$  представляют собой скаляр по отношению к  $\xi$ -преобразованиям (мировой скаляр). Однако эта величина не представляет собой тензора по отношению к  $\varepsilon$ -преобразованиям. Отклонение от тензорного (по лоренцевым индексам  $l$ ,  $k$ ,  $j$ ) характера преобразования происходит благодаря присутствию членов  $\omega_{l k j}$ , называемых коэффициентами кручения Риччи.

Учитывая, что

$$\Gamma_{\nu\lambda\rho} = A_{\nu\lambda\rho} + b_{i\nu} \partial_\rho b^i{}_\lambda,$$

получаем, используя (7.2.8),

$$\Gamma_{\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\nu\rho} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\rho}) + \frac{1}{2} (C_{\rho\lambda\nu} + C_{\nu\lambda\rho} - C_{\lambda\nu\rho}). \quad (7.2.10)$$

Если мы рассматриваем риманово пространство без кручения ( $C_{\nu\lambda\rho} = 0$ ), что имеет место, если величины  $\Gamma_{\nu\lambda\rho}$  симметричны по индексам  $\lambda$ ,  $\rho$ , то коэффициенты аффинной связности выражаются только через метрический тензор

$$\Gamma_{\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\nu\rho} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\rho}) \quad (7.2.11)$$

и в этом случае носят название символов Кристоффеля.

Заметим, что обычно эта формула выводится из требования равенства нулю ковариантной производной метрического тензора

$$\mathcal{D}_\rho g_{\mu\nu} = 0 \quad (7.2.12)$$

и предположения о симметрии величин  $\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}$  по индексам  $\lambda$ ,  $\rho$  (формула (7.2.12) вытекает из формул (7.2.1), (7.1.30); при этом не предполагается, что  $\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} = \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}$ ).

В предыдущем параграфе мы видели, что величины  $R^i{}_{\mu\nu}$ ,  $R^\lambda{}_{\mu\rho\nu}$ ,  $C^\lambda{}_{\nu\rho}$  определяют степень некоммутативности вторых ковариантных производных (см. (7.1.34)). Производя неслож-

ные выкладки с использованием определений (7.1.35), (7.1.36), можно показать, что

$$R^{\lambda}_{\mu\rho\nu} = h_i^{\lambda} b^i_{\mu} R^i_{\rho\nu}, \quad (7.2.13)$$

т. е. величина  $R^{\lambda}_{\mu\rho\nu}$  получается из величины  $R^i_{\rho\nu}$  стандартным образом путем преобразования лоренцевских индексов в мировые с помощью полей  $h_i^{\lambda}$ ,  $b^i_{\mu}$ . Мировой тензор  $R^{\lambda}_{\mu\rho\nu}$  называется тензором кривизны Римана — Кристоффеля, а тензор второго ранга

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (7.2.14)$$

называется тензором Риччи. Отметим, что в отсутствие кручения ( $C^{\lambda}_{\nu\rho} = 0$ ) тензор  $R_{\mu\nu}$  обладают следующими свойствами симметрии:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (7.2.15)$$

Изложенный нами формализм, связанный с введением полей  $h_i^{\lambda}$ ,  $b^i_{\mu}$  (определяющих метрику  $g_{\mu\nu} = b^k_{\mu} b_{k\nu}$ ), носит название тетрадного формализма.

Для эвклидова пространства тензор  $g_{\mu\nu}$  имеет вид

$$g_{\mu\nu}(x) = \partial_{\mu}\varphi^i \partial_{\nu}\varphi_i, \quad (7.2.16)$$

так как принимая величины  $\varphi^i(x) \equiv x^i$  за новые координаты (вместо  $x_{\mu}$ ), мы приведем интервал  $ds^2$  к виду

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{kl} dx^k dx^l.$$

Отсюда видно, что для плоского пространства тензор кривизны обращается в нуль,  $R^{\lambda}_{\mu\rho\nu} = 0$ . Справедливо и обратное утверждение: если  $R^{\lambda}_{\mu\rho\nu} = 0$ , то пространство является эвклидовым (плоским). Величины  $b_{\mu}^k$  для плоского пространства, очевидно, имеют вид

$$b_{\mu}^k = a^k_i(x) \partial_{\mu}\varphi^i(x),$$

где  $a^k_i(x)$  — локальные коэффициенты преобразования Лоренца, зависящие от точки  $x$ . Поэтому в случае эвклидова пространства дифференциальные формы

$$b_{\mu}^k dx^{\mu}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

оказываются интегрируемыми. Они имеют интегрирующие «множители», соответствующие ортогональной матрице  $a^k_i(x)$  ( $a^k_i a^s_k = \delta^s_i$ ),

$$a^k_i(x) b_{\mu}^k(x) dx^{\mu} = d\varphi^i.$$

Калибровочные поля  $h_k^{\mu}$ ,  $A^{ki}_{\mu}$  определяют такие фундаментальные геометрические величины, как метрический тензор, тензор кривизны, тензор кручения, коэффициенты аффинной связности. Эти величины лежат в основе общей теории относительности, которая связывает геометрические свойства пространства — времени с гравитационными полями. Поэтому по сути калибровочные поля  $h_k^{\mu}$ ,  $A^{ki}_{\mu}$  следует рассматривать как гравитационные поля.

**7.2.2. Параллельный перенос и ковариантное дифференцирование.** Как мы уже говорили, калибровочные поля  $h_i^{\mu}$ ,  $A^{ik}_{\mu}$ , связанные с группой Пуанкаре — Лоренца, могут быть отождествлены с гравитационными полями. Гравитационные поля в свою очередь, как известно, связаны с геометрией пространства — времени, в частности с его неевклидовым характером. В этой связи целесообразно рассмотреть геометрическую интерпретацию операции ковариантного дифференцирования.

Начнем с рассмотрения пространства аффинной связности, в котором вводятся только понятия параллельного переноса (но не метрики). Координаты точек этого пространства будем обозначать через  $x^{\mu}$ . Пусть задано в этом пространстве некоторое поле  $\chi(x)$ , преобразующееся в точке  $x$  по той или иной группе преобразований. Это значит, что поле  $\chi(x)$  должно быть снабжено индексами (лоренцевыми спинорными или тензорными индексами в случае  $\varepsilon$ -преобразований, мировыми индексами в случае общих  $\xi$ -преобразований, индексами внутренней симметрии в случае преобразований внутренней симметрии; эти индексы мы для простоты опускаем). Эти поля при бесконечно малых преобразованиях группы симметрии преобразуются в соответствии с формулой (7.1.25')

$$\delta\chi(x) = -iT\chi(x) - \xi^{\lambda} \partial_{\lambda}\chi(x), \quad T = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \Sigma_{ij} + \xi^{\lambda}_{\mu} Q_{\lambda}^{\mu}, \quad (7.2.17)$$

где генераторы  $\Sigma_{ij}$ ,  $Q_{\lambda}^{\mu}$  групп  $\varepsilon$ - и  $\xi$ -преобразований, связанных с группой Пуанкаре — Лоренца, действуют соответственно на лоренцевские и мировые индексы поля  $\chi(x)$  (о генераторах, соответствующих преобразованиям внутренней симметрии, см. в главе 4).

Так как параметры группы Лоренца — Пуанкаре  $\varepsilon^{ij}$ ,  $\xi^{\lambda}$  зависят от  $x$ , то производные  $\partial_{\mu}\chi(x)$  не будут преобразовываться по закону типа (7.2.17). Это связано с тем, что при определении производных  $\partial_{\mu}\chi$  мы сравниваем поля в разных точках пространства, в которых они преобразуются по-раз-

ному. Поэтому при определении ковариантной производной мы должны поле  $\chi(x)$  в точке  $x$  «параллельно» перенести в точку  $x + dx$  и сравнить «параллельно» перенесенное поле в  $x + dx$  (которое мы обозначим через  $\underline{\chi}(x + dx)$ ) с полем  $\chi(x + dx)$ ,

$$\mathcal{D}\chi(x) \equiv \chi(x + dx) - \underline{\chi}(x + dx).$$

Параллельно перенесенное поле  $\chi(x + dx)$  связано с исходным полем  $\chi(x)$  формулой

$$\underline{\chi}(x + dx) = \chi(x) + \Delta\chi(x),$$

где величина  $\Delta\chi(x)$  должна быть линейна как по параллельно переносимому полю  $\chi(x)$ , так и по дифференциалу  $dx^\mu$ ,

$$\Delta\chi(x) = \Gamma_\mu(x)\chi(x)dx^\mu,$$

где  $\Gamma_\mu(x)$  — матрица, действующая на индексы поля и зависящая от  $x$ . Данную матрицу мы будем называть матрицей коэффициентов аффинных связностей. Эта матрица и определяет параллельный перенос.

Из приведенных формул следует, что

$$\mathcal{D}\chi(x) = dx^\mu \cdot \mathcal{D}_\mu\chi(x),$$

где

$$\mathcal{D}_\mu\chi(x) = (\partial_\mu - \Gamma_\mu(x))\chi(x). \quad (7.2.18)$$

Эта величина носит название ковариантной производной. Согласно сказанному, она должна преобразовываться подобно полю  $\chi(x)$  с дополнительным ковариантным мировым индексом:

$$\delta\mathcal{D}_\mu\chi(x) = -iT(x)\mathcal{D}_\mu\chi(x) - \xi^v{}_{,\mu}\mathcal{D}_v\chi(x) - \xi^\lambda\partial_\lambda\mathcal{D}_\mu\chi(x). \quad (7.2.19)$$

Второй член в этом выражении соответствует вариации по ковариантному индексу  $\mu$  (матрица  $Q$  в операторе  $T$  действует только на мировые индексы в величине  $\chi$ ). Для выполнения этого соотношения матрица коэффициентов аффинных связностей должна преобразовываться по закону

$$\delta\Gamma_\mu(x) = i[\Gamma_\mu(x), T] - \xi^v{}_{,\mu}\Gamma_v - i\partial_\mu T - \xi^\lambda\partial_\lambda\Gamma_\mu. \quad (7.2.20)$$

Действительно, согласно (7.2.18), имеем

$$\delta\mathcal{D}_\mu\chi(x) = (\partial_\mu - \Gamma_\mu)\delta\chi - \delta\Gamma_\mu\chi,$$

откуда, используя (7.2.17), (7.2.20), мы и приходим к формуле (7.2.19).

Введем теперь коэффициенты аффинных связностей. Для этого разложим матрицу  $\Gamma_\mu$  по генераторам групп  $\varepsilon$ - и  $\xi$ -пре-

образований

$$\Gamma_\mu = \frac{i}{2} A^{ij}{}_\mu \Sigma_{ij} + i\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} Q_\lambda{}^\nu. \quad (7.2.21)$$

Поля  $A^{ij}{}_\mu$  и  $\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$  называются коэффициентами аффинных связностей. Сравнение формул (7.2.18), (7.2.21) с (7.1.27) показывает, что поля  $A^{ij}{}_\mu$ ,  $\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$  совпадают с соответствующими полями, введенными в § 7.1. Из формулы (7.2.20) для  $\delta\Gamma_\mu$  можно найти закон преобразования полей  $A^{ij}{}_\mu$ ,  $\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$ . Действительно, используя формулы (7.1.7), (7.1.26) для коммутаторов  $[\Sigma_{ij}, \Sigma_{sp}]$  и  $[Q_\lambda{}^\nu, Q_\rho{}^\sigma]$  генераторов  $\Sigma$ ,  $Q$ , легко найти, что

$$\begin{aligned} \delta A^{ij}{}_\mu &= \varepsilon^i{}_k A^{kj}{}_\mu + \varepsilon^j{}_k A^{ik}{}_\mu - \xi^v{}_{,\mu} A^{ij}{}_\nu - \varepsilon^{ij}{}_{,\mu} - \xi^\lambda\partial_\lambda A^{ij}{}_\mu, \\ \delta\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} &= -\xi^\rho{}_{,\lambda}\Gamma^\mu{}_{\rho\nu} - \xi^\rho{}_{,\nu}\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} + \xi^\mu{}_{,\rho}\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} - \xi^\mu{}_{,\lambda\nu} - \xi^\rho\partial_\rho\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}. \end{aligned}$$

Эти формулы тождественны формулам (7.1.14), (7.1.23).

Изучаемые нами поля могут быть как мировыми тензорами (в этом случае они содержат индекс  $\mu$ ), так и лоренцевскими тензорами (в этом случае они содержат индекс  $i$ ). Мы хотим, чтобы эти тензора по существу не различались. Для этого, кроме коэффициентов аффинных связностей  $A$  и  $\Gamma$ , определяющих параллельный перенос, необходимо ввести новое поле  $b_\mu^k(x)$ , имеющее чисто геометрическое происхождение. С помощью этого поля и поля  $h^k{}_\mu$ , определяемого формулой

$$h^k{}_\mu b^i{}_\mu = \delta_k^i, \quad (7.2.22)$$

мы будем лоренцевы тензорные индексы превращать в мировые тензорные индексы и обратно. Например, для векторного поля  $v_i$  имеем

$$v_\mu = b^i{}_\mu v_i, \quad v_i = h_i{}^\mu v_\mu. \quad (7.2.23)$$

Чтобы величины  $v_i$ ,  $v_\mu$  преобразовывались соответственно как лоренцевы и мировые векторы поля  $b^i{}_\mu$  и  $h_i{}^\mu$  должны преобразовываться по индексам  $i$  и  $\mu$  как лоренцевские и мировые векторы

$$\begin{aligned} \delta b^i{}_\mu &= \varepsilon^i{}_k b^k{}_\mu - \xi^v{}_{,\mu} b^i{}_\nu - \xi^\lambda\partial_\lambda b^i{}_\mu, \\ \delta h_i{}^\mu &= -\varepsilon^k{}_i h_k{}^\mu + \xi^\mu{}_{,\nu} h_i{}^\nu - \xi^\lambda\partial_\lambda h_i{}^\mu, \end{aligned} \quad (7.2.24)$$

Поэтому поля  $b^i{}_\mu$ ,  $h_i{}^\mu$  мы также можем ковариантным образом дифференцировать. Так как поля  $b$ ,  $h$  имеют чисто геометрический смысл, то соотношения типа (7.2.23) должны быть справедливы для произвольных тензоров. Отсюда следует, что

$$\mathcal{D}_\nu v_\mu = b^i{}_\mu \mathcal{D}_\nu v_i, \quad \mathcal{D}_\nu v_i = h_i{}^\mu \mathcal{D}_\nu v_\mu,$$

$$\partial_\nu b_\mu^i = 0, \quad \partial_\nu h_i^\mu = 0.$$

(7.2.25)

Эти соотношения требуют, чтобы между полями  $h, b, A, \Gamma$  существовала вполне определенная связь. Для установления этой связи напомним предварительно, как действуют матрицы  $\Sigma_{ij}, Q_\lambda^\mu$  на векторные лоренцевы и мировые индексы. Так как в случае векторных полей  $v_i, v_\mu$  эти поля преобразуются согласно формулам

$$\delta v_i = -\epsilon^k{}_i v_k - \xi^\lambda \partial_\lambda v_i, \quad \delta v_\mu = -\xi^\nu{}_{,\mu} v_\nu - \xi^\lambda \partial_\lambda v_\mu,$$

то, используя (7.2.17), имеем

$$-\frac{i}{2} (\epsilon^i{}^j \Sigma_{ij} v)_k = -\epsilon^i{}_k v_i, \quad -i (\xi^\lambda{}_{,\mu} Q_\lambda^\mu v)_\nu = -\xi^\lambda{}_{,\nu} v_\lambda.$$

Эти формулы позволяют найти явное выражение для ковариантной производной  $\mathcal{D}_\mu$  поля  $b^i{}_\rho$

$$\mathcal{D}_\mu b^i{}_\rho = \partial_\mu b^i{}_\rho - \frac{i}{2} A^{ts}{}_\mu (\Sigma_{ts} b)^i{}_\rho - i \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} (i Q_\lambda^\nu b)^i{}_\rho.$$

Действительно, используя формулы (7.2.7), имеем

$$\mathcal{D}_\mu b^i{}_\rho = \partial_\mu b^i{}_\rho - A_{k\mu}{}^i b^k{}_\rho - \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} b^i{}_\lambda.$$

Поэтому, согласно (7.2.25), (7.2.22),

$$\Gamma_{\rho\mu}^\sigma = h_i^\sigma (\partial_\mu b^i{}_\rho - A_{k\mu}{}^i b^k{}_\rho) \quad (7.2.26)$$

(сравним с формулой (7.1.22)). К этому же соотношению мы приходим и при дифференцировании поля  $h_k^\mu$ . Это соотношение и устанавливает связь между геометрическими полями  $h, b, \Gamma, A$ .

Таким образом, вводя понятие параллельного переноса, мы приходим к геометрической интерпретации ковариантного дифференцирования, а вводя поля  $b^i{}_\mu$ , получаем возможность связывать поля, содержащие лоренцевские векторные индексы, с полями, содержащими мировые индексы.

В заключение этого раздела заметим, что из формул (7.1.7), (7.1.26) для коммутаторов генераторов рассматриваемых групп следует соотношение

$$\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu - [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] = -\frac{i}{2} R^{ij}{}_{\mu\nu} \Sigma_{ij} - i R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} Q_\lambda^\sigma, \quad (7.2.27)$$

где тензоры кривизны  $R^{ij}{}_{\mu\nu}, R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}$  определяются формулами (7.1.35), (7.1.36).

**7.2.3. Пространственно-временные измерения при наличии гравитационного поля.** С 4-мерным римановым пространством связано реальное пространство — время, в котором протекают физические процессы. Поэтому тензор  $g_{\mu\nu}$  является метри-

ческим тензором реального пространства — времени. Возможность разделения 4-мерного риманова пространства на реальное 3-мерное пространство и время предполагает, что сигнатура метрики  $g_{\mu\nu}$  имеет вид (1, -1, -1, -1), т. е. с каждой точкой риманова пространства может быть связана локальная лоренцева система координат.

Величины  $x^\mu$ , определяющие положение точки в римановом пространстве, определяют одновременно событие в реальном физическом мире. Величины  $x^1, x^2, x^3$  определяют пространственные координаты события, а величина  $x^0$  — временную координату события. Так как мы говорим о координатах событий, то величины  $x^\mu$  относятся к определенной системе отсчета: тремя пространственными координатами могут являться любые величины, определяющие положение произвольно движущихся тел (или пробных частиц) в пространстве, а временная координата  $x^0$  определяется произвольно идущими часами, расположенными на этих телах. Такое введение систем отсчета аналогично описанию движущейся жидкости в лагранжевых координатах.

Покажем теперь, как с помощью тензора  $g_{\mu\nu}$  определяются пространственные и временные промежутки между двумя бесконечно близкими событиями. Заметим с этой целью, что, согласно (7.2.6), поля  $b^i{}_\mu(x)$  представляют собой скалярные произведения в касательном евклидовом пространстве ортонормированных ортов  $\underline{e}^i(x)$  и аффинных ортов  $\underline{e}_\mu(x)$ :

$$b^i{}_\mu(x) = (e^i(x), e_\mu(x)). \quad (7.2.28)$$

Так как

$$d\underline{x} = e_i dx^i = e_\mu dx^\mu, \quad (7.2.29)$$

то согласно последней формуле

$$dx^i = b^i{}_\mu(x) dx^\mu. \quad (7.2.30)$$

Будем считать, что лоренцев орт  $e^i(x)$  при  $i = 0$  параллелен аффинному орту  $\underline{e}_\mu(x)$  при  $\mu = 0$ . Тогда, согласно (7.2.28),

$$b^i{}_0(x) = \delta_0^i b^0{}_0(x). \quad (7.2.31)$$

В локальной лоренцевой системе координат расстояние между двумя бесконечно близкими одновременными событиями ( $dx^i = 0$  при  $i = 0$ ) определяется формулой

$$dl^2 = -dx^i dx_i, \quad (7.2.32)$$

где  $\underline{i} = 1, 2, 3$  (по индексу  $\underline{i}$  производится суммирование). Поэтому, согласно (7.2.30),

$$dl^2 = -b^i{}_\mu(x) b_{i\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

или, учитывая что  $dx^0 = 0$ ,

$$dl^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (7.2.33)$$

где

$$\gamma_{\mu\nu} = -b_{\mu}^i(x) b_{i\nu}(x)$$

( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ). Напомним теперь, что  $g_{\mu\nu} = b_{\mu}^i b_{i\nu}$  (см. (7.2.1)). Поэтому, согласно (7.2.31),

$$g_{00} = (b_0^0)^2, \quad g_{\mu 0} = b_{\mu}^0 b_0^0,$$

откуда

$$b_0^0 = \sqrt{g_{00}}, \quad b_{\mu}^0 = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}}$$

или

$$b_{\mu}^0 = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (7.2.34)$$

Замечая далее, что  $\gamma_{\mu\nu} = -b_{\mu}^i b_{i\nu} + b_{\mu}^0 b_{0\nu}$ , имеем окончательно

$$\gamma_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu 0} g_{\nu 0}}{g_{00}}. \quad (7.2.35)$$

Формулы (7.2.33), (7.2.35) и определяют пространственный интервал между двумя бесконечно близкими одновременными событиями. Подчеркнем, что определение одновременности двух бесконечно близких событий мы давали в локальной лоренцевой системе координат, в которой временная ось была параллельна временной оси аффинной системы координат (тело, покоящееся в лоренцевой системе, в точке  $x$  покоится и в аффинной системе координат). В этом случае одновременность означала, что  $dx^i = 0$  при  $i = 0$ . Учитывая это, формулы (7.2.30) можно переписать в виде

$$dx^i = b_{\mu}^i(x) dx^\mu, \quad dx^i|_{i=0} \equiv d\tau = b_{\mu}^0(x) dx^\mu. \quad (7.2.36)$$

Поэтому условие одновременности ( $d\tau = 0$ ) можно представить в терминах аффинных компонент вектора  $dx$  в виде

$$b_0^0 dx^0 + b_{\mu}^0 dx^\mu = 0$$

или, учитывая (7.2.34),

$$dx^0 = -\frac{g_{0\mu}}{g_{00}} dx^\mu. \quad (7.2.37)$$

На рис. 49 показана эта формула, где лоренцевой системе соответствуют прямоугольные координаты, а аффинной си-

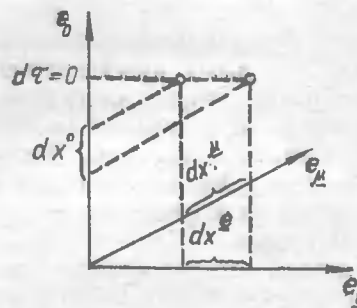


Рис. 49.

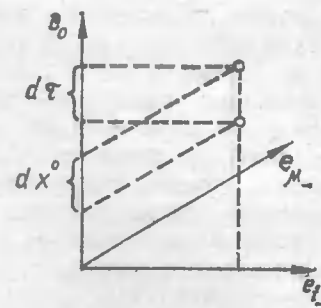


Рис. 50.

стеме — косоугольные координаты; временная ось для этих систем направлена вдоль оси ординат.

Если события происходят в одном и том же месте в выбранной нами локальной лоренцевой системе координат ( $dx^i = 0$ ), то, согласно (7.2.36), они будут происходить в одном и том же месте аффинной системы координат ( $dx^\mu = 0$ ). Временной интервал между этими событиями определим как временной интервал  $d\tau = dx^i|_{i=0}$  между этими событиями в выбранной нами локальной лоренцевой системе. Согласно (7.2.36), (рис. 50),

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dx^0. \quad (7.2.38)$$

Полученные результаты можно разъяснить также, если представить интервал между двумя произвольными бесконечно близкими событиями в виде

$$ds^2 = \left( \sqrt{g_{00}} dx^0 + \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}} dx^\mu \right)^2 - \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (7.2.39)$$

(эта формула непосредственно следует из определения (7.2.35) величин  $\gamma_{\mu\nu}$ ). Если события одновременны (см. (7.2.37)), то  $ds^2 = -dl^2$ . Если события происходят в одной и той же точке пространства ( $dx^\mu = 0$ ), то  $ds^2 = d\tau^2 = g_{00} dx^0{}^2$ .

Таким образом, мы рассматриваем пространственно-временные измерения в бесконечно малой окрестности точки  $x$  как измерения в касательном евклидовом пространстве, т. е. в локальной лоренцевской системе координат, связанной с этим пространством. В результате таких измерений мы можем, согласно формулам (7.2.37), (7.2.38), найти метрический тензор  $g_{\mu\nu}(x)$ . Ясно, что в общем случае этот тензор, являющийся функцией точки  $x$ , не будет совпадать с метрическим тензором  $\eta_{kl}$  плоского пространства, так как наличие 16 произвольных функций  $b_{\mu}^i(x)$  приводит к тому, что 10 функций  $g_{\mu\nu}(x)$  также будут произвольными (шесть функций определяют

локальные лоренцевские повороты, от которых не зависит метрический тензор  $g_{\mu\nu}(x)$ . Таким образом, пространство — время, определяемое с помощью локальных пространственно-временных измерений специальной теории относительности (т. е. измерений в локальной лоренцевской системе координат), не является эвклидовым, т. е. плоским. Иными словами, плоское пространство — время Минковского, фигурировавшее в исходной формулировке калибровочной теории, по существу не является наблюдаемым.

Описанная в начале этого раздела система отсчета представляет собой общую систему отсчета в теории гравитации. В частности, в качестве такой системы может быть выбрана система отсчета, связанная со свободно падающими в гравитационном поле пробными телами. Пробные тела, по определению, не создают своего гравитационного поля, так что речь идет о гравитационном поле  $g_{\mu\nu}(x)$  и о движении пробных тел в этом гравитационном поле, которое создается внешними массивными телами. Такая система отсчета называется сопутствующей системе свободно падающих пробных тел. Покажем, что такой выбор системы отсчета эквивалентен следующим ограничениям, накладываемым на тензор  $g_{\mu\nu}(x)$ :

$$g_{00} = 1, \quad g_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (7.2.40)$$

Действительно, пробные частицы в гравитационном поле движутся по геодезическим линиям риманова пространства [4], т. е.

$$\frac{du^\mu}{ds} = -\Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho, \quad (7.2.41)$$

где  $u^\mu = dx^\mu/ds$  — 4-скорость пробных частиц;  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  — символы Кристоффеля (см. (7.2.11)). Для свободно падающих частиц, покоящихся относительно сопутствующей системы отсчета,  $u_k = 0$ ,  $u_0 = 1$ .

Чтобы такие функции удовлетворяли уравнению (7.2.41), необходимо условие, при котором  $\Gamma_{00}^\mu = 0$ . Это условие выполняется, если  $g_{00} = 1$ ,  $g_{0k} = 0$  (мы предполагаем, что кручение  $C_{\nu\rho}^k = 0$ ).

При выполнении условий (7.2.40), согласно формуле (7.2.38), часы могут быть синхронизованы во всем пространстве, т. е. одновременным событиям соответствует условие  $x^0 = \text{const}$  для всего 3-мерного пространства. Поэтому система отсчета, сопутствующая свободно падающим пробным частицам, называется также синхронной.

Заметим, что синхронная система отсчета имеет важное значение при исследовании явления гравитационного коллапса.

## § 7.3. Уравнения гравитационного поля и поля материи

**7.3.1. Лагранжиан полей.** Теперь задача заключается в установлении лагранжиана введенных нами калибровочных полей, а также лагранжиана взаимодействия этих полей с исходным материальным полем  $\chi(x)$ . В пункте 7.1.1, исходя из лагранжиана  $L$  исходных полей  $\chi$ , мы построили «лагранжиан» этих полей с учетом их взаимодействия с калибровочными полями. Эта величина получалась из лагранжиана  $L(\chi, \partial_k \chi)$  полей  $\chi$  путем замены производных  $\partial_k \chi$  на ковариантные производные  $D_k \chi$ :

$$L(\chi, \partial_k \chi) \rightarrow L(\chi, D_k \chi), \quad (7.3.1)$$

$$D_k \chi = h_k^\mu \left( \partial_\mu \chi - \frac{i}{2} A^{ij} \Sigma_{ij} \right) \chi.$$

Выражение  $L(\chi, D_k \chi)$  представляет собой инвариант относительно  $\varepsilon$ - и  $\xi$ -преобразований (7.1.2'), (7.1.9), (7.1.13)

$$\delta L(\chi, D_k \chi) = -\xi^\lambda \partial_\lambda L(\chi, D_k \chi). \quad (7.3.1')$$

Между тем, исходный лагранжиан  $\mathcal{L}$  должен быть не инвариантом, а плотностью инварианта (по этой причине инвариант  $L(\chi, D_k \chi)$  мы назвали «лагранжианом»). Инвариантом должно быть действие. Это связано с тем, что для получения уравнений поля, инвариантных относительно  $\varepsilon$ - и  $\xi$ -преобразований, необходимо исходить из требования инвариантности действия

$$W(\psi; \sigma_1, \sigma_2) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4 x \mathcal{L}(x), \quad \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\psi(x), \partial_k \psi(x)), \quad (7.3.2)$$

где  $\psi$  — совокупность полей  $\chi$ ,  $h$ ,  $A$ . Требование инвариантности действия означает, что

$$W(\psi'; \sigma'_1, \sigma'_2) = W(\psi; \sigma_1, \sigma_2),$$

где

$$W(\psi'; \sigma'_1, \sigma'_2) = \int_{\sigma'_1}^{\sigma'_2} d^4 x \mathcal{L}(\psi'(x), \partial_k \psi'(x))$$

и  $\psi'(x) = S(a)\psi(a^{-1}x)$  (см. (1.1.12);  $\sigma'_1, \sigma'_2$  — гиперповерхности, полученные из гиперповерхностей  $\sigma_1, \sigma_2$  в результате  $\xi$ -преобразования). Переходя от переменных интегрирования  $x$  к переменным интегрирования  $x' = f(x)$ , получаем

$$W(\psi'; \sigma'_1, \sigma'_2) = \int_{\sigma'_1}^{\sigma'_2} d^4 x' \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \mathcal{L}(\psi'(x'), \partial'_k \psi'(x')).$$



Поэтому условие инвариантности действия может быть сформулировано в виде требования, накладываемого на лагранжиан

$$\mathcal{L}(\psi, (x), \partial_k \psi(x)) = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \mathcal{L}(\psi'(x'), \partial_k \psi'(x')) \quad (7.3.3)$$

(эта формула и показывает, что  $\mathcal{L}$  является не инвариантом, а плотностью инварианта). В случае бесконечно малых преобразований  $x' = x + \xi(x)$ ,

$$\mathcal{L}(\psi'(x'), \partial_k \psi'(x')) - \mathcal{L}(\psi(x), \partial_k \psi(x)) = \delta \mathcal{L} + \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$$

(см. определение (7.1.2) вариации  $\delta$ ). Поэтому

$$\delta \mathcal{L} + \partial_\mu (\xi^\mu \mathcal{L}) = 0. \quad (7.3.4)$$

Лагранжиан  $\mathcal{L}$  можно связать с «лагранжианом»  $L = L(\chi, D_k \chi)$  формулой

$$\mathcal{L} = \mathfrak{A} \cdot L, \quad (7.3.5)$$

где величина  $\mathfrak{A}$  представляет собой плотность инварианта относительно  $\varepsilon$ - и  $\xi$ -преобразований, которая строится только из калибровочных полей (в отсутствие калибровочных полей величина  $\mathfrak{A}$  должна переходить в единицу). Из формул (7.3.1'), (7.3.4) следует, что величина  $\mathfrak{A}$  при  $\varepsilon$ -,  $\xi$ -преобразованиях должна преобразовываться согласно формуле

$$\delta \mathfrak{A} = -\mathfrak{A} \partial_\mu \xi^\mu - \xi^\mu \partial_\mu \mathfrak{A} \quad (7.3.6)$$

(это и есть закон преобразования плотности инварианта). Из калибровочных полей  $h, A$  можно построить только одну величину такого типа:

$$\mathfrak{A} = (\det h_k^\mu)^{-1}. \quad (7.3.7)$$

Действительно, согласно закону преобразования (7.1.13) полей  $h_k^\mu$ , имеем

$$\begin{aligned} \delta \det h &= \delta h_k^\mu \frac{\partial \det h}{\partial h_k^\mu} = \xi^\mu h_k^\nu \frac{\partial \det h}{\partial h_k^\mu} - \\ &- \varepsilon^i_k h_i^\mu \frac{\partial \det h}{\partial h_k^\mu} - \xi^\lambda \partial_\lambda h_k^\mu \frac{\partial \det h}{\partial h_k^\mu}. \end{aligned}$$

Так как  $\frac{\partial \det h}{\partial h_k^\mu}$  представляет собой минор детерминанта  $h$ , соответствующий элементу  $h_k^\mu$ , то

$$h_k^\nu \frac{\partial \det h}{\partial h_k^\mu} = \delta_\mu^\nu \det h$$

и, следовательно,

$$\delta \det h = \xi^\mu_{,\mu} \det h - \xi^\lambda \partial_\lambda \det h$$

(мы учли, что  $\varepsilon^i_i = 0$ ). Из этой формулы, формулы (7.3.7) и следует закон преобразования (7.3.6) величины  $\mathfrak{A}$ . Таким образом, лагранжиан полей  $\chi$  с учетом взаимодействия полей  $\chi$  с калибровочными полями  $h, A$  имеет вид

$$\mathcal{L}(\chi, \partial_k \chi, h, A) = \mathfrak{A}(h) L(\chi, D_k \chi). \quad (7.3.5')$$

Покажем, что величина  $\mathfrak{A}$  может быть выражена через метрический тензор  $g_{\mu\nu}$

$$\mathfrak{A} = \sqrt{-g}, \quad (7.3.8)$$

где  $g = \det g_{\mu\nu}$ . Действительно, замечая, что

$$g_{\mu\nu} = b^k_\mu b_{k\nu}, \quad h_k^\mu b^k_\nu = \delta^\mu_\nu,$$

мы и приходим к формуле (7.3.8).

Установим теперь вид лагранжиана калибровочных полей  $h, A$ . В случае обычных калибровочных полей величина  $F^a_{\mu\nu}$  представляла собой  $SU(n)$ -вектор по индексу  $a$  (в отличие от потенциалов  $A^a_\mu$ , которые не представляли собой  $SU(n)$ -вектора) и лоренцевский тензор по индексам  $\mu\nu$ . Простейшим лоренцевским и  $SU(n)$  инвариантом, который может быть построен из полей  $F^a_{\mu\nu}$ , является величина  $F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$ , которая и принималась в § 4.1 за лагранжиан калибровочного поля. В случае калибровочных полей, связанных с группой Пуанкаре величиной, аналогичной  $F^a_{\mu\nu}$ , является тензор  $R^{ki}_{\mu\nu}$  ( $a = k, l$ ). Так как природа индексов  $k, l$  и  $\mu, \nu$  одна и та же (а в величине  $R^{\lambda\sigma}_{\mu\nu} = h^\lambda_k h^\sigma_l R^{ki}_{\mu\nu}$  все индексы являются мировыми), то мы можем построить инвариант не второго, а первого порядка относительно  $R^{\lambda\sigma}_{\mu\nu}$ , а именно  $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  (см. (7.2.14)).

Учитывая, что лагранжиан должен быть плотностью инварианта, мы можем взять в качестве лагранжиана калибровочных полей величину, пропорциональную  $\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ :

$$\mathcal{L}(h, A) = \frac{1}{16\pi k} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (7.3.9)$$

где  $k$  — некоторый размерный множитель, приводящий к правильной размерности действия (эта величина совпадает с гравитационной постоянной). Заметим, что к лагранжиану  $\mathcal{L}$ , в принципе, могла быть добавлена величина  $\lambda \sqrt{-g}$  ( $\lambda$  — так называемая космологическая постоянная), являющаяся также плотностью инварианта. Мы, однако, не будем выписывать этот член.

Входящая в формулу (7.3.9) величина  $R_{\mu\nu}$  (тензор Риччи), определяется формулой

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\mu\nu}. \quad (7.3.10)$$

Производя в интеграле действия интегрирование по частям, мы видим, что в качестве лагранжиана калибровочных полей может быть взята величина

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi k} \{ \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) - \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \partial_\nu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda). \quad (7.3.11)$$

Таким образом, полный лагранжиан исходного материального поля  $\lambda$  и калибровочных полей  $h$ ,  $A$  имеет вид

$$\mathcal{L}(\lambda, h, A) = \sqrt{-g} L(\lambda, D_h \lambda) + \mathcal{L}(h, A), \quad (7.3.12)$$

где  $L(h, A)$  определяется формулой (7.3.11). С помощью этого лагранжиана можно получить уравнения движения для полей  $\lambda, h, A$ .

**7.3.2. Уравнения Эйнштейна свободного гравитационного поля.** Получим сначала уравнения движения для калибровочных полей в отсутствие материальных полей. Будем считать в качестве независимых переменных в лагранжиане (7.3.12) не величины  $h, A$ , а величины  $g_{\mu\nu}, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  (величины  $g_{\mu\nu}$  и  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  выражаются через  $h, A$  формулами (7.1.22), (7.2.1)). Варьируя лагранжиан (7.3.11) по  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  при фиксированных  $g_{\mu\nu}$ , получаем

$$16\pi k \delta \Gamma \mathcal{L} = \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \{ \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda}) - \delta_\rho^\lambda \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\nu}^\lambda + \sqrt{-g} g^{\nu\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \Gamma_{\rho\nu}^\nu - \sqrt{-g} g^{\kappa\nu} \Gamma_{\kappa\nu}^\mu \delta_\rho^\lambda \},$$

откуда следуют линейные неоднородные уравнения для определения коэффициентов аффинной связности (символов Кристоффеля)

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\nu}^\lambda + \sqrt{-g} g^{\nu\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \Gamma_{\rho\nu}^\nu - \sqrt{-g} g^{\kappa\nu} \Gamma_{\kappa\nu}^\mu \delta_\rho^\lambda = \delta_\rho^\lambda \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) - \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda}).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Gamma_{\rho\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\sigma g_{\rho\nu}) \quad (7.3.13)$$

(сравним с формулой (7.3.10)). В этом легко убедиться, если заметить, что из (7.2.13) вытекают соотношения

$$g^{\kappa\nu} \Gamma_{\kappa\nu}^\mu = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}), \quad \Gamma_{\rho\nu}^\nu = \partial_\rho \ln \sqrt{-g}. \quad (7.3.14)$$

Проварьируем теперь лагранжиан по  $g_{\mu\nu}$  при фиксированном  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . Используя в качестве лагранжиана выражение (7.3.9),

имеем

$$\delta_g \mathcal{L} = \frac{1}{16\pi k} R_{\nu\lambda} \delta (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}).$$

Замечая, что  $\delta g = \delta g_{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}$  и что минор детерминанта  $\partial g / \partial g_{\mu\nu}$  совпадает с  $g g^{\mu\nu}$ , имеем  $\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ . Поэтому

$$\delta \sqrt{-g} = - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

и, следовательно,

$$\delta_g \mathcal{L} = \frac{1}{16\pi k} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right\}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Уравнения для калибровочных полей в отсутствие материальных полей имеют вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (7.3.15)$$

или

$$R_{\mu\nu} = 0,$$

где величина  $R_{\mu\nu}$  и входящие в  $R_{\mu\nu}$  символы Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  определяются формулами (7.3.10), (7.3.13).

**7.3.3. Теория Вейля.** Установим теперь уравнения для материальных полей и выясним влияние этих полей на калибровочные поля  $h, A$ . С этой целью необходимо варьировать полное действие по материальному полю  $\lambda$  и калибровочным полям  $h, A$  (или  $h, \Gamma$ ;  $\Gamma$  связано с  $A$  формулой (7.1.22)).

Замечая, что варьирование действия по  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  при фиксированном  $h_i^\rho$  в силу формулы (7.1.22) эквивалентно варьированию по  $A_{\mu\nu}^\lambda, \delta A_{\mu\nu}^\lambda = \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , и учитывая результат варьирования величины  $\mathcal{L}(h, A)$  в случае свободного калибровочного поля, имеем

$$\delta A_{\mu\lambda}^\rho \left\{ \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \Gamma_{\rho\nu}^\lambda + \sqrt{-g} g^{\nu\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} \Gamma_{\rho\nu}^\nu - \sqrt{-g} g^{\kappa\nu} \Gamma_{\kappa\nu}^\mu \delta_\rho^\lambda + \delta_\rho^\lambda \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) - \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\mu\lambda}) \right\} + 16\pi k \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial A_{\mu\lambda}^\rho} = 0, \quad \mathcal{L}_m \equiv \sqrt{-g} L(\lambda, D_h \lambda).$$

Вводя вместо величин  $\Gamma_{\rho\nu}^\lambda$  величины  $\bar{\Gamma}_{\rho\nu}^\lambda$ ,

$$\Gamma_{\rho\nu}^\lambda = \Gamma_0^\lambda{}_{\rho\nu} + \bar{\Gamma}_{\rho\nu}^\lambda, \quad \Gamma_0^\lambda{}_{\rho\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\sigma g_{\rho\nu}), \quad (7.3.16)$$

и вспоминая, что

$$A_{\mu\nu}^\rho = h_i^\rho b_{k\mu} A^{ik}{}_\lambda,$$

имеем

$$\delta A^{ik}_\lambda \left\{ 16\pi k \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial A^{ik}_\lambda} + h_i^\rho h_k^\nu g^{\lambda\sigma} \bar{\Gamma}_{\sigma\rho\nu} + h_i^\rho h_k^\sigma g^{\nu\lambda} \bar{\Gamma}_{\sigma\rho\nu} - \right. \\ \left. - h_i^\rho h_k^\lambda g^{\nu\kappa} \bar{\Gamma}_{\kappa\rho\nu} - h_i^\lambda h_k^\sigma g^{\kappa\nu} \bar{\Gamma}_{\sigma\kappa\nu} \right\} = 0.$$

Вводя далее вместо  $\bar{\Gamma}_{\nu\lambda\rho}$  величины  $C_{\nu\lambda\rho}$ ,

$$\bar{\Gamma}_{\nu\lambda\rho} = \frac{1}{2} (C_{\rho\lambda\nu} + C_{\lambda\rho\nu} + C_{\nu\lambda\rho}),$$

(эти величины, согласно (7.3.16), совпадают с тензором кручения  $\Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} = C^\mu_{\lambda\nu}$ ), получаем

$$h_i^\lambda C_{ki}^l - h_k^\lambda C_{il}^l + h_i^\lambda C_{ik}^l = -8\pi k Q^{\lambda ik}, \quad (7.3.17) \\ Q^{\lambda ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial A^{ik}_\lambda} = -ih_s^\lambda \frac{\partial L}{\partial D_s \chi} \sum_{ik} \chi$$

(мы учли при этом антисимметрию вариации  $\delta A^{ik}_\lambda$  по индексам  $i, k$  и формулу (7.3.5'), определяющую лагранжиан материального поля с учетом его взаимодействия с калибровочными полями).

Величина  $Q^{\lambda ik}$  в отсутствие калибровочных полей совпадает с последним слагаемым в выражении (1.1.39) для канонического тензора момента количества движения; эта величина условно может быть названа плотностью спинового момента поля  $\chi(x)$ .

Найдем теперь вариацию действия по  $h_k^\mu$  при фиксированных полях  $A^{ik}_\mu$ . Замечая, что

$$R = h_i^\lambda h_j^\nu R^{ij}_{\lambda\nu}$$

и учитывая, что  $R^{ij}_{\lambda\nu}$  зависит только от  $A^{ik}_\lambda$ , имеем

$$\delta_h \sqrt{-g} R = 2\sqrt{-g} \delta h_i^\lambda b^s_\lambda \left\{ R^{ij}_{sj} - \frac{1}{2} \delta^i_s R \right\}$$

(мы учли, что  $\delta_h \sqrt{-g} = -\sqrt{-g} b^k_\nu \delta h_k^\nu$ ). Поэтому уравнение движения для поля  $h_k^\nu$  с учетом его взаимодействия с материальным полем имеет вид

$$\sqrt{-g} \left\{ R^{ij}_{sj} - \frac{1}{2} \delta^i_s R \right\} = -8\pi k T^i_s, \quad (7.3.18)$$

где

$$T^i_s = h_s^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial h_i^\lambda}. \quad (7.3.19)$$

Величину  $T^i_s$  в отсутствие калибровочных полей ( $A^{ik}_\lambda = 0, h_i^\nu = \delta_i^\nu$ ), согласно (7.3.19), можно представить в виде

$$(T^i_s)_0 = -L \delta^i_s + \partial_s \chi \frac{\partial L}{\partial \partial_i \chi}. \quad (7.3.19')$$

Эта величина совпадает с каноническим тензором энергии-импульса (см. (1.1.39)). Поэтому величину  $T^i_s$  мы можем интерпретировать как канонический тензор энергии импульса материальных полей с учетом их взаимодействия с калибровочными полями.

Уравнения (7.3.17), (7.3.18) могут быть переписаны в форме, содержащей мировые индексы

$$R_{\mu\nu} = -8\pi k \left( \tau_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tau^\lambda_\lambda \right), \quad (7.3.20)$$

$$C^\lambda_{\rho\sigma} = -8\pi k \left( Q^\lambda_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \delta^\lambda_\rho Q^\mu_{\sigma\mu} - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\sigma Q^\mu_{\rho\mu} \right),$$

где

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} b_{i\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial h_i^\nu}, \quad Q^\lambda_{\rho\mu} = b^i_\rho b^j_\mu \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial A^{ij}_\lambda} = -Q^\lambda_{\mu\rho}. \quad (7.3.21)$$

Так как величина  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  не симметрична по индексам  $\mu, \nu$ , то и тензор Риччи  $R_{\mu\nu}$  также не симметричен по индексам  $\mu, \nu$ .

Варьирование действия  $\mathcal{W}$  по  $\chi$  приводит к уравнениям для поля материи

$$\frac{\delta \mathcal{W}}{\delta \chi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k \chi} = 0, \quad (7.3.22)$$

в которые входят калибровочные поля  $A^{ik}_\lambda, h_i^\nu$ .

**7.3.4. Теория гравитации Эйнштейна.** При выводе уравнений (7.3.20), (7.3.21) в качестве независимых переменных при варьировании действия выбирались величины  $A^{ik}_\lambda, h_i^\nu, \chi$ . Имеется, однако, другая возможность получения уравнений полей, в которой в качестве независимых переменных при варьировании действия берутся не три поля  $A, h, \chi$ , а два —  $h, \chi$ , причем в качестве коэффициентов аффинной связности используются обычные символы Кристоффеля (7.2.11)

$$\Gamma^\lambda_{\rho\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\sigma g_{\rho\nu})$$

(напомним, что  $g_{\mu\nu} = b^i_\mu b_{i\nu}$ ). Таким образом, в этом случае мы исходим из лагранжиана

$$\mathcal{L}(\chi, h) = \sqrt{-g(h)} L(\chi, h, \Gamma(h)) + \mathcal{L}(g(h), \Gamma(h))$$

и соответствующего этому лагранжиану действия

$$W = W_m + W_g, \quad (7.3.23)$$

$$W_m = \int d^4x \sqrt{-g} L(\chi, h, \Gamma(h)), \quad W_g = \int d^4x \mathcal{L}(d(h), \Gamma(h)).$$

Поэтому уравнения поля для материи по-прежнему будут иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta \chi} = \frac{\partial L}{\partial \chi} - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_k \sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial \partial_k \chi} = 0. \quad (7.3.22')$$

При установлении уравнений для калибровочного поля  $h_k^\mu$  заметим, что

$$\delta_\Gamma \int d^4x \mathcal{L}(g, \Gamma)|_{\Gamma=\Gamma(h)} = 0$$

(см. вывод уравнений для свободного калибровочного поля). Поэтому, согласно (7.3.23),

$$\begin{aligned} \delta_h W_g &= \frac{1}{16\pi k} \int d^4x R_{\mu\nu} \delta_h (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{16\pi k} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right\} \delta_h g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \delta_h W_m &= \int d^4x \delta h_k^\mu \frac{\delta W_m}{\delta h_k^\mu}, \\ \frac{\delta W_m}{\delta h_k^\mu} &\equiv \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial h_k^\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial \partial_\nu h_k^\mu} \end{aligned}$$

и учитывая, что  $\delta_h g^{\mu\nu} = h_\lambda^\nu \delta h_k^\mu + h^{k\mu} \delta h_\lambda^\nu$ , мы приходим к следующим уравнениям поля:

$$\frac{1}{16\pi k} 2 \sqrt{-g} h^{k\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{\delta W_m}{\delta h_k^\mu} = 0.$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= -8\pi k T_{\mu\nu}, \\ T_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} b_{k\nu} \frac{\delta W_m}{\delta h_k^\mu}. \end{aligned} \quad (7.3.24)$$

Тензор  $T_{\mu\nu}$  является симметричным. Действительно, так как лагранжиан материи  $\sqrt{-g}L$  инвариантен относительно  $\varepsilon$ -преобразования, то

$$\int d^4x \frac{\delta W_m}{\delta \chi} \delta_\varepsilon \chi + \int d^4x \frac{\delta W_m}{\delta h_k^\mu} \delta_\varepsilon h_k^\mu = 0, \quad (7.3.25)$$

где  $\delta_\varepsilon \chi = -\frac{i}{2} \varepsilon^{ik} \sum_{i,k} \chi$ ,  $\delta_\varepsilon h_k^\mu = -\varepsilon^i{}^\mu h_i^k$  — вариации полей  $\chi$

и  $h$ , связанные с  $\varepsilon$ -преобразованием. В силу уравнений для поля  $\chi$  величина  $\delta W_m / \delta \chi$  обращается в нуль. Величина  $\varepsilon^{ik}(\chi)$  антисимметрична по индексам  $i, k$  и определяется шестью произвольными функциями  $x$ . Поэтому из (7.3.25) следует, что комбинация  $\frac{1}{\sqrt{-g}} h_i^\mu \delta W_m / \delta h^{k\mu}$  является симметричной

по индексам  $i, k$ ,  $T_{ki} = T_{ik}$ . Замечая, что  $T_{\nu\mu} = b_\mu^k b_\nu^l T_{ik}$ , мы и приходим к заключению о симметрии  $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ .

Найдем тензор  $T_{\mu\nu}$  в отсутствие калибровочных полей ( $h_i^\nu = \delta_i^\nu$ ,  $A^{ik}_\lambda = 0$ ). Лагранжиан материи и ее взаимодействия с калибровочными полями определяется формулой  $\sqrt{-g}L(\chi, D_k \chi)$ . Величина  $L$  через посредство  $D_k \chi$  (см. (7.3.1)) зависит от  $h_i^\nu$ ,  $A^{ik}_\lambda$ . Так как в рассматриваемом случае когда коэффициенты аффинной связности определяются формулами (7.2.11) кручение отсутствует, то поля  $A^{ik}_\mu$ , согласно (7.2.9), определяются коэффициентами кручения Риччи  $\omega^{ik}_j$ :

$$\begin{aligned} A^{ik}_\mu &\equiv b^j_\mu \omega^{ik}_j = \frac{1}{2} \{ (h^{k\lambda} h^{i\nu} - h^{k\nu} h^{i\lambda}) b^j_\mu \partial_\lambda b_{j\nu} + \\ &+ (\delta_\mu^\nu h^{k\lambda} - \delta_\mu^\lambda h^{k\nu}) \partial_\lambda b^i_\nu + (\delta_\mu^\lambda h^{i\nu} - \delta_\mu^\nu h^{i\lambda}) \partial_\lambda b^k_\nu \}. \end{aligned} \quad (7.3.26)$$

Отсюда следует, что поле  $A^{ik}_\mu$  линейно зависит от производных поля  $h_k^\mu$ . Поэтому тензор  $T_{\mu\nu}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= T'_{\mu\nu} + T''_{\mu\nu}, \quad (7.3.27) \\ T'_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} b_{k\nu} \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial h_k^\mu}, \quad T''_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \times \\ &\times b_{k\nu} \partial_l \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial \partial_l h_k^\mu}. \end{aligned}$$

Найдем сначала величину  $T'_{\mu\nu}$ . Замечая, что

$$\left( \frac{\partial L}{\partial h_k^\mu} \right)_0 = \frac{\partial L(\chi, \partial_k \chi)}{\partial \partial_k \chi} \partial_\mu \chi, \quad \left( \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial h_k^\mu} \right)_0 = -\delta_\mu^k$$

(индекс 0 служит для обозначения величин в отсутствие калибровочного поля), имеем

$$(T'_{\mu\nu})_0 = -\eta_{\mu\nu} L + \partial_\mu \chi \frac{\partial L}{\partial \partial^\nu \chi}. \quad (7.3.28)$$

Таким образом (см. (1.1.39)), величина  $T'_{\mu\nu}$  в отсутствие калибровочных полей совпадает с каноническим тензором энергии-импульса. Величину  $T'_{\mu\nu}$  в отсутствие калибровочных

полей можно, согласно (7.3.27), представить в виде

$$(T_{\mu\nu})_0 = \partial_l \chi_{\mu\nu}^l, \quad \chi_{\mu\nu}^l = -\eta_{k\nu} \frac{\partial L}{\partial \partial_l \chi} \frac{\partial D_s \chi}{\partial \partial_l h_k^\mu}.$$

Замечая, что

$$\left( \frac{\partial A^{lk}}{\partial \partial_{\lambda'} h_{k'}^{\nu'}} \right)_0 = \frac{1}{2} \{ \eta^{kk'} \eta^{ll'} \eta_{\mu\nu} + \eta^{kk'} \delta_{\nu'}^l \delta_{\mu}^{k'} + \eta^{ll'} \delta_{\nu'}^k \delta_{\mu}^{l'} - (k \rightleftharpoons l) \}$$

(см. (7.3.26); мы учли, что  $(\partial \partial_{\lambda'} b_{\rho}^i / \partial \partial_{\lambda'} h_{k'}^{\nu'})_0 = -\delta_{\rho}^{k'} \delta_{\lambda'}^i \delta_{\nu'}^{\rho}$ ) и, учитывая определение ковариантной производной

$$D_s \chi = h_s^\mu \left( \partial_\mu \chi - \frac{i}{2} A^{ij}{}_{\mu} \Sigma_{ij} \chi \right),$$

имеем

$$\left( \frac{\partial D_s \chi}{\partial \partial_{\lambda'} h_{k'}^{\nu'}} \right)_0 = -\frac{i}{2} \{ \eta_{s\nu'} \Sigma^{kk'} + \delta_s^{k'} \Sigma_{\nu'}^{k'} + \delta_s^{\nu'} \Sigma_{\nu'}^{k'} \} \chi,$$

поэтому

$$(T_{\mu\nu})_0 = \partial^\rho \chi_{\mu\nu\rho}, \quad (7.3.29)$$

$$\chi_{\mu\nu\rho} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \partial^\mu \chi} \Sigma_{\rho\nu} \chi + \frac{\partial L}{\partial \partial^\nu \chi} \Sigma_{\mu\rho} \chi + \frac{\partial L}{\partial \partial^\rho \chi} \Sigma_{\mu\nu} \chi \right\}.$$

Таким образом (см. (1.1.45)), величина  $(T_{\mu\nu})_0$  совпадает с симметричным тензором энергии импульса поля материи. По этой причине величину  $T_{\mu\nu}$  в уравнениях (7.3.24) можно назвать симметричным тензором энергии импульса материи при наличии взаимодействия с калибровочными полями.

Уравнения (7.3.24) совпадают с известными уравнениями Эйнштейна для гравитационного поля в общей теории относительности\*. Именно поэтому введенные нами калибровочные поля, связанные с группой Пуанкаре, являются гравитационными полями.

Гравитационные поля порождаются материей и ее движением. В общей теории относительности Эйнштейна гравитационное поле (тензор  $g_{\mu\nu}$ ) отождествляется с метрикой реального пространства — времени, поэтому можно сказать, что метрика, а следовательно и геометрия реального мира, создается материей и ее движением.

Мы видели, что инвариантность действия  $W_m$ , связанного с полем материи, по отношению к  $\xi$ -преобразованиям приводит

\* Одновременно с Эйнштейном и независимо от него эти уравнения были установлены Гильбертом исходя из вариационного принципа [5] (см. [6]). Уравнения (7.3.20), (7.3.21), включающие уравнение для тензора кручения, были получены Вейлем [8].

к симметрии тензора энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$ . Покажем, что инвариантность действия  $W_m$  по отношению к  $\xi$ -преобразованиям приводит к дифференциальной форме закона сохранения энергии импульса поля материи и гравитационного поля.

Свойство инвариантности  $W_m$  относительно  $\xi$ -преобразований может быть сформулировано в виде

$$\int d^4 x \delta_\xi h_k^\mu \frac{\delta W_m}{\delta h_k^\mu} = 0,$$

где

$$\delta_\xi h_k^\mu = \xi^\mu h_k^\nu - \xi^\lambda \partial_\lambda h_k^\mu$$

(мы учли, что в силу уравнений для поля материи  $\delta W_m / \delta \chi = 0$ ). Отсюда в силу произвольности функций  $\xi^\mu$  следует, что

$$\partial_\nu \left( h_k^\nu \frac{\delta W_m}{\delta h_k^\mu} \right) + \frac{\delta W_m}{\delta h_k^\lambda} \partial_\mu h_k^\lambda = 0.$$

Замечая, что (см. (7.3.24))

$$\frac{\delta W_m}{\delta h_k^\mu} = \sqrt{-g} T_{\mu\lambda} h^{k\lambda},$$

имеем

$$\partial_\nu T_{\mu}^{\nu} + T_{\lambda\nu} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu g^{\nu\lambda} + \delta_\mu^\lambda g^{\nu\rho} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \sqrt{-g} \right\} = 0. \quad (7.3.30)$$

Используя определение (7.2.11) символов Кристоффеля и определение операции ковариантного дифференцирования, эту формулу можно представить в виде

$$\mathcal{D}_\nu T_{\mu}^{\nu} = 0. \quad (7.3.31)$$

Уравнение (7.3.30) может быть представлено в форме дифференциального закона сохранения, если величины  $T_{\lambda\nu}$  перед фигурными скобками выразить с помощью уравнений (7.3.24) через тензор  $R_{\mu\nu}$

$$\partial_\nu (T_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu}) = 0, \quad (7.3.32)$$

где величину

$$t^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu} - \frac{1}{g} \partial_\lambda h^{\mu\nu\lambda}, \quad h^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{16\pi k} \partial_\rho \{ -g (g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}) \}$$

можно трактовать как «тензор» энергии-импульса гравитационного поля. Мы взяли слово тензор в кавычки по той причине, что в действительности эта величина не представляет собой мирового тензора по отношению к  $\xi$ -преобразованиям. Однако при вычислении интегральных величин, соответствующих

ющих вектору энергии-импульса, трудности, связанные с не-тензорным характером  $t_{\mu}^{\nu}$ , не сказываются, если только пространство — время на бесконечности является плоским, а система координат декартова.

**7.3.5. Лагранжианы скалярного, электромагнитного и дираковского полей при наличии гравитационного поля.** Выше мы показали, как, исходя из лагранжиана свободного поля материи  $\chi$ , построить путем удлинения производных лагранжиан поля  $\chi(x)$  при наличии гравитационного поля. В этом разделе применяется эта процедура для получения уравнения простейших материальных полей при наличии гравитационного поля.

Начнем со скалярного вещественного поля  $\varphi(x)$ . Свободный лагранжиан этого поля определяется в формализме второго порядка формулой

$$L(\varphi, \partial_k \varphi) = \frac{1}{2} (\partial_k \varphi \partial^k \varphi - m^2 \varphi^2). \quad (7.3.33)$$

В случае скалярного поля  $D_k \varphi = h_k^{\mu} \partial_{\mu} \varphi$ , поэтому лагранжиан поля  $\varphi(x)$  при наличии гравитационного поля, согласно § 2.1, имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi - m^2 \varphi^2) \quad (7.3.33')$$

(мы использовали при этом определение (7.2.1) метрического тензора). Исходя из этого лагранжиана, легко получить уравнения движения для поля  $\varphi(x)$ :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \varphi) + m^2 \varphi = 0. \quad (7.3.34)$$

Рассмотрим далее электромагнитное свободное поле. Лагранжиан этого поля имеет вид

$$L = -\frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} + \frac{1}{2} F^{kl} (\partial_k A_l - \partial_l A_k).$$

Чтобы учесть гравитационное поле производную  $\partial_k A_l$  мы должны заменить на ковариантную производную:

$$\partial_k A_l \rightarrow D_k A_l = h_k^{\mu} h_l^{\nu} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} A_{\lambda}).$$

Легко видеть, что в случае симметричной связности

$$\mathcal{D}_{\mu} A_{\nu} - \mathcal{D}_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}.$$

Поэтому при наличии гравитационного поля, согласно § 7.3, лагранжиан электромагнитного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) \right\}, \quad (7.3.35)$$

где  $F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} F^{\rho\lambda}$ . Варьируя этот лагранжиан по  $F^{\mu\nu}$ , получаем

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (7.3.36)$$

Вариация по  $A_{\mu}$  дает

$$\partial^{\nu} (\sqrt{-g} F_{\mu\nu}) = 0. \quad (7.3.37)$$

Перейдем, наконец, к дираковскому полю  $\psi$ , свободный лагранжиан которого имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^k \partial_k - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^k \overleftarrow{\partial}_k + m) \psi.$$

Заменяя в этом лагранжиане производные  $\partial_k \psi$  на ковариантные производные

$$\partial_k \psi \rightarrow D_k \psi = h_k^{\mu} \left( \partial_{\mu} - \frac{i}{4} A^i{}_{\mu} [\gamma_i, \gamma_j] \right) \psi,$$

$$\partial_k \bar{\psi} \rightarrow D_k \bar{\psi} = \bar{\psi} \left( \overleftarrow{\partial}_k + \frac{i}{4} A^i{}_{\mu} [\gamma_i, \gamma_j] \right) h_k^{\mu} \equiv \bar{\psi} \overleftarrow{D}_k,$$

найдем, согласно (7.3.5'), лагранжиан дираковского поля при наличии гравитационного поля:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^k D_k - m) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (i\gamma^k \overleftarrow{D}_k + m) \psi \right\}. \quad (7.3.38)$$

Из этого лагранжиана следует уравнение движения:

$$(i\gamma^k D_k - m) \psi = 0. \quad (7.3.39)$$

Вводя мировые ковариантные производные

$$\mathcal{D}_{\mu} \psi = \partial_{\mu} \psi - A^i{}_{\mu} \frac{i}{4} [\gamma_i, \gamma_j] \psi, \quad (7.3.40)$$

можно переписать это уравнение в виде

$$(i\gamma^{\mu} \mathcal{D}_{\mu} - m) \psi = 0, \quad (7.3.39')$$

где

$$\gamma^{\mu} = h_k^{\mu} \gamma^k.$$

Следовательно,

$$\{\gamma^{\mu}(x), \gamma^{\nu}(x)\} = 2g^{\mu\nu}(x). \quad (7.3.41)$$

Величина  $A^i{}_{\mu}$  связана с символами Кристоффеля формулой (7.1.22):

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} = h_i^{\lambda} (\partial_{\mu} b^i{}_{\nu} + A^i{}_{k\mu} b^k{}_{\nu}).$$

Таким образом, ковариантные производные  $D_k$ ,  $\mathcal{D}_{\mu}$  поля  $\psi$ , как и само уравнение Дирака, не могут быть сформулированы только в терминах метрического тензора (необходимо

знание еще полей  $h_k^{\mu}$ , не определяемых метрическим тензором  $g_{\mu\nu}$ ). Эта ситуация аналогична ситуации с электромагнитным полем в случае уравнения Дирака; как в случае электромагнитного взаимодействия для написания уравнения Дирака недостаточно знания тензора  $F_{\mu\nu}$ , а необходимо еще введение 4-потенциала  $A_\mu$ , зависящего от калибровки, в случае гравитационного взаимодействия недостаточно тензора  $g_{\mu\nu}$  (инвариантного относительно  $\epsilon$ -преобразований), а необходимо еще введение калибровочных полей  $h_k^{\mu}$ , не инвариантных относительно  $\epsilon$ -преобразований.

**7.3.6. Рождение частиц гравитационным полем.** В гравитационном поле, как и в электрическом поле, могут рождаться частицы. Поле при этом может быть как постоянным, так и переменным. В случае переменного поля в теории возмущений по константе связи этот эффект является пороговым, так как внешнее поле должно содержать частоты, превышающие  $2mc^2$  (где  $m$  — масса частицы; предполагается, что рождается пара). Однако вне рамок теории возмущений внешнее поле может быть и постоянным, точнее говоря, оно должно включаться и выключаться адиабатически при  $t \rightarrow \pm \infty$ . При этом природа поля не существенна, т. е. оно может быть как электромагнитным, так и не электромагнитным, например гравитационным [9]. Чтобы качественно разъяснить эффект рождения частиц в некотором постоянном поле с напряженностью  $\Gamma$ , предположим, что рождаемая в этом поле пара частиц обладает массой  $m$  и характерным для поля зарядом  $g$ , так что действующая на частицу сила равна  $g\Gamma$ .

Если рассматривать сначала эту пару как виртуальную, то время ее жизни согласно соотношению неопределенностей будет порядка  $\frac{\hbar}{mc^2}$ , а длина свободного пробега  $l_0 \approx \hbar/mc$ . Вероятность того, что компоненты пары разойдутся на расстояние  $l$ , будет пропорциональна  $\exp\left(-\frac{l}{l_0}\right)$ . Энергия, приобретаемая компонентами пары за счет внешнего поля, в результате расхождения на расстояние  $l$  будет равна  $g\Gamma l$ . Если эта энергия будет больше или порядка  $mc^2$ ,  $g\Gamma l \sim mc^2$ , то частицы окажутся реальными. В этом случае  $l \sim mc^2/g\Gamma$ , поэтому вероятность расхождения пары  $\omega$  будет пропорциональна  $\exp\left(-\beta \frac{m^2 c^3}{\hbar g \Gamma}\right)$ :

$$\omega \sim \exp\left(-\beta \frac{m^2 c^3}{\hbar g \Gamma}\right)$$

(коэффициент  $\beta$  порядка единицы). Если в этой формуле под  $\Gamma$  понимать электрическое поле, а под  $g$  — заряд электрона,

то мы получим по порядку величины вероятность рождения электронно-позитронной пары электрическим полем  $E$ . Точная формула, полученная Швингером для числа частиц  $dN$ , рождаемых в элементе объема  $dV$  за время  $dt$ , имеет вид

$$dN = \frac{e^2 E^2}{\pi^2 \hbar^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\pi \frac{m^2 c^3}{\hbar e E}\right) dV dt.$$

Ясно, что этот результат не может быть получен в рамках теории возмущений.

Перейдем теперь к количественной теории рождения частиц гравитационным полем. Для простоты мы ограничимся рассмотрением рождения скалярных частиц. Вещественное скалярное поле  $\phi(x)$  удовлетворяет уравнению (7.3.34). Чтобы описать рождение частиц, являющееся квантовым эффектом, поле  $\phi(x)$  мы должны считать квантованным, т. е. рассматривать  $\phi(x)$  как оператор. Что же касается гравитационного поля  $g_{\mu\nu}(x)$ , то его не будем считать квантовым, а будем рассматривать как заданное классическое поле.

Для определения понятия частицы предположим, что при  $t \rightarrow -\infty$  пространство время является асимптотически плоским

$$g^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} g_{in}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \quad (7.3.42)$$

(индекс  $in$  служит для обозначения «входящего» при  $t \rightarrow -\infty$  поля; не ограничивая общности, можно считать, что  $g_{in}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ ). Полная система решений уравнения (7.3.34) при  $t \rightarrow -\infty$  может быть выбрана в виде плоских волн (см. гл. 1)

$$u_k^{in}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{in}}} \exp\{-i\omega_{in}t + ikx\}, \quad \omega_{in} > 0, \quad (7.3.43)$$

где  $\omega_{in}(k)$  положительный корень  $k_0$  уравнения

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu - m^2 = 0, \quad k_0 = \pm \omega_{in}(k).$$

Квантованное поле  $\hat{\phi}(x)$ , удовлетворяющее уравнению (7.3.34), при  $t \rightarrow -\infty$  может быть разложено по этой полной системе

$$\hat{\phi}(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \hat{\phi}_{in}(x) = \sum_k (\hat{a}_k u_k^{in}(x) + \hat{a}_k^+ u_k^{in}(x)^*), \quad (7.3.44)$$

где не зависящие от времени операторы  $\hat{a}_k, \hat{a}_k^+$  удовлетворяют бозевским перестановочным соотношениям (см. § 2.1)

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_k^+] = \delta_{kk'}. \quad (7.3.44')$$

Введем теперь полную систему решений  $u_k^{in}(x)$  уравнения (7.3.34)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu u_k^{in}(x)) + m^2 u_k^{in}(x) = 0, \quad (7.3.45)$$

удовлетворяющих асимптотическому условию

$$u_k^{in}(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \overset{\circ}{u}_k^{in}(x). \quad (7.3.46)$$

Тогда поле  $\hat{\varphi}(x)$  может быть представлено в виде

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \{ \hat{a}_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^{in}(x) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} u_{\mathbf{k}}^{in}(x)^* \}, \quad (7.3.47)$$

где не зависящие от времени операторы  $\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  совпадают с операторами  $\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  в формуле (7.3.44).

Введем скалярное произведение  $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$  в пространстве функций, удовлетворяющих уравнению (7.3.45)

$$(\varphi_1, \varphi_2) = -i \int_{\Sigma} \varphi_1(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi_2^*(x) \sqrt{-g} d\sigma^\mu, \quad (7.3.48)$$

$$\overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi_2 \equiv \partial_\mu \varphi_1 \cdot \varphi_2^* - \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2^*.$$

Используя теорему Гаусса

$$\oint f_\mu d\sigma^\mu = \int_{\Omega} d^4x \partial^\mu f_\mu,$$

легко видеть, что скалярное произведение (7.3.48) в силу уравнений поля не зависит от выбора пространственно-подобной поверхности  $\Sigma$ . Скалярное произведение (7.3.48) не является положительно определенным и удовлетворяет очевидным соотношениям

$$(\varphi_1, \varphi_2)^* = (\varphi_2, \varphi_1), \quad (\varphi_1, \varphi_2)^* = -(\varphi_1^*, \varphi_2^*).$$

Легко непосредственно проверить, что

$$(u_{\mathbf{k}}^{in}, u_{\mathbf{k}'}^{in}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (u_{\mathbf{k}}^{in}, u_{\mathbf{k}'}^{in*}) = 0. \quad (7.3.49)$$

Так как скалярное произведение функций, удовлетворяющих уравнению (7.3.45), не зависит от поверхности  $\Sigma$ , то справедливы следующие соотношения ортонормировки для функций  $u_k^{in}(x)$ :

$$(u_{\mathbf{k}}^{in}, u_{\mathbf{k}'}^{in}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (u_{\mathbf{k}}^{in}, u_{\mathbf{k}'}^{in*}) = 0, \quad (u_{\mathbf{k}}^{in*}, u_{\mathbf{k}'}^{in*}) = -\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (7.3.50)$$

Нас в дальнейшем будет интересовать асимптотика поля  $\hat{\varphi}(x)$  и функций  $u_k^{in}(x)$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Будем предполагать, что поле  $g^{\mu\nu}(x)$  при  $t \rightarrow +\infty$  также является плоским

$$g^{\mu\nu}(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} g_{out}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \quad (7.3.51)$$

(индекс out служит для обозначения «выходящего» при  $t \rightarrow +\infty$  поля). Функции  $\overset{\circ}{u}_k^{out}(x)$ :

$$\overset{\circ}{u}_k^{out}(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{out}}} \exp(-i\omega_{out}t + i\vec{k}\vec{x}), \quad \omega_{out} > 0, \quad (7.3.52)$$

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu - m^2 = 0, \quad k_0 = \pm \omega_{out}(\mathbf{k}), \quad \omega_{out}(\mathbf{k}) = \omega_{in}(\mathbf{k})$$

также образуют полную систему функций уравнения (2.1.3) при  $t \rightarrow \infty$ , удовлетворяющую соотношениям ортонормировки

$$(\overset{\circ}{u}_{\mathbf{k}}^{out}, \overset{\circ}{u}_{\mathbf{k}'}^{out}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (\overset{\circ}{u}_{\mathbf{k}}^{out}, \overset{\circ}{u}_{\mathbf{k}'}^{out*}) = 0. \quad (7.3.53)$$

По этой системе функций может быть разложено поле  $\hat{\varphi}(x)$  при  $t \rightarrow +\infty$

$$\hat{\varphi}(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \hat{\varphi}_{out}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \{ \hat{a}'_{\mathbf{k}} \overset{\circ}{u}_{\mathbf{k}}^{out}(x) + \hat{a}'_{\mathbf{k}}^{\dagger} \overset{\circ}{u}_{\mathbf{k}}^{out}(x) \}, \quad (7.3.54)$$

где не зависящие от времени операторы  $\hat{a}'_{\mathbf{k}}, \hat{a}'_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  удовлетворяют бозевским перестановочным соотношениям

$$[\hat{a}'_{\mathbf{k}}, \hat{a}'_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (7.3.54')$$

Подчеркнем, что операторы  $\hat{a}'_{\mathbf{k}}$  не совпадают с операторами  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ . Если операторы  $\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  являются операторами уничтожения и рождения частиц при  $t \rightarrow -\infty$ , то операторы  $\hat{a}'_{\mathbf{k}}, \hat{a}'_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  — операторами уничтожения и рождения частиц при  $t \rightarrow \infty$  (мы рассматриваем гейзенберговское представление для поля  $\hat{\varphi}(x)$ ).

Введем теперь полную систему решений  $u_k^{out}(x)$  уравнения (7.3.34)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu u_k^{out}(x)) + m^2 u_k^{out}(x) = 0, \quad (7.3.55)$$

удовлетворяющих асимптотическому условию

$$u_k^{out}(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \overset{\circ}{u}_k^{out}(x). \quad (7.3.56)$$



Тогда поле  $\hat{\varphi}(x)$  может быть представлено в виде

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_k \{ \hat{a}'_k u_k^{\text{out}}(x) + \hat{a}'_k{}^+ u_k^{\text{out}}(x)^* \}, \quad (7.3.57)$$

где не зависящие от времени операторы  $\hat{a}'_k$ ,  $\hat{a}'_k{}^+$  совпадают с операторами в формуле (7.3.54).

Функции  $u_k^{\text{out}}(x)$  могут быть разложены по полной системе функций  $u_k^{\text{in}}(x)$ :

$$u_k^{\text{out}}(x) = \sum_{k'} \{ \alpha_{kk'} u_k^{\text{in}}(x) + \beta_{kk'} u_k^{\text{in}}(x)^* \}$$

или символически

$$u^{\text{out}} = \hat{\alpha} u^{\text{in}} + \hat{\beta} u^{\text{in}*}. \quad (7.3.58)$$

В силу свойств (7.3.50) ортонормированности функций  $u^{\text{in}}(x)$  имеем

$$\alpha_{kk'} = (u_k^{\text{out}}, u_{k'}^{\text{in}}), \quad \beta_{kk'} = -(u_k^{\text{out}}, u_{k'}^{\text{in}*})$$

или символически

$$\hat{\alpha} = (u^{\text{out}}, u^{\text{in}}), \quad \hat{\beta} = -(u^{\text{out}}, u^{\text{in}*}). \quad (7.3.59)$$

Так как система функций  $u_k^{\text{out}}(x)$  также ортонормирована

$$(u^{\text{out}}, u^{\text{out}}) = 1, \quad (u^{\text{out}}, u^{\text{out}*}) = 0,$$

то, подставляя сюда разложение (7.3.58) и используя определения (7.3.59) матриц  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  и условия ортонормировки функций  $u_k^{\text{in}}(x)$  (7.3.50), получаем

$$\hat{\alpha}\hat{\alpha}^+ - \hat{\beta}\hat{\beta}^+ = 1, \quad \hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\alpha} = 0 \quad (7.3.60)$$

(символ  $\sim$  служит для обозначения операции транспонирования).

Найдем теперь связь между операторами  $\hat{a}'_k$ ,  $\hat{a}'_k{}^+$ . Из формул (7.3.47), (7.3.57) следует, что

$$\sum_k \{ \hat{a}'_k u_k^{\text{in}}(x) + \hat{a}'_k{}^+ u_k^{\text{in}}(x)^* \} = \sum_k \{ \hat{a}'_k u_k^{\text{out}}(x) + \hat{a}'_k{}^+ u_k^{\text{out}}(x)^* \}$$

или символически

$$\hat{a} u^{\text{in}} + \hat{a}'^+ u^{\text{in}*} = \hat{a}' u^{\text{out}} + \hat{a}'^+ u^{\text{out}*},$$

откуда, используя свойства ортонормировки функций  $u_k^{\text{out}}(x)$ , имеем

$$\hat{a}' = (u^{\text{out}}, u^{\text{in}}) \hat{a} + (u^{\text{out}}, u^{\text{in}*}) \hat{a}'^+,$$

$$\hat{a}'^+ = (u^{\text{out}*}, u^{\text{in}}) \hat{a} - (u^{\text{out}*}, u^{\text{in}*}) \hat{a}'^+$$

или, используя определения (7.3.59) матриц  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,

$$\hat{a}' = \hat{\alpha}\hat{a} - \hat{\beta}\hat{a}'^+, \quad \hat{a}'^+ = \hat{a}'^+\hat{\alpha}^+ - \hat{a}\hat{\beta}^+. \quad (7.3.61)$$

Легко видеть, что если операторы  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}'^+$  удовлетворяют соотношениям коммутации (7.3.44'), то в силу (7.3.60) таким же соотношениям коммутации будут удовлетворять и операторы  $\hat{a}'$ ,  $\hat{a}'^+$ .

Преобразования (7.3.61), смешивающие операторы рождения и уничтожения, в которых матрицы  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  удовлетворяют соотношениям (7.3.60), называются преобразованиями Боголюбова.

Введем вакуум поля  $\varphi(x)$  при  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\hat{a}'_k |0\rangle = 0, \quad \varphi_{\text{in}}^{(+)}(x) |0\rangle = 0. \quad (7.3.62)$$

Это значит, что при  $t \rightarrow -\infty$  в состоянии  $|0\rangle$  отсутствуют частицы. Так как мы рассматриваем гейзенберговское представление, то вектор состояния не зависит от времени. Однако вектор  $|0\rangle$  не будет являться вектором состояния вакуума при  $t \rightarrow +\infty$ , поскольку в процессе эволюции изменились операторы (но не вектор состояния) и оператором уничтожения будет теперь не оператор  $\hat{a}'_k$ , а оператор  $\hat{a}'_k{}^+$ , причем  $\hat{a}'_k{}^+ |0\rangle = -\sum_{k'} \beta_{kk'} \hat{a}'_{k'} |0\rangle \neq 0$ . Вектором состояния вакуума при  $t \rightarrow +\infty$  будет вектор

$$\hat{a}'_k |0\rangle' = 0, \quad \varphi_{\text{out}}^{(+)}(x) |0\rangle' = 0. \quad (7.3.63)$$

Оператором числа частиц при  $t \rightarrow +\infty$  является оператор  $\hat{a}'_k{}^+ \hat{a}'_k$ . Поэтому среднее число частиц в неизменившемся состоянии  $|0\rangle$  при  $t \rightarrow +\infty$  будет равно

$$\langle 0 | \hat{a}'_k{}^+ \hat{a}'_k |0\rangle = \sum_{k'} |\beta_{kk'}|^2. \quad (7.3.64)$$

Эта величина и представляет собой число частиц с импульсом  $k$ , рожденных гравитационным полем. Иными словами, эта формула определяет спектр частиц, рожденных гравитацион-

ным полем. Формула эта является общей и не зависит от конкретного вида гравитационного поля.

Так как операторы  $\hat{a}'$ ,  $\hat{a}'^+$  и  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям, то они связаны между собой некоторым унитарным преобразованием

$$\hat{a}'_k = S^+ \hat{a}_k S, \quad SS^+ = 1. \quad (7.3.65)$$

Легко убедиться, что унитарный оператор  $S$  совпадает с матрицей рассеяния. Действительно, предположим, что представление взаимодействия совпадает с гейзенберговским представлением не при  $t = 0$  (как мы предполагали), а при  $t = -\infty$ . Тогда оператор  $S(t, -\infty)$  (см. § 1.6) будет связывать гейзенберговское представление полевых операторов  $\hat{\varphi}(x)$  с представлением взаимодействия  $\hat{\varphi}(x)$ :

$$\hat{\varphi}(x) = S^+(t, -\infty) \varphi(x) S(t, -\infty).$$

Из этой формулы следует, что

$$\hat{\varphi}(x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \varphi_{in}(x) = \varphi(x),$$

$$\hat{\varphi}(x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \varphi_{out}(x) = S^+ \varphi(x) S,$$

где  $S = S(\infty, -\infty)$  — матрица рассеяния. Отсюда

$$S^+ \varphi_{in}(x) S = \varphi_{out}(x).$$

Подставляя сюда разложения (7.3.44), (7.3.54)  $\varphi_{in}$  и  $\varphi_{out}$  по плоским волнам, мы и приходим к формуле (7.3.65).

Из формул (7.3.61) следует, что

$$S^+ \hat{a} S = \hat{\alpha} \hat{a} - \hat{\beta} \hat{a}^+, \quad (7.3.66)$$

Это соотношение и определяет матрицу рассеяния  $S$ .

Как мы видели, состояние вакуума  $|0\rangle'$  при  $t \rightarrow +\infty$  и состояние вакуума  $|0\rangle$  при  $t \rightarrow -\infty$  не совпадают. Из формул (7.3.62), (7.3.63), (7.3.65) следует, что

$$|0\rangle' = S^+ |0\rangle.$$

Важнейшее физическое значение имеет открытое Хоукингом рождение частиц коллапсирующей черной дырой [10]. Мы не будем приводить вычислений коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  в этом случае, а приведем лишь окончательный результат для спектра рожденных частиц:

$$\langle 0 | \hat{a}'_k{}^+ \hat{a}'_k | 0 \rangle = (e^{\frac{\omega_k}{T_*}} - 1)^{-1},$$

где  $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ ,  $T_* = \hbar c^3 / 8\pi k M$ . Мы видим, что излучение черной дыры определяется формулой Планка с эффективной температурой  $T_*$ , определяемой массой черной дыры  $M$ .

Остановимся еще на вопросе квантования гравитационного поля. Так как гравитационное поле является калибровочным, то его квантование должно производиться также, как и квантование обычного неабелевого калибровочного поля (см. § 4.2). Это квантование впервые было проведено в работах [11, 11]. В результате квантования метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  и поля  $h^2_{\mu}$  становятся операторами, удовлетворяющими определенным перестановочным соотношениям. Частицы, связанные с гравитационным полем, называются гравитонами и имеют спин 2. Однако полученная в результате квантования теория гравитационного поля оказывается неперенормируемой, т. е. содержащей бесконечное число типов расходящихся диаграмм. Поэтому такая квантовая теория не может претендовать на статус окончательной физической теории квантованного гравитационного поля.

## ТЕОРИЯ СУПЕРПОЛЕМ

## § 8.1. Суперполя и их преобразования

**8.1.1. Идея суперсимметрии и расширение группы Пуанкаре.** Скалярное, векторное и дираковское поля, рассматриваемые ранее, связаны с определенными представлениями группы Пуанкаре. При преобразованиях группы Пуанкаре или при преобразованиях внутренней симметрии тензорные (бозонные) и спинорные (фермионные) поля преобразовывались независимо друг от друга. Однако можно ввести более общую группу преобразований, которая объединит бозонные и фермионные поля так, что при преобразованиях этой группы бозонные и фермионные поля будут преобразовываться не независимо, а «перемешиваться» между собой. Для того, чтобы эти преобразования имели физический смысл, необходимо потребовать, чтобы лагранжиан полей был инвариантен по отношению к преобразованиям этой группы. Преобразования этой группы называются преобразованиями суперсимметрии и впервые были введены в работах Гольфанда Ю. А., Лихтмана Е. П. [1, 2] и Волкова Д. В., Акулова В. П. [3, 5]\*. Введение суперсимметрии приводит к важным физическим следствиям. Как покажем далее, в квантовой теории поля, обладающей суперсимметрией, происходит сильное сокращение расходимостей в области больших импульсов. В простейшей модели скалярного суперполя (которая называется моделью Весса — Зумино) остается только один тип расходимостей.

Суперсимметричная теория не может содержать только бозонные или фермионные поля. Оба типа этих полей обязательно должны входить в суперсимметричную теорию, причем требование суперсимметрии накладывает определенные ограничения и на взаимодействие между частицами. В частности, суперсимметричное обобщение теории гравитации (которая

\* См. также работы Волкова Д. В., Сороки В. А. [6, 7] и Весса, Зумино [8].

называется теорией супергравитации) приводит к необходимости введения наряду с бозонным гравитационным полем (частицы этого поля называются гравитонами) фермионного поля со спином 3/2 (частицы этого поля называются гравитино). К сожалению, однако, суперсимметричное обобщение теории гравитации, как и обычная теория гравитации, оказывается неперенормируемой теорией, несмотря на значительное сокращение содержащихся в ней расходимостей.

Переходя к изложению теории суперсимметрии, начнем с вопроса о расширении группы преобразований Пуанкаре. Поля, которые мы до сих пор изучали, преобразовывались при бесконечно малых преобразованиях группы Пуанкаре согласно формуле

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x'), \quad x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu + \epsilon_\mu^\nu x_\nu, \quad (8.1.1)$$

где

$$\chi'(x) = G\chi(x), \quad G = i\epsilon_\mu P^\mu - \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu} L^{\mu\nu}$$

и  $P^\mu, L^{\mu\nu}$  — генераторы преобразований,

$$P_\mu = i\partial_\mu, \quad L_{\mu\nu} = \Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu). \quad (8.1.2)$$

Согласно (8.1.2), эти генераторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, L_{\nu\rho}] = i(g_{\mu\nu}P_\rho - g_{\mu\rho}P_\nu), \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\lambda}] = i(g_{\mu\nu}L_{\rho\lambda} + g_{\nu\rho}L_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho}L_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}L_{\mu\rho}). \quad (8.1.3)$$

Мы хотим теперь расширить группу Пуанкаре, введя дополнительные генераторы, которые будем считать, в отличие от  $P_\mu, L_{\nu\rho}$ , не тензорными, а спинорными величинами. Обозначим их через  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$  ( $\alpha$  и  $\dot{\alpha}$  — спинорные индексы,  $\alpha = 1, 2, \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ , см. § 2.5) и предположим в соответствии с требованием релятивистской инвариантности, что генераторы  $P_\mu, L_{\nu\rho}, Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$  удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:\*

$$[Q_\alpha, P_\mu] = [Q_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0, \quad \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{Q_{\dot{\alpha}}, Q_{\dot{\beta}}\} = 0, \\ \{Q_\alpha, Q_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\beta\alpha}^\mu P_\mu, \quad [Q_\alpha, L_{\mu\nu}] = -(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta, \quad (8.1.4)$$

$$[Q_{\dot{\alpha}}, L_{\mu\nu}] = -(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} Q_{\dot{\beta}}$$

(кроме того, остаются справедливыми соотношения (8.1.3))

\* При изложении теории суперсимметрии использовались данные раbot [9, 10].

Заметим, что численный коэффициент в выражении для антикоммутатора  $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$  всегда может быть выбран равным 2 путем соответствующей нормировки генераторов  $Q_\alpha, Q_\beta$ . Заметим также, что первые из соотношений (8.1.4) с точки зрения релятивистской инвариантности могли бы иметь вид

$$[Q_\alpha, P_\mu] = c_1 (\sigma_\mu)_\alpha{}^\beta Q_\beta, \{Q_\alpha, Q_\beta\} = c_2 (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} L^{\mu\nu}, \quad (8.1.5)$$

$$[Q_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = -c_1^* (\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} Q_{\dot{\beta}}, \{Q_{\dot{\alpha}}, Q_{\dot{\beta}}\} = c_2^* (\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} L^{\mu\nu}.$$

Но коммутируя первое из этих соотношений с оператором  $P_\nu$  и учитывая тождество Якоби

$$[a, [b, c]] = -[b, [c, a]] - [c, [a, b]],$$

из которого следует, что

$$[P_\nu, [Q_\alpha, P_\mu]] = [P_\mu, [Q_\alpha, P_\nu]],$$

получаем, согласно (8.1.5),

$$|c_1|^2 (\sigma_{\beta\alpha}^\nu \sigma_\lambda^{\mu\dot{\beta}} + \sigma_{\beta\alpha}^\mu \sigma_\lambda^{\nu\dot{\beta}}) Q^\lambda = 0.$$

Это возможно только при  $c_1 = 0$ . Коммутируя второе из соотношений (8.1.5) с  $P_\nu$  и учитывая, что  $[Q_\alpha, P_\nu] = 0$ , мы получаем, согласно (8.1.3), что  $c_2 = 0$ . Перестановочные соотношения для  $Q$  и  $L_{\mu\nu}$  выбраны так, чтобы при преобразованиях Лоренца величины  $Q_\alpha, Q_{\dot{\beta}}$  преобразовывались как спиноры.

Обратим внимание на то, что для спинорных генераторов пишутся не коммутаторы, а антикоммутаторы. Это связано с тем, что спинорные поля описывают фермионы, удовлетворяющие принципу Паули.

**8.1.2. Реализация алгебры генераторов суперпреобразований.** На первый взгляд кажется, что введение антикоммутаторов для генераторов групп несовместимо с теорией непрерывных групп (см. формулы (1.1.27), в которые входят коммутаторы). Однако в действительности, как мы сейчас покажем, противоречия не возникает, если кроме обычных  $c$ -числовых параметров, определяющих элементы непрерывной группы, ввести в число этих параметров еще грассмановые (см. § 1.2) спинорные переменные  $\xi_\alpha, \xi_{\dot{\alpha}}$ , антикоммутирующие между собой и с генераторами  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$  и коммутирующие с остальными генераторами

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = \{\xi_{\dot{\alpha}}, \xi_{\dot{\beta}}\} = \{\xi_\alpha, \xi_{\dot{\beta}}\} = \{\xi_\beta, Q_\alpha\} = \{\xi_{\dot{\beta}}, Q_{\dot{\alpha}}\} = \{\xi_\beta, Q_{\dot{\alpha}}\} = 0$$

Рассмотрим для простоты замкнутую алгебру, характеризуемую величинами  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, P_\mu$ , и покажем, что величины

$$\mathcal{T}(\xi, a) = \exp G(\xi, a), \quad G(\xi, a) = i(Q_\alpha \xi^\alpha + \xi^{\dot{\alpha}} Q_{\dot{\alpha}} + a^\mu P_\mu), \quad (8.1.6)$$

где  $a^\mu - c$  — числовые переменные и  $\xi^\alpha, \xi^{\dot{\alpha}} \equiv \bar{\xi}^\alpha$  — грассмановы переменные, образуют группу, т. е.

$$\mathcal{T}(\xi, a) \mathcal{T}(\xi', a') = \mathcal{T}(\xi'', a'') \quad (8.1.7)$$

с законом умножения

$$\xi'' = \xi + \xi', \quad \bar{\xi}'' = \bar{\xi} + \bar{\xi}', \quad (8.1.8)$$

$$a''^\mu = a^\mu + a'^\mu + i(\bar{\xi} \sigma^\mu \xi' - \bar{\xi}' \sigma^\mu \xi).$$

Заметим, что соотношения (8.1.4) можно записать в виде

$$[Q\xi, Q\xi'] = [\bar{\xi}Q, \bar{\xi}'Q] = 0, \quad (8.1.9)$$

$$[\bar{\xi}Q, Q\xi'] = 2\bar{\xi}\sigma^\mu\xi'P_\mu,$$

где  $Q\xi = Q_\alpha \xi^\alpha$ ,  $\bar{\xi}Q = \xi^{\dot{\alpha}} Q_{\dot{\alpha}}$  ( $Q_{\dot{\alpha}} \equiv \bar{Q}_\alpha$ ). Используя далее формулу

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \cdot e^{\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (8.1.10)$$

справедливую, если оператор  $[A, B]$  коммутирует с  $A, B$ , и замечая, что, согласно (8.1.9),

$$-\frac{1}{2}[Q\xi + \bar{\xi}Q, Q\xi' + \bar{\xi}'Q] = \bar{\xi}'\sigma^\mu\xi P_\mu - \bar{\xi}\sigma^\mu\xi' P_\mu,$$

мы приходим к формуле (8.1.8).

Выясним теперь, как найти конкретный вид генераторов  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$ . Как мы видели, генераторы группы Пуанкаре  $P_\mu$  и  $L_{\mu\nu}$  могут быть реализованы с помощью операций дифференцирования по  $x^\mu$  (см. (8.1.2)). Аналогичным образом могут быть реализованы генераторы  $Q_\alpha$  и  $Q_{\dot{\alpha}}$ , но не с помощью операции пространственно-временного дифференцирования  $\partial_\mu$ , а с помощью операций дифференцирования  $\partial/\partial\theta^\alpha, \partial/\partial\theta^{\dot{\alpha}}$  по некоторым спинорным переменным  $\theta^\alpha, \theta^{\dot{\alpha}}$ . При этом спинорные переменные  $\theta^\alpha, \theta^{\dot{\alpha}}$  должны являться грассмановыми переменными, антикоммутирующими между собой и со всеми другими спинорными переменными (например,  $\xi^\alpha, Q_\alpha$ ). В соответствии с этим под производными  $\partial/\partial\theta^\alpha, \partial/\partial\theta^{\dot{\alpha}}$  следует понимать грасс-

мановы производные, определяемые формулами (см. § 1.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta^\nu} \theta^\alpha \theta^\beta \theta^{\dot{\alpha}} \dots &= \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \theta^\nu} \theta^\beta \theta^{\dot{\alpha}} \dots - \theta^\alpha \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \theta^\nu} \theta^{\dot{\alpha}} \dots + \\ &+ \theta^\alpha \theta^\beta \frac{\partial \theta^{\dot{\alpha}}}{\partial \theta^\nu} \dots - \dots, \quad \frac{\partial \theta^{\dot{\alpha}}}{\partial \theta^\nu} = \delta_\nu^{\dot{\alpha}}, \quad \frac{\partial \theta^{\dot{\alpha}}}{\partial \theta^\nu} = 0 \end{aligned}$$

(аналогичные формулы справедливы и для производной  $\partial/\partial \theta^{\dot{\alpha}}$ ).

В силу грассманова характера переменных  $\theta^\alpha$ ,  $\theta^{\dot{\alpha}}$  и того, что  $\alpha$  и  $\dot{\alpha}$  пробегает два значения, отличны от нуля только следующие произведения переменных  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\alpha \equiv \theta^{\dot{\alpha}}$ :

$$\theta^\alpha \theta^\beta, \bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}^\beta, \theta^\alpha \bar{\theta}^\beta, \theta^\alpha \theta^\beta \bar{\theta}^\gamma, \bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}^\beta \theta^\gamma, \theta^\alpha \theta^\beta \bar{\theta}^\gamma \bar{\theta}^\delta.$$

Заметим, что среди произведений  $\theta^\alpha \theta^\beta$  отличны от нуля только  $\theta^1 \theta^2$  и  $\theta^2 \theta^1 = -\theta^1 \theta^2$ . Поэтому

$$\theta^\alpha \theta^\beta = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (\theta\theta), \quad (8.1.11)$$

где  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  — полностью антисимметричный спинор второго ранга (см. § 2.5) и

$$(\theta\theta) = \theta^\alpha \theta_\alpha \equiv \theta^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \theta^\beta. \quad (8.1.11')$$

Аналогичным образом

$$\bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}^\beta = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\bar{\theta}\bar{\theta}), \quad (\bar{\theta}\bar{\theta}) = \theta^{\dot{\alpha}} \theta_{\dot{\alpha}} = \theta^{\dot{\alpha}} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \theta^{\dot{\beta}}. \quad (8.1.12)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \theta^\alpha \theta^\beta \theta^{\dot{\rho}} &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} (\theta\theta) \theta^{\dot{\rho}}, \quad \theta^{\dot{\alpha}} \theta^{\dot{\beta}} \theta^\rho = \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta^\rho, \quad \theta^{\dot{\alpha}} \theta^{\dot{\beta}} \theta^\alpha \theta^\beta = \frac{1}{4} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon^{\alpha\beta} (\bar{\theta}\bar{\theta}) (\theta\theta). \end{aligned} \quad (8.1.13)$$

Таким образом, единичный элемент, спиноры  $\theta$ ,  $\bar{\theta}$  и комбинации грассмановых спиноров  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\beta$

$$(\theta\theta), (\bar{\theta}\bar{\theta}), \theta^\alpha \bar{\theta}^\beta, (\theta\theta) \bar{\theta}^\alpha, (\bar{\theta}\bar{\theta}) \theta^\alpha, (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \quad (8.1.14)$$

могут быть приняты в качестве базиса некоторого 16-мерного линейного пространства, в котором реализуется грассманова алгебра, определяемая законом умножения  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\alpha$ . Переменные  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\alpha$  являются образующими грассмановой алгебры (см. § 1.2).

В пространстве переменных  $\theta$ ,  $\bar{\theta}$  можно ввести операцию инволюции, обозначаемую  $*$ , которая соответствует операции комплексного сопряжения для обычных чисел и определяется формулами

$$\begin{aligned} \theta \rightarrow \theta^* &\equiv \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta}^* \equiv \theta, \quad \zeta \rightarrow \zeta^* = \bar{\zeta}, \quad \bar{\zeta} \rightarrow \bar{\zeta}^* = \zeta, \\ (c\theta) \rightarrow (c\theta)^* &= c^* \theta^*, \quad (c\bar{\theta}) \rightarrow (c\bar{\theta})^* = c^* \bar{\theta}^*, \end{aligned}$$

где  $c$  — комплексное число. Кроме того, при инволюции произведения грассмановых переменных необходимо изменять порядок сомножителей. Например,  $(\theta^\alpha \theta^\beta)^* = \bar{\theta}^\beta \bar{\theta}^\alpha = -\bar{\theta}^\alpha \bar{\theta}^\beta$ . Отсюда, в частности, следует, что оператор  $G$ , определяемый формулой (8.1.6), при операции инволюции не изменяется

$$G^* = G. \quad (8.1.15)$$

Мы удовлетворим перестановочным соотношениям (8.1.4), если положим

$$\begin{aligned} P_\mu &= i\partial_\mu, \quad Q_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \theta^\beta \sigma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu, \quad Q_{\dot{\alpha}} = \\ &= i\frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{\alpha}}} - \sigma_{\dot{\alpha}\beta}^\mu \theta^\beta \partial_\mu. \end{aligned} \quad (8.1.16)$$

Действительно, так как

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \theta^\beta \right\} = \delta_\alpha^\beta, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta^{\dot{\alpha}}}, \theta^{\dot{\beta}} \right\} = 0,$$

то

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{Q_{\dot{\alpha}}, Q_{\dot{\beta}}\} = 0,$$

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\beta}}\} = i\sigma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu + i\sigma_{\dot{\beta}\alpha}^\mu \partial_\mu = 2i\sigma_{\beta\alpha}^\mu \partial_\mu \equiv 2\sigma_{\beta\alpha}^\mu P_\mu.$$

Легко проверить, что для того, чтобы выполнялись остальные соотношения (8.1.4), генератор  $L_{\mu\nu}$  должен быть модифицирован и определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \Sigma_{\mu\nu} + i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) - \left( \theta^\alpha (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta_\beta} + \right. \\ &\left. + \bar{\theta}^\alpha (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\beta} \right). \end{aligned} \quad (8.1.17)$$

Благодаря такой модификации переменные  $\theta^\alpha$ ,  $\bar{\theta}^\beta$  будут преобразовываться при преобразованиях Лоренца как релятивистские спиноры

$$\begin{aligned} \theta^\alpha \rightarrow \theta'^\alpha &= \theta^\alpha + \delta\theta^\alpha, \quad \delta\theta^\alpha = -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \theta^\alpha = \\ &= -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} (\sigma_{\mu\nu})^\alpha_\beta \theta^\beta. \end{aligned}$$

Заметим, что согласно (8.1.16), (8.1.6) грассмановы переменные  $\theta, \zeta$  имеют размерность  $L^{1/2}$ , а генераторы  $Q_\alpha — L^{-1/2}$  ( $L —$  длина).

**8.1.3. Преобразования суперполей.** Рассматриваемые поля  $\chi(x)$  зависели только от пространственно-временных координат (если отвлечься от «внешних» индексов — спинорных и тензорных). Суперполя, в отличие от обычных полей  $\chi(x)$ , зависят не только от пространственно-временных координат  $x^\mu$ , но и от грассмановых спинорных переменных  $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$  (если также отвлечься от индексов суперполя). Мы будем обозначать их через  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$ . Так как для грассмановых переменных  $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$  отличны от нуля только произведения (8.1.14), то суперполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  можно, очевидно, представить в виде

$$\begin{aligned} \chi(x, \theta, \bar{\theta}) = & A(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \bar{\varphi}_\alpha(x) \bar{\theta}^\alpha + (\theta\theta)F(x) + \\ & + (\bar{\theta}\bar{\theta})G(x) + \bar{\theta}\sigma^\mu\theta B_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\kappa}_\alpha(x)\bar{\theta}^\alpha + \\ & + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^\alpha\lambda_\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\mathcal{D}(x), \end{aligned} \quad (8.1.18)$$

где  $A, F, G, \mathcal{D}$  — скалярные поля;  $B_\mu$  — векторное поле;  $\psi, \bar{\varphi}, \bar{\kappa}, \lambda$  — спинорные поля. Таким образом, суперполе объединяет четыре скалярных поля ( $A, F, G, \mathcal{D}$ ), четыре спинорных поля ( $\psi, \bar{\varphi}, \bar{\kappa}, \lambda$ ) и одно векторное поле ( $B_\mu$ ).

Для простоты считаем, что суперполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  не «несет» внешних индексов (спинорных и тензорных; в этом случае в генераторе  $L_{\mu\nu}$  (8.1.17) можно отбросить слагаемое  $\Sigma_{\mu\nu}$ ; в общем случае девять полей  $A, \dots, \psi, \dots, B_\mu$  будут представлять собой поля, преобразующиеся как спиноры и тензоры высших рангов).

В отличие от обычных полей, которые зависят только от пространственно-временных координат  $x^\mu$ , суперполя зависят как от  $x^\mu$ , так и от грассмановых спинорных переменных  $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ . Поэтому мы будем говорить, что суперполе определено в суперпространстве [3, 4], образуемом восьмью переменными  $x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ .

Перейдем к выяснению законов преобразования суперполя при преобразованиях, связанных с генераторами  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, P_\mu, L_{\mu\nu}$ . Так как генераторы  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, P_\mu$  образуют замкнутую алгебру, то мы рассмотрим преобразования суперполей, связанных именно с этими генераторами. Генераторы  $P_\mu$  также образуют замкнутую алгебру и с этой алгеброй связан закон преобразования полей (суперполей)

$$\chi(x) \rightarrow \chi'(x'), \quad x \rightarrow x' = x + a,$$

где

$$\chi'(x) = \mathcal{S}(a)\chi(x) \equiv \chi(x-a), \quad \mathcal{S}(a) = \exp iP_\mu a^\mu,$$

который показывает, что при трансляциях пространства — времени поле (суперполе) преобразуется как скаляр.

Найдем теперь закон преобразования суперполей, связанный с алгеброй (8.1.4) генераторов  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, P_\mu$ . Рассмотрим с этой целью суперполе

$$\chi'(x, \theta, \bar{\theta}) = \mathcal{S}(\zeta, a)\chi(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (8.1.19)$$

получившееся из суперполя  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  в результате действия элемента группы  $\mathcal{S}(\zeta, a) \equiv \exp G(\zeta, a)$ , связанного с генераторами  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}, P_\mu$  (см. (8.1.6)). Формулу (8.1.19), очевидно, можно переписать в виде

$$\chi'(x, \theta, \bar{\theta}) = \mathcal{S}(\zeta, a)\chi(x, \theta, \bar{\theta})\mathcal{S}^{-1}(\zeta, a),$$

где оператор  $\mathcal{S}(\zeta, a)$  теперь действует на переменные, входящие как в  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$ , так и в  $\mathcal{S}^{-1}(\zeta, a)$ .

Используя формулу

$$e^G A e^{-G} = A + [G, A] + \frac{1}{2}[G, [G, A]] + \dots, \quad (8.1.20)$$

легко видеть, что

$$\mathcal{S}x\mathcal{S}^{-1} = x + [G, x] + \frac{1}{2}[G, [G, x]],$$

$$\mathcal{S}\theta\mathcal{S}^{-1} = \theta + [G, \theta], \quad \mathcal{S}\bar{\theta}\mathcal{S}^{-1} = \bar{\theta} + [G, \bar{\theta}],$$

где, согласно (8.1.16),

$$[G, x^\mu] = -a^\mu + i\bar{\theta}\sigma^\mu\zeta - i\bar{\zeta}\sigma^\mu\theta,$$

$$[G, [G, x^\mu]] = i\bar{\zeta}\sigma^\mu\zeta - i\bar{\zeta}\sigma^\mu\zeta = 0,$$

$$[G, \theta] = -\zeta, \quad [G, \bar{\theta}] = -\bar{\zeta}$$

(высшие коммутаторы в формуле для  $e^G A e^{-G}$ , очевидно, обращаются в нуль). Поэтому

$$\mathcal{S}x^\mu\mathcal{S} = x^\mu - a^\mu + i(\bar{\theta}\sigma^\mu\zeta - \bar{\zeta}\sigma^\mu\theta),$$

$$\mathcal{S}\theta\mathcal{S}^{-1} = \theta - \zeta, \quad \mathcal{S}\bar{\theta}\mathcal{S}^{-1} = \bar{\theta} - \bar{\zeta}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{S}(\zeta, a)\chi(x, \theta, \bar{\theta}) = \chi(x-a + i(\bar{\theta}\sigma\zeta - \bar{\zeta}\sigma\theta), \quad \theta - \zeta,$$

$$\bar{\theta} - \bar{\zeta}) \equiv \chi'(x, \theta, \bar{\theta}).$$

Из этой формулы следует, что суперполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  можно рассматривать как суперскаляр,

$$\chi(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \chi'(x', \theta', \bar{\theta}') = \chi(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (8.1.21)$$

если считать, что при суперпреобразованиях величины  $x, \theta, \bar{\theta}$  преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} x \rightarrow x' &= x + a - i(\bar{\theta}\sigma\xi - \bar{\xi}\sigma\theta), \\ \theta \rightarrow \theta' &= \theta + \xi, \quad \bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\xi}. \end{aligned} \quad (8.1.22)$$

Последние формулы показывают, что суперпреобразования переменных  $x, \theta, \bar{\theta}$  представляют собой согласованные преобразования смещения этих переменных.

Используя закон преобразования суперполя (8.1.21) и разложение (8.1.18), можно найти закон преобразования спинорных, скалярных и векторных полей, входящих в разложение (8.1.18). Мы вернемся к этому вопросу после нахождения неприводимого скалярного (по отношению к преобразованиям Лоренца) суперполя.

**8.1.4. Неприводимое скалярное суперполе.** В общем случае, как мы видели, суперполе содержит девять независимых полей, которые преобразуются друг через друга. Однако, как будет показано, можно построить суперполе с меньшим числом независимых компонент, которые также преобразуются друг через друга.

С этой целью введем операции ковариантного дифференцирования  $\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}$  по спинорным переменным, не меняющих характера преобразования суперполя при суперпреобразованиях.

Операторы  $\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}$  определяются следующим образом:

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\theta^\beta\sigma_{\beta\alpha}^\mu\partial_\mu, \quad \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\sigma_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}^\mu\partial_\mu. \quad (8.1.23)$$

Из определений (8.1.16) спинорных генераторов  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$  следует, что

$$\{\mathcal{D}_\alpha, Q_\beta\} = \{\mathcal{D}_\alpha, Q_{\dot{\beta}}\} = \{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, Q_{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (8.1.24)$$

Так как, с другой стороны, операторы  $\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}$  антикоммутируют с параметрами  $\xi^\alpha, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$ , то согласно определению (8.1.6) оператора  $\mathcal{S}$

$$[\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{S}] = [\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{S}] = 0. \quad (8.1.25)$$

Отсюда следует, что если  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  представляет собой суперполе, т. е. преобразуется по закону (8.1.21), то по такому

же закону будут преобразовываться и величины  $\mathcal{D}_\alpha\chi(x, \theta, \bar{\theta}), \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}\chi(x, \theta, \bar{\theta})$ , т. е. они будут суперполями. Если  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  скалярное (по отношению к преобразованиям Лоренца) суперполе, то поля  $\mathcal{D}_\alpha\chi(x, \theta, \bar{\theta}), \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  будут спинорными (по отношению к преобразованиям Лоренца) суперполями. Так как  $[\partial_\mu, \mathcal{S}] = 0$ , то поле  $\partial_\mu\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  также будет суперполем (векторным по отношению к преобразованиям Лоренца).

Отметим, что операции ковариантного спинорного дифференцирования удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям, как и генераторы  $Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}$ :

$$\{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta\} = \{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{D}_{\dot{\beta}}\} = 0, \quad \{\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\beta\alpha}^\mu P_\mu. \quad (8.1.26)$$

Чтобы суперполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  было неприводимым необходимо потребовать выполнения соотношения

$$\mathcal{D}_\alpha\chi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad (8.1.27)$$

либо соотношения

$$\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}\chi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0. \quad (8.1.28)$$

Так как из (8.1.27) следует, что  $\mathcal{D}_\alpha\chi'(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$ , а из (8.1.28), что  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}\chi'(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$ , то соотношения (8.1.27), (8.1.28) выделяют из пространства суперполей, содержащих девять независимых полей (см. (8.1.18)), инвариантные подпространства, содержащие меньшее число независимых суперполей (как мы увидим, число их равно трем).

Для исследования уравнений (8.1.27), (8.1.28) удобно перейти к новому представлению суперполей:

$$\chi_\pm(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{\mp i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu}\chi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (8.1.29)$$

(эти представления мы будем называть  $+$  и  $-$  представлениями). Операторы  $A_+$  и  $A_-$  в представлениях  $+$  и  $-$  связаны с оператором  $A$  в исходном представлении формулой

$$A_\pm = e^{\mp i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu} A e^{\pm i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu}. \quad (8.1.29')$$

Найдем операторы  $\mathcal{D}_\alpha^\pm, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}^\pm, Q_\alpha^\pm, Q_{\dot{\alpha}}^\pm$ . Заметим с этой целью, что

$$[\mathcal{D}_\alpha, \bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu] = i[Q_\alpha, \bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu] = -(\bar{\theta}\sigma^\mu)_\alpha\partial_\mu,$$

$$[\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu] = i[Q_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu] = -(\sigma^\mu\bar{\theta})_{\dot{\alpha}}\partial_\mu.$$

Поэтому, используя формулу (8.1.20), получаем следующие выражения для операторов  $\mathcal{D}$  и  $Q$  в  $+$  представлении:

$$\mathcal{D}_\alpha^+ = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - 2i (\bar{\theta} \sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu, \quad \mathcal{D}_\alpha^+ = -\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \quad (8.1.30)$$

$$Q_\alpha^+ = -i \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \quad Q_\alpha^+ = i \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - 2 (\sigma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu$$

и выражения

$$\mathcal{D}_\alpha^- = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, \quad \mathcal{D}_\alpha^- = -\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2i (\sigma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, \quad (8.1.31)$$

$$Q_\alpha^- = -i \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + 2 (\bar{\theta} \sigma^\mu)_\alpha \partial_\mu, \quad Q_\alpha^- = i \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}$$

для операторов  $\mathcal{D}$  и  $Q$  в  $-$  представлении.

Согласно формулам (8.1.29), (8.1.19), суперполя  $\chi_+$  и  $\chi_-$  в представлениях  $+$  и  $-$  преобразуются по формулам

$$\chi'_\pm = \mathcal{S}_\pm \chi_\pm, \quad \mathcal{S}_\pm = \exp G_\pm, \quad (8.1.32)$$

где

$$G_\pm = i(Q^\pm \zeta + \bar{\zeta} \bar{Q}^\pm + a^\mu P_\mu).$$

Как и при выводе формулы (8.1.21), легко показать, что этот закон преобразования можно представить в виде

$$\chi_+(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \chi'_+(x', \theta', \bar{\theta}') = \chi_+(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (8.1.33)$$

где

$$x' = x + a + 2i \bar{\zeta} \sigma \theta + i \bar{\zeta} \sigma \zeta, \quad \theta' = \theta + \zeta, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\zeta}$$

и

$$\chi_-(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \chi'_-(x', \theta', \bar{\theta}') = \chi_-(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (8.1.34)$$

где

$$x' = x + a - 2i \bar{\theta} \sigma \zeta - i \bar{\zeta} \sigma \zeta, \quad \theta' = \theta + \zeta, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\zeta}.$$

Уравнение (8.1.27), согласно (8.1.31), приобретает простой вид в  $-$  представлении:

$$\mathcal{D}_\alpha^- \chi_- = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \chi_- = 0,$$

откуда следует, что  $\chi_-$  не зависит от  $\theta$ , т. е. имеет следующую структуру:

$$\chi_-(x, \bar{\theta}) = A_-(x) + \psi_{-\alpha}(x) \bar{\theta}^\alpha + (\bar{\theta}^\alpha \theta_\alpha) F_-(x). \quad (8.1.35)$$

Мы видим, что суперполе  $\chi_-(x, \bar{\theta})$ , соответствующее условию (8.1.27), определяется тремя независимыми полями  $A_-$ ,  $F_-$ ,  $\psi_-$  — двумя скалярными и одним спинорным. В исходном представлении полю  $\chi_-(x, \bar{\theta})$  соответствует поле

$$\begin{aligned} \chi_-(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-i \bar{\theta} \sigma^\mu \theta \partial_\mu} \chi_-(x, \bar{\theta}) = & A_-(x) + \bar{\psi}_-(x) \bar{\theta} + \\ & + (\bar{\theta} \bar{\theta}) F_-(x) - i \bar{\theta} \sigma^\mu \theta \partial_\mu A_-(x) + \frac{i}{2} (\bar{\theta} \bar{\theta}) \partial_\mu \bar{\psi}_-(x) \sigma^\mu \theta + \\ & + \frac{1}{4} (\theta \theta) (\bar{\theta} \bar{\theta}) \partial_\mu \partial^\mu A_-(x), \quad (8.1.35') \end{aligned}$$

удовлетворяющее соотношению  $\mathcal{D}_\alpha^- \chi_- = 0$  (мы учли, что, согласно (8.1.13)  $(\bar{\theta} \sigma^\mu \theta) \bar{\theta}^\rho = -\frac{1}{2} (\bar{\theta} \bar{\theta}) (\sigma^\mu \theta)^\rho$ ). Суперполе  $\chi_-(x, \bar{\theta})$  в  $-$  представлении (или соответствующее ему суперполе  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  в исходном представлении) является неприводимым суперполем.

Аналогичным образом уравнение (8.1.28), согласно (8.1.30), приобретает простой вид в  $+$  представлении

$$\mathcal{D}_\alpha^+ \chi_+ = -\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \chi_+ = 0,$$

откуда следует, что суперполе  $\chi_+$  не зависит от  $\bar{\theta}$ , т. е. имеет структуру

$$\chi_+(x, \theta) = A_+(x) + \theta^\alpha \psi_{+\alpha}(x) + (\theta^\alpha \theta_\alpha) F_+(x). \quad (8.1.36)$$

В исходном представлении полю  $\chi_+(x, \theta)$  соответствует поле

$$\begin{aligned} \chi_+(x, \theta, \bar{\theta}) = & A_+(x) + \theta^\alpha \psi_{+\alpha}(x) + (\theta^\alpha \theta_\alpha) F_+(x) - \\ & - i \bar{\theta} \sigma^\mu \theta \partial_\mu A_+(x) - \frac{i}{2} (\theta \theta) \bar{\theta} \sigma^\mu \partial_\mu \psi_+(x) + \\ & + \frac{1}{4} (\theta \theta) (\bar{\theta} \bar{\theta}) \partial_\mu \partial^\mu A_+(x), \quad (8.1.36') \end{aligned}$$

удовлетворяющее уравнению  $\mathcal{D}_\alpha^+ \chi_+ = 0$ . Это суперполе также является неприводимым.

Суперполе  $\chi_+(x, \theta)$  (или суперполе (8.1.36')), зависящее от  $\theta$  и  $\bar{\theta}$  и суперполе  $\chi_-(x, \bar{\theta})$  (или суперполе (8.1.35')), зависящее от  $\theta$  и  $\bar{\theta}$  называются киральными скалярными (по отношению к преобразованиям Лоренца) суперполями.

Найдем теперь закон преобразования полей  $A$ ,  $\psi$ ,  $F$  при суперпреобразованиях. Вариация суперполя  $\chi_+(x, \theta)$ , связанная с бесконечно малыми суперпреобразованиями, определяется, согласно (8.1.32), формулой

$$\delta \chi_+(x, \theta) = i(Q^+ \zeta + \bar{\zeta} Q^+) \chi_+(x, \theta),$$



где  $\xi, \bar{\xi}$  — бесконечно малые грассмановы параметры (мы положили  $a^\mu = 0$ ). Используя выражения (8.1.30) для генераторов  $Q^+, \bar{Q}^+$ , получаем

$$\delta\chi_+(x, \theta) = -\xi^\alpha\psi_\alpha - \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta\theta)F - 2i\bar{\xi}\sigma^{\mu\theta}\partial_\mu A - \\ - 2i\bar{\xi}\sigma^{\mu\theta\theta}\partial_\mu\psi_\alpha$$

(мы опустили индекс  $+$  у полей  $A, \psi, F$ ). Замечая далее, что

$$\xi^\alpha \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta\theta) = -2\theta_\alpha\xi^\alpha, \quad \bar{\xi}\sigma^{\mu\theta\theta}\partial_\mu\psi_\alpha = \frac{1}{2}(\theta\theta)\bar{\xi}\sigma^\mu\partial_\mu\psi,$$

находим

$$\delta\chi_+(x, \theta) = -\xi^\alpha\psi_\alpha - 2\xi^\alpha\theta_\alpha F - 2i\bar{\xi}\sigma^{\mu\theta}\partial_\mu A - i\bar{\xi}\sigma^\mu\partial_\mu\psi(\theta\theta).$$

Так как, согласно (8.1.36),

$$\delta\chi_+(x, \theta) = \delta A(x) + \theta^\alpha\delta\psi_\alpha(x) + (\theta\theta)\delta F(x),$$

то для вариаций полей

$$\delta A(x) = A'(x) - A(x), \quad \delta\psi(x) = \psi'(x) - \psi(x), \\ \delta F(x) = F'(x) - F(x),$$

получим следующие выражения:

$$\delta A(x) = -\xi^\alpha\psi_\alpha(x), \quad \delta F(x) = -i\bar{\xi}\sigma^\mu\partial_\mu\psi(x), \\ \delta\psi_\alpha(x) = 2i(\bar{\xi}\sigma^\mu)_\alpha\partial_\mu A(x) - 2\xi_\alpha F(x). \quad (8.1.37)$$

Аналогичные формулы справедливы и для вариаций полей  $A_-, \psi_-, F_-$  (мы не будем их здесь выписывать).

Заметим в заключение этого раздела, что так как  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$ , то, согласно (8.1.19), величина  $\chi^*(x, \theta, \bar{\theta})$  будет при суперпреобразованиях преобразовываться как и  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$ , т. е. будет представлять собой суперполе. Иная ситуация возникает в  $+$  и  $-$  представлениях. Действительно, поскольку, согласно (8.1.30), (8.1.31),

$$\mathcal{G}_+^* = \mathcal{G}_-, \quad (8.1.38)$$

то из (8.1.32) следует, что величина  $\chi_+^*(x, \theta, \bar{\theta})$  будет преобразовываться как суперполе в  $-$  представлении, а величина  $\chi_-^*(x, \theta, \bar{\theta})$  — как суперполе в  $+$  представлении. Согласно (8.1.29'),

$$\mathcal{G}_- = e^{2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta}\partial_\mu}\mathcal{G}_+e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta}\partial_\mu},$$

поэтому величины

$$\bar{\chi}_+ = e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta}\partial_\mu}\bar{\chi}_+^*, \quad \bar{\chi}_- = e^{2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta}\partial_\mu}\bar{\chi}_-^* \quad (8.1.39)$$

будут преобразовываться как суперполя в  $+$  и  $-$  представлениях, т. е.

$$\bar{\chi}'_+ = \mathcal{G}_+\bar{\chi}_+, \quad \bar{\chi}'_- = \mathcal{G}_-\bar{\chi}_-. \quad (8.1.40)$$

Заметим, наконец, что произведение суперполей в одном и том же представлении снова является суперполем в том же представлении.

## § 8.2. Суперполя с внутренними симметриями и калибровочные суперполя

**8.2.1. Суперполя с внутренней симметрией.** Суперполя, как и обычные физические поля, могут обладать внутренней симметрией. В этом случае суперполе  $\chi$  и его компоненты  $A, F, \psi$  (в случае неприводимого скалярного суперполя) характеризуются добавочным индексом  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\chi = \chi_i, A = A_i, \dots$ , с которым связано некоторое преобразование внутренней симметрии. Именно при преобразованиях внутренней симметрии эти поля преобразуются следующим образом:

$$\chi_i \rightarrow \chi'_i = U_{ij}\chi_j, \quad (8.2.1)$$

где  $U$  — унитарная матрица с  $\det U = 1$ , соответствующая группе  $SU(n)$ . Эта матрица может быть представлена в виде

$$U = e^{-i\Lambda}, \quad (8.2.2)$$

причем матричные элементы эрмитовой матрицы  $\Lambda$  имеют вид

$$\Lambda_{ij} = (T_a)_{ij}\Lambda_a, \quad (8.2.2')$$

где  $\Lambda_a$  ( $a = 1, 2, \dots, n^2 - 1$ ) — некоторые числа и  $T_a$  — генераторы группы  $SU(n)$ , удовлетворяющие соотношениям

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad \text{tr } T_a T_b = 2\delta_{ab}.$$

Сопряженное суперполе с внутренней симметрией  $\chi_i^*$  преобразуется по закону

$$\chi_i^* \rightarrow \chi_i'^* = \chi_i^* U_{ji}^\dagger. \quad (8.2.1')$$

В частности, группа  $SU(n)$  может вырождаться в группу  $U(1)$ . В этом случае суперполя также могут нести некоторый индекс  $i$  и преобразовываться по этому индексу по закону

$$\chi_i \rightarrow \chi'_i = e^{-i\lambda t_i}\chi_i, \quad (8.2.3)$$

где  $\lambda$  — некоторое число и  $t_i$  — фиксированные «заряды». Мы видим, что в этом случае преобразования внутренней симметрии сводятся к фазовым преобразованиям для различных компонент поля. Фазовые преобразования различных компо-

нент поля  $\chi$  характеризуются одним и тем же параметром  $\lambda$ , но различными «зарядами»  $t_i$ .

Отметим, что в случае суперполей внутреннюю симметрию можно вводить также путем дальнейшего расширения группы Пуанкаре. Следует считать, что спиновые генераторы  $Q_\alpha$ ,  $Q'_\alpha$  могут зависеть от некоторого индекса  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), так что коммутационные соотношения (8.1.4) заменяются соотношениями

$$\begin{aligned} [Q'_\alpha, P_\mu] = [Q_\alpha, P_\mu] = 0, \quad \{Q'_\alpha, Q'_\beta\} = \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \\ \{Q'_\alpha, Q'_\beta\} = 2\delta_{i\beta\alpha} P_\mu. \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

Эти соотношения инвариантны по отношению к преобразованиям группы  $SU(N)$

$$Q'_\alpha \rightarrow Q'_\alpha = U_{ij} Q'_\alpha, \quad Q'_\alpha \rightarrow Q'_\alpha = Q'_\alpha U_{ji}^\dagger.$$

В этом случае координатами суперпространства будут переменные  $x^\mu$  и грассмановы переменные  $\theta'_\alpha, \theta'_\alpha$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Соответственно этому компоненты суперполя будут содержать индекс  $i$  и преобразовываться по этому индексу по представлению группы  $SU(N)$ . Таким образом, расширение суперпространства позволяет ввести внутренние симметрии, связанные с этим суперпространством. Если же потребовать, чтобы спин частиц не превосходил двух (спин два соответствует гравитону), то в случае неприводимого кирального суперполя должно выполняться неравенство  $N \leq 8$ . Этот способ введения внутренней симметрии суперполей играет важную роль в теории супергравитации.

**8.2.2. Лагранжиан и уравнения движения суперполя.** Наша дальнейшая задача будет заключаться в установлении уравнений движения для неприводимых киральных суперполей  $\chi_{+i}(x, \theta, \bar{\theta}) \equiv \chi_i(x, \theta, \bar{\theta})$  (в дальнейшем мы опускаем индекс  $+$ , указывающий, что поля  $\chi_i$  удовлетворяют условию (8.1.28)). С этой целью мы построим лагранжиан суперполя, который должен зависеть от «реальных» полей  $A_i, \psi_i, F_i$ , причем он должен содержать только первые производные этих полей по координатам  $x^\mu$ . Мы потребуем, чтобы уравнение поля для  $\psi_i$  было первого порядка. Поэтому в лагранжиане производные  $\partial_\mu \psi_i$  должны входить линейно.

Чтобы установить структуру лагранжиана  $\mathcal{L}(A, \psi, F)$ , инвариантного по отношению к суперпреобразованиям (8.1.19) (8.1.37), заметим предварительно, что для любого кирального суперполя  $\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta})$  в исходном представлении слагаемое, содержащее максимальное число грассмановых переменных  $\theta, \bar{\theta}$ , т. е. слагаемое  $(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\theta)\mathcal{D}(x)$ , преобразуется при

суперпреобразовании как

$$\delta\mathcal{D}(x) = \partial_\mu \mathcal{P}_\theta^{(4)}(-2i\bar{\zeta}\sigma^\mu\theta)\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}),$$

где

$$\mathcal{P}_\theta^{(4)} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\beta} \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\beta}. \quad (8.2.5)$$

Таким образом,  $\delta\mathcal{D}(x)$  представляет собой дивергенцию некоторого векторного поля. Эта формула вытекает из закона преобразования суперполя  $\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta})$ :

$$\begin{aligned} \delta\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}) = G_+\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}) = \\ = i\left(-i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\zeta^\alpha + i\bar{\zeta}^\alpha\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} - 2\bar{\zeta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu\right)\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}) \end{aligned}$$

и того, что

$$\mathcal{D}(x) = \mathcal{P}_\theta^{(4)}\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}).$$

В случае кирального суперполя  $\Phi_+(x, \theta)$  в  $+$  представлении слагаемое  $(\theta\theta)\mathcal{F}(x)$ , содержащее максимальное число переменных  $\theta$ , преобразуется при суперпреобразованиях по формуле

$$\delta\mathcal{F}(x) = \partial_\mu \mathcal{P}_\theta^{(2)}(-2i\bar{\zeta}\sigma^\mu\theta)\Phi_+(x, \theta),$$

где

$$\mathcal{P}_\theta^{(2)} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad (8.2.6)$$

т. е.  $\delta\mathcal{F}(x)$  также представляет собой дивергенцию некоторого векторного поля.

Исходя из этого, при построении суперинвариантного лагранжиана  $\mathcal{L}(\psi, A, F)$  мы должны образовать различные комбинации (билинейные и более высокого порядка) киральных суперполей  $\chi_i(x, \theta, \bar{\theta})$  и выделить в них члены, содержащие максимальное число переменных  $\theta, \bar{\theta}$ . Сумма таких комбинаций и может быть принята в качестве лагранжиана  $\mathcal{L}(\psi_i, A_i, F_i)$  суперполя  $\chi_i(x, \theta, \bar{\theta})$ , так как при суперпреобразованиях лагранжиан  $\mathcal{L}$  будет преобразовываться по формуле

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu B^\mu$$

( $B^\mu$  — некоторый 4-вектор) и, следовательно, он будет приводить к суперинвариантным уравнениям движения.

Переходя к конкретному построению суперинвариантного лагранжиана, напомним, что киральное суперполе  $\chi_i(x, \theta, \bar{\theta})$  в исходном представлении, удовлетворяющее уравнению

$$\mathcal{D}_\alpha \chi_i = 0,$$

имеет следующее покомпонентное разложение

$$\begin{aligned} \chi_i(x, \theta, \bar{\theta}) &= A_i(x) + \theta^\alpha \psi_{i\alpha}(x) + (\theta^\alpha \theta_\alpha) F_i(x) - \\ &- i\bar{\theta}\sigma^\mu \theta \partial_\mu A_i(x) - \frac{i}{2} (\theta\theta) \bar{\theta}\sigma^\mu \partial_\mu \psi_i(x) + \frac{1}{4} (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \partial_\mu \partial^\mu A_i(x). \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

Билинейная комбинация  $\chi_i^* \chi_i$  является общим суперполем, но не является киральным суперполем (т. е. не удовлетворяет уравнению  $\mathcal{D}_\alpha^+ \chi_i^* \chi_i = 0$ ). Компонента этого суперполя, соответствующая максимальному количеству переменных  $\theta, \bar{\theta}$ , т. е. величина

$$(\chi_i^* \chi_i)_{\bar{\theta}\theta\theta\theta} \equiv \mathcal{P}_\theta^{(4)} \chi_i^* \chi_i, \quad (8.2.8)$$

может быть взята в качестве части лагранжиана, содержащей производные полей  $A, \psi, F$ , причем производные полей  $\psi, \bar{\psi}$  в эту комбинацию входят линейно. Выражение (8.2.8) инвариантно относительно преобразований группы  $SU(n)$ . Чтобы построить массовые члены лагранжиана и члены, связанные с взаимодействием полей, удобно исходить из + представления киральных суперполей

$$\begin{aligned} \chi_{i+}(x, \theta) &= A_i(x) + \theta^\alpha \psi_{i\alpha}(x) + (\theta^\alpha \theta_\alpha) F_i(x), \\ \mathcal{D}_\alpha^+ \chi_{i+}(x, \theta) &= 0, \end{aligned} \quad (8.2.7')$$

так как в этом представлении не содержатся производные полей  $A, \psi, F$ . Тогда комбинации

$$\lambda_i \chi_{i+}, \quad \frac{1}{2} m_{ij} \chi_{i+} \chi_{j+}, \quad \frac{1}{3} g_{ijk} \chi_{i+} \chi_{j+} \chi_{k+}$$

также будут являться киральными суперполями в + представлении, следовательно, их  $\theta\theta$  компоненты также могут быть взяты в качестве суперсимметричной части лагранжиана, описывающей массовые члены и взаимодействие; величины  $\lambda, m_{ij}, g_{ijk}$  представляют собой некоторые константы, зависящие от индекса  $i$ . Массовая матрица  $m_{ij}$  и константы взаимодействия  $g_{ijk}$  должны быть полностью симметричными и инвариантными относительно преобразований внутренней симметрии. Заметим, что, согласно (8.1.29), кинетический член лагранжиана (8.2.8) в терминах суперполей в + представлении может быть представлен в виде

$$(\chi_i^* \chi_i)_{\bar{\theta}\theta\theta\theta} = (\chi_{i+}^* e^{2i\bar{\theta}\sigma^\mu \theta \partial_\mu} \chi_{i+})_{\bar{\theta}\theta\theta\theta} \quad (8.2.8')$$

(в правой части этого соотношения опущены члены, имеющие вид дивергенции).

Таким образом, суперинвариантный лагранжиан  $\mathcal{L}$  полей  $\bar{\psi}, F$ , входящих в суперполе  $\chi_{i+}$  (или  $\chi_i$ ), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_i (\chi_{i+}^* e^{2i\bar{\theta}\sigma^\mu \theta \partial_\mu} \chi_{i+})_{\bar{\theta}\theta\theta\theta} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \chi_{i+} \chi_{j+} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} \sum_{ijk} g_{ijk} \chi_{i+} \chi_{j+} \chi_{k+} \right\}_{\theta\theta} + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Модель, основанная на этом лагранжиане, носит название модели Весса — Зумино [8]. Обратим внимание на то, что константы  $g_{ijk}$ , определяющие взаимодействие третьего порядка, безразмерны (комбинации более высокого порядка чем третья будут связаны с размерными константами взаимодействия).

В лагранжиан (8.2.9) входят дифференциальные операторы  $\mathcal{P}_\theta^{(2)}, \mathcal{P}_\theta^{(4)}$  по грассмановым переменным. Эти операции грассманова дифференцирования можно заменить на операции грассманова интегрирования (см. § 1.2), если воспользоваться следующими формулами:

$$\int d\theta_\alpha f(\theta, \bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} f(\theta, \bar{\theta}), \quad \int d\bar{\theta}_\alpha f(\theta, \bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} f(\theta, \bar{\theta}),$$

означающими, что интегрирование по грассмановым переменным эквивалентно дифференцированию. В частности,

$$\int d\theta_\alpha = 0, \quad \int d\theta_\beta \theta^\alpha = \delta_\beta^\alpha.$$

Так как произведение двух и большего числа грассмановых переменных  $\theta^\alpha$  ( $\bar{\theta}^\alpha$ ) с одним и тем же индексом равно нулю, то последние две формулы могут также служить для общего определения интеграла. Кратные интегралы по  $\theta$  подразумеваются как повторные интегралы

$$\begin{aligned} \int d\theta_1 d\theta_2 f(\theta, \bar{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} f(\theta, \bar{\theta}) = \mathcal{P}_\theta^{(2)} f(\theta, \bar{\theta}), \\ \int d\theta_1 d\theta_2 d\bar{\theta}_1 d\bar{\theta}_2 f(\theta, \bar{\theta}) &= \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^1} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^2} f(\theta, \bar{\theta}) = \mathcal{P}_\theta^{(4)} f(\theta, \bar{\theta}), \end{aligned} \quad (8.2.10)$$

где  $d\theta_\alpha, d\bar{\theta}_\alpha$  — антикоммутирующие между собой грассмановы дифференциалы, в силу чего

$$d\theta_1 d\theta_2 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} d\theta_\alpha d\theta_\beta \equiv d^2\theta,$$

$$d\bar{\theta}_1 d\bar{\theta}_2 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \equiv d^2\bar{\theta}.$$

Мы будем использовать также обозначение  $d^4\theta \equiv d^2\theta d^2\bar{\theta}$ . Используя эти формулы, можно действие представить в виде

интеграла по суперпространству  $x, \theta, \bar{\theta}$ :

$$\begin{aligned} W &= W_K + W_m + W_{\text{int}}, \\ W_K &= -\frac{1}{2} \int d^4x d^4\theta \chi_+(x, \theta) e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta\theta}\mu\chi_+^*(x, \theta)}, \\ W_m &= \frac{m}{4} \int d^4x d^4\theta \{(\bar{\theta}\bar{\theta})\chi_+^2(x, \theta) - (\theta\theta)\chi_+^{*2}(x, \theta)\}, \\ W_{\text{int}} &= \frac{g}{3} \int d^4x d^4\theta \{(\bar{\theta}\bar{\theta})\chi_+^3(x, \theta) - (\theta\theta)\chi_+^{*3}(x, \theta)\} \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

(мы в дальнейшем в этом разделе рассматриваем суперполя без внутренних симметрий, т. е. опускаем индекс  $i$ ). Первые два слагаемых определяют действие для свободного суперполя, а третье — описывает взаимодействие между полями  $A, \psi, F$ .

Чтобы найти уравнения движения суперполя, определим вариацию действия  $W$  по суперполю  $\chi_+$  (вариация по  $\chi_+^*$  приводит к сопряженным уравнениям поля):

$$\begin{aligned} \delta W &= \int d^4x d^4\theta \delta\chi_+(x, \theta) \left\{ \frac{m}{2} (\bar{\theta}\bar{\theta})\chi_+(x, \theta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta\theta}\mu\chi_+^*(x, \theta)} + g (\bar{\theta}\bar{\theta})\chi_+^2(x, \theta) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\delta\chi_+(x, \theta)$  — произвольная функция  $x$  и  $\theta$ , то уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \int d^2\bar{\theta} \left\{ \frac{m}{2} (\bar{\theta}\bar{\theta})\chi_+(x, \theta) - \frac{1}{2} e^{-2i\bar{\theta}\sigma^{\mu\theta\theta}\mu\chi_+^*(x, \theta)} + \right. \\ \left. + g (\bar{\theta}\bar{\theta})\chi_+^2(x, \theta) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование по  $\bar{\theta}$ , получим

$$\frac{1}{4} \mathcal{D}_{\alpha}^{-} \mathcal{D}^{-\alpha} \chi_+(x, \theta, \bar{\theta}) = m\chi_+(x, \theta) + 2g\chi_+^2(x, \theta). \quad (8.2.12)$$

Мы учли при этом, что, согласно (8.1.31),  $\frac{\partial}{\partial\theta^1} \frac{\partial}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_{\alpha}^{-} \mathcal{D}^{-\alpha}$  и использовали определение (8.1.38) суперполя  $\chi_+(x, \theta, \bar{\theta})$ . В это уравнение входят ковариантные производные от суперполя  $\chi_+$  и поэтому уравнения движения имеют явно ковариантный вид.

Получим теперь уравнения движения для полей  $A, \psi, F$  входящих в суперполе  $\chi_+(x, \theta)$ . Используя (8.1.38), (8.1.36), получаем из (8.1.45) уравнения

$$\begin{aligned} i\partial_{\mu}\bar{\psi}\sigma^{\mu} - m\psi = 4gA\psi, \quad \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^* = mF + 4gAF - g(\psi\psi), \\ F^* = -mA - 2gA^2 \end{aligned} \quad (8.2.13)$$

и комплексно сопряженные им уравнения

$$\begin{aligned} -i\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi} = 4gA^*\psi, \\ \partial_{\mu}\partial^{\mu}A = mF^* + 4gA^*F^* + g(\bar{\psi}\bar{\psi}), \\ F = -mA^* - 2gA^{*2}. \end{aligned} \quad (8.2.13')$$

Последние уравнения в (8.2.13), (8.2.13') представляют собой уравнения связи. Для свободного поля ( $g = 0$ ) уравнения (1.7.46) приобретают вид

$$i\partial_{\mu}\bar{\psi}\sigma^{\mu} - m\psi = 0, \quad \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^* = mF, \quad F^* = -mA. \quad (8.2.14)$$

Первое уравнение представляет собой уравнение движения для майорановского спинора  $\psi$  ( $\bar{\psi}$ ) (см. (2.8.40)), а второе и третье уравнение приводит к уравнению Клейна — Гордона (2.1.3) для скалярного комплексного поля  $A$ .

Уравнения (8.2.13) могут быть непосредственно получены из лагранжиана (8.2.11), если в последнем выполнить дифференцирование по  $\theta, \bar{\theta}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 2\partial_{\mu}A\partial^{\mu}A^* + 2m(AF + A^*F^*) + 2FF^* - \frac{i}{2} \partial_{\mu}\bar{\psi}\sigma^{\mu}\psi + \\ &\quad + \frac{i}{2} \bar{\psi}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{m}{2}(\psi\psi) + \frac{m}{2}(\bar{\psi}\bar{\psi}) + \\ &\quad + 2g(2A^2F + 2A^{*2}F^* - A(\psi\psi) + A^*(\bar{\psi}\bar{\psi})). \end{aligned} \quad (8.2.15)$$

Рассмотренный пример лагранжиана скалярного кирального суперполя  $\chi_+(x, \theta)$  показывает, что требование суперинвариантности приводит не только к объединению спинорного и скалярного поля в единое суперполе, но и к тому, что самодействие скалярного поля и взаимодействие скалярного поля со спинорным описывается одной и той же безразмерной константой взаимодействия, причем массы частиц скалярных и фермионных полей совпадают.

**8.2.3. Абельевы калибровочные суперполя.** Лагранжиан (8.2.9) инвариантен относительно преобразований суперсимметрии. Теперь мы потребуем, чтобы лагранжиан (8.2.9) был инвариантен также по отношению к преобразованиям (8.2.3) группы  $U(1)$

$$\chi_i \rightarrow \chi'_i = e^{-it_i}\chi_i.$$

В этом случае постоянные  $m_{ij}, g_{ijk}, \lambda_i$  отличны от нуля только тогда, когда выполняются соответственно условия  $t_i + t_j = 0, t_i + t_j + t_k = 0, t_i = 0$ .

Теперь мы хотим построить лагранжиан, инвариантный относительно преобразований (8.2.3), в которых величина  $\lambda$

представляет собой не константу, а функцию переменных  $x$ ,  $\theta$ ,  $\bar{\theta}$ , т. е. представляет собой суперполе. Если поля  $\chi_i$  являются киральными, то и суперполе  $\lambda$  также должно быть киральным для того, чтобы сохранилась киральность преобразованного суперполя. Киральное суперполе  $\lambda$  мы будем обозначать через  $\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})$ . Таким образом, мы требуем инвариантности лагранжиана по отношению к локальной группе  $U(1)$

$$\chi_i \rightarrow \chi'_i = e^{-it_i \Lambda} \chi_i, \quad \chi_i^* \rightarrow \chi_i'^* = e^{it_i \Lambda^*} \chi_i^*, \quad (8.2.16)$$

где поле  $\Lambda$  удовлетворяет уравнениям

$$\partial_\alpha \Lambda = 0, \quad \partial_\alpha \Lambda^* = 0. \quad (8.2.16')$$

Киральное суперполе  $\Lambda$ , согласно (8.1.36'), определяется двумя скалярными функциями  $a$ ,  $f$  и одной спинорной функцией  $\varphi$ :

$$\Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) = a(x) + \theta^\alpha \varphi_\alpha(x) + (\theta\theta)f(x) - i\bar{\theta}\sigma^{\mu\nu}\theta \partial_\mu a(x) - \\ - \frac{i}{2}(\theta\theta)\bar{\theta}\sigma^\mu \partial_\mu \varphi(x) + \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu \partial^\mu a(x). \quad (8.2.17)$$

Лагранжиан (8.2.9) сам по себе, очевидно, неинвариантен по отношению к локальным преобразованиям  $U(1)$  (8.2.16). Чтобы такая инвариантность имела место, необходимо ввести добавочное калибровочное суперполе. Мы покажем, что это калибровочное суперполе должно быть общим скалярным вещественным суперполем, которое обозначим через  $V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^*(x, \theta, \bar{\theta})$ . Покомпонентное его представление имеет вид (см. (8.1.18))

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = C(x) + i\theta\eta(x) + i\bar{\theta}\bar{\eta}(x) + \frac{i}{2}(\theta\theta)(M(x) + iN(x)) + \\ + \frac{i}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(M(x) - iN(x)) - \bar{\theta}\sigma^\mu\theta v_\mu(x) + \\ + i(\theta\theta)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}(x) - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\eta(x) + i(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(\lambda(x) + \frac{i}{2}\partial_\mu\eta(x)\sigma^\mu\right)\theta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(\varphi(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C(x)\right)\right), \quad (8.2.18)$$

где функции  $C(x)$ ,  $M(x)$ ,  $N(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $v_\mu(x)$  представляют собой вещественные скалярные и векторное калибровочные поля, а грассмановы функции  $\eta_\alpha(x)$ ,  $\lambda_\alpha(x)$  — спинорные калибровочные поля.

Мы потребуем, чтобы суперполе  $V$  при калибровочных преобразованиях (8.2.16), характеризуемых киральным супер-

полем  $\Lambda$ , преобразовывалось по закону

$$V \rightarrow V' + i\Lambda - i\Lambda^*. \quad (8.2.19)$$

Покажем, как нужно видоизменить лагранжиан (8.2.9), т. е. ввести взаимодействие с калибровочным суперполем  $V$ , чтобы получить калибровочно инвариантный относительно преобразований (8.2.16), (8.2.19) лагранжиан. Легко видеть, что массовые члены и члены взаимодействия сами по себе инвариантны относительно этих преобразований. Поэтому, как и в обычной калибровочной теории, необходимо модифицировать только кинетический член  $(\chi_i^* \chi_i)_{\bar{\theta}\theta\theta\theta}$ . Модификация сводится к замене

$$\chi_i^* \chi_i \rightarrow \chi_i^* e^{it_i V} \chi_i. \quad (8.2.20)$$

В этом случае, согласно (8.2.16), (8.2.19), модифицированный кинетический член будет инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований. Таким образом, калибровочно инвариантный лагранжиан суперполей  $\chi_i$ , учитывающий взаимодействие этих полей с калибровочным суперполем  $V$ , имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_i (\chi_i^* e^{it_i V} \chi_i)_{\bar{\theta}\theta\theta\theta} + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \chi_i \chi_j + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sum_{ijk} g_{ijk} \chi_i \chi_j \chi_k \right\}_{\theta\theta} + \text{к. с.} \quad (8.2.21)$$

Обратим внимание на то, что в обычной калибровочной теории калибровочное поле представляет собой 4-вектор. В данном же случае калибровочное суперполе представляет собой суперскаляр. Чтобы установить соответствие с обычной калибровочной теорией, найдем закон преобразования компонент суперполя  $V$  при калибровочных преобразованиях (8.2.19). Согласно (8.2.17), (8.2.18), (8.2.19), имеем

$$C \rightarrow C' = C + i(a - a^*), \quad v_\mu \rightarrow v'_\mu = v_\mu - \partial_\mu(a + a^*), \\ \eta \rightarrow \eta' = \eta + \varphi, \quad \lambda \rightarrow \lambda' = \lambda,$$

$$M + iN \rightarrow M' + iN' = M + iN + 2f, \quad \vartheta \rightarrow \vartheta' = \vartheta. \quad (8.2.22)$$

Мы видим, что векторное поле  $v_\mu$  при преобразованиях (8.2.19) преобразуется как обычное абелево калибровочное поле (как 4-потенциал электромагнитного поля).

Из формул (8.2.22) следует, что можно так подобрать поля  $a$ ,  $f$ ,  $\varphi$ , чтобы обратить в нуль компоненты  $C$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\eta$  калибровочного суперполя  $V$ . В этой калибровке (она называется калибровкой Весса — Зумино) суперполе  $V$  характеризуется двумя калибровочно инвариантными полями  $\lambda$ ,  $\vartheta$  (поле  $\lambda$  — спинорное, а поле  $\vartheta$  — скалярное) и одним векторным полем

$v_\mu$  (аналогичным 4-потенциалу электромагнитного поля)

$$V = -\bar{\theta}\sigma^\mu\theta v_\mu + i(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda} - i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\mathcal{D}. \quad (8.2.23)$$

Легко видеть, что степени суперполя  $V$  (в рассматриваемой калибровке) выше второй исчезают, т. е.

$$V^2 = \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})v_\mu v^\mu, \quad V^3 = 0 \quad (8.2.24)$$

и, следовательно, экспонента  $\exp t_i V$ , входящая в лагранжиан (8.2.21), в калибровке Весса — Зумино имеет вид

$$e^{t_i V} = 1 + t_i V + \frac{1}{2} t_i^2 V^2. \quad (8.2.25)$$

Поэтому кинетический член лагранжиана, описывающий взаимодействие с калибровочным полем, имеет вид

$$\sum_i \chi_i^* e^{t_i V} \chi_i = \sum_i \left( \chi_i^* \chi_i + t_i \chi_i^* V \chi_i + \frac{1}{2} t_i^2 \chi_i^* V^2 \chi_i \right). \quad (8.2.26)$$

Этот результат, полученный в калибровке Весса — Зумино, сохраняет свою силу в любой калибровке, так как выражение  $\chi_i^* e^{t_i V} \chi_i$  является калибровочно инвариантным. Таким образом, лагранжиан (8.2.21) в действительности зависит только от калибровочных полей  $v_\mu, \lambda, \bar{\lambda}, \mathcal{D}$ .

Перейдем к построению калибровочно-инвариантного лагранжиана калибровочного суперполя  $V$ . В результате операции ковариантного дифференцирования  $\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}$  калибровочного суперполя  $V$  можно строить спинорные суперполя. Покажем, что спинорные суперполя

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_\alpha V, \quad W_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} V \quad (8.2.27)$$

являются киральными, т. е.

$$\mathcal{D}_{\dot{\beta}} W_\alpha = 0, \quad \mathcal{D}_\beta W_{\dot{\alpha}} = 0, \quad (8.2.28)$$

и калибровочно инвариантными

$$W_\alpha \rightarrow W'_\alpha = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_\alpha V' = W_\alpha,$$

$$W_{\dot{\alpha}} \rightarrow W'_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}_\alpha \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} V' = W_{\dot{\alpha}} \quad (8.2.29)$$

По этой причине лагранжиан калибровочного поля должен строиться из суперполей  $W_\alpha, W_{\dot{\alpha}}$ . Киральность суперполя  $W_\alpha$  следует из того, что  $\{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{D}_{\dot{\beta}}\} = 0$  и, следовательно,  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} = 0$ . Так как индекс  $\alpha$  пробегает два значения, то в

операторе  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\beta}} \mathcal{D}^{\dot{\beta}}$  обязательно встретятся две операции  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}$  с одинаковым индексом, поэтому  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\beta}} \mathcal{D}^{\dot{\beta}} = 0$ . Аналогичным образом доказывается киральность поля  $W_{\dot{\alpha}}$ .

Для доказательства калибровочной инвариантности суперполя заметим, что

$$W'_\alpha = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_\alpha (V + i\Lambda - i\Lambda^*) = W_\alpha - \frac{i}{4} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}} \{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{D}_\alpha\} \Lambda.$$

Мы учли при этом киральность суперполей  $\Lambda, \Lambda^*$  (см. (8.2.16')). Замечая, что  $\{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{D}_{\dot{\alpha}}\} = 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu$  (см. (8.1.26)) и снова используя киральность суперполя  $\Lambda$ , мы убедимся в калибровочной инвариантности спинорного суперполя  $W_\alpha$ . Аналогичным образом доказывается калибровочная инвариантность спинорного суперполя  $W_{\dot{\alpha}}$ .

Величины  $W^\alpha W_\alpha$  и  $W_{\dot{\alpha}} W^{\dot{\alpha}}$  представляют собой скалярные (с точки зрения группы Лоренца) суперполя. Поэтому вещественный калибровочно инвариантный и суперинвариантный лагранжиан калибровочных полей может быть, согласно общим правилам, выбран в виде

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4} (W^\alpha W_\alpha + W_{\dot{\alpha}} W^{\dot{\alpha}})_{\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta}. \quad (8.2.30)$$

Используя формулы (8.2.27), (8.1.23), можно найти покомпонентное представление суперполей  $W_\alpha, W_{\dot{\alpha}}$ . Это представление калибровочно инвариантных спинорных суперполей проще получить при использовании калибровки Весса, Зумино (см. (8.2.23)), из которой следует, что поля  $W_\alpha, W_{\dot{\alpha}}$  будут содержать калибровочно инвариантные поля  $\lambda, \mathcal{D}$  и калибровочно инвариантную комбинацию  $\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$  (см. (8.2.22)). Мы не будем выписывать явных выражений для  $W_\alpha, W_{\dot{\alpha}}$  в терминах полей  $\lambda, \mathcal{D}, \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$ , а выпишем лишь выражение для калибровочно инвариантного лагранжиана  $\mathcal{L}_0$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 - \frac{1}{4} v^{\mu\nu} v_{\mu\nu} - i\bar{\lambda}\sigma^\mu \partial_\mu \lambda, \quad (8.2.31)$$

где

$$v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu. \quad (8.2.32)$$

Действие калибровочного поля может быть представлено в виде

$$\int d^4x \mathcal{L}_0 = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 - \frac{1}{4} v^{\mu\nu} v_{\mu\nu} - i\bar{\lambda}\sigma^\mu \partial_\mu \lambda \right\}. \quad (8.2.33)$$

Калибровочное поле  $v_{\mu\nu}$  аналогично напряженности электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$ .

Мы видим, что калибровочно инвариантное и суперинвариантное действие исходных полей  $A$ ,  $\psi$ ,  $F$  и калибровочных полей  $v_\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$ ,  $\mathcal{D}$ , введенных для достижения локальной «фазовой» инвариантности, определяется суммой выражений (8.2.21), (8.2.30). Теория, в которой в качестве исходных суперполей фигурирует два поля  $\chi^+$ ,  $\chi^-$  (индекс  $i$  принимает два значения), преобразующиеся при калибровочных преобразованиях по формулам

$$\chi^+ \rightarrow \chi^{+'} = e^{-ie\Lambda} \chi^+, \quad \chi^- \rightarrow \chi^{-'} = e^{ie\Lambda} \chi^-,$$

носят название суперсимметричной электродинамики.

**8.2.4. Неабелевы калибровочные суперполя.** В предыдущем разделе мы рассматривали абелевы калибровочные суперполя. Полученные результаты легко обобщить и на случай неабелевых калибровочных суперполей. При локальных преобразованиях внутренней симметрии киральные суперполя  $\chi_i$  и  $\chi_i^*$  преобразуются согласно формулам

$$\chi_i \rightarrow \chi_i' = (e^{-i\Lambda})_{ij} \chi_j, \quad \chi_i^* \rightarrow \chi_i^{*'} = \chi_j^* (e^{i\Lambda^+})_{ji}, \quad (8.2.34)$$

где поле  $\Lambda$  (в отличие от предыдущего случая) представляет собой матрицу  $\Lambda \equiv (\Lambda_{ij})$ , компоненты которой являются киральными суперполями такого же типа, как и суперполе  $\chi$  (см. разделы 8.2.1, 8.2.3). Часть лагранжиана (8.2.9), соответствующая массовым членам и членам взаимодействия, остается инвариантной при локальных преобразованиях внутренней симметрии, если только они инвариантны при глобальных преобразованиях внутренней симметрии ( $\Lambda_{ij} = \text{const}$ ). Что же касается кинетического члена  $\chi_i^* \chi_i$ , то для того чтобы он был инвариантен по отношению к локальным преобразованиям внутренней симметрии (8.2.34), необходимо ввести добавочное калибровочное эрмитово суперполе  $V$  и заменить кинетический член лагранжиана  $\chi_i^* \chi_i$  на

$$\chi_i^* e^V \chi_i = \chi_i^* (e^V)_{ij} \chi_j. \quad (8.2.35)$$

Этот член уже будет инвариантен по отношению к локальным преобразованиям внутренней симметрии (8.2.34), если суперполе  $V$  преобразуется при этих преобразованиях согласно формуле

$$V \rightarrow V', \quad e^{V'} = e^{-i\Lambda^+} e^V e^{i\Lambda}. \quad (8.2.36)$$

Подчеркнем, что в отличие от абелевых калибровочных суперполей поле  $V$  представляет собой матрицу, которая может быть разложена по генераторам  $T_a$  глобальной группы внутренней симметрии

$$V_{ij} = T_{a,ij} V_a, \quad V_a^* = V_a. \quad (8.2.37)$$

Таким образом, калибровочно инвариантный лагранжиан исходных полей и их взаимодействия с калибровочным суперполем будет определяться формулой (8.2.21) (в которой  $t_i = 1$ ), в которой, однако, калибровочное суперполе преобразуется не по формуле (8.2.19), а по формулам (8.2.36).

Перейдем теперь к нахождению лагранжиана самого неабелева калибровочного суперполя  $V$ . Как и в абелевом случае, введем с этой целью спинорные суперполя  $W_\alpha$ ,  $W_{\dot{\alpha}}$ :

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} e^{-V} \mathcal{D}_\alpha e^V, \quad W_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4} \mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}_\alpha e^{-V} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} e^V \quad (8.2.38)$$

(если  $V_{ij} = V \delta_{ij}$ , то эти формулы переходят в формулы (8.2.27)). Поля  $W_\alpha$ ,  $W_{\dot{\alpha}}$  являются киральными, т. е.

$$\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} W_\alpha = 0, \quad \mathcal{D}_\alpha W_{\dot{\alpha}} = 0. \quad (8.2.39)$$

Как и в абелевом случае, это утверждение следует из того, что  $\{\mathcal{D}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{D}_\beta\} = 0$ .

Кроме того, спинорные суперполя при калибровочных преобразованиях (8.2.36) преобразуются согласно формулам

$$W_\alpha \rightarrow W_\alpha' = e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda}, \quad W_{\dot{\alpha}} \rightarrow W_{\dot{\alpha}}' = e^{-i\Lambda^+} W_{\dot{\alpha}} e^{i\Lambda^+}. \quad (8.2.40)$$

Действительно, замечая, что поле  $\Lambda$  киральное, т. е. удовлетворяет условию  $\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \Lambda = 0$ , и используя закон преобразования (8.2.36), имеем

$$\begin{aligned} W_\alpha' &= -\frac{1}{4} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} e^{-V'} \mathcal{D}_\alpha e^{V'} = \\ &= -\frac{1}{4} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} e^{-i\Lambda} e^{-V} e^{i\Lambda^+} \mathcal{D}_\alpha e^{-i\Lambda^+} e^V e^{i\Lambda}. \end{aligned}$$

Используя далее киральность суперполей  $\Lambda$ ,  $\Lambda^+$

$$\mathcal{D}_{\dot{\alpha}} \Lambda = 0, \quad \mathcal{D}_\alpha \Lambda^+ = 0, \quad (8.2.41)$$

получаем

$$W_\alpha' = e^{-i\Lambda} \left\{ -\frac{1}{4} \mathcal{D}^{\dot{\alpha}} \mathcal{D}_{\dot{\alpha}} e^{-V} \mathcal{D}_\alpha e^V \right\} e^{i\Lambda},$$

откуда и следует первая из формул (8.2.40). Аналогичным образом доказывается и вторая из формул (8.2.40).

Мы видим, что в качестве калибровочно инвариантного лагранжиана калибровочного суперполя  $V$  можно взять величину  $\frac{1}{4} \text{tr} (W^\alpha W_\alpha + W_{\dot{\alpha}} W^{\dot{\alpha}})_{\overline{\theta\theta\theta\theta}}$  (калибровочная инвариантность этого выражения следует из формул (8.2.40) и возможности циклической перестановки операторов под знаком шпура).

Таким образом, полный калибровочно инвариантный лагранжиан неабелевых полей может быть представлен в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{tr} (W^\alpha W_\alpha + W_\alpha W^\alpha)_{\bar{\theta}\theta\theta\theta} + (\chi^* e^{gV} \chi)_{\bar{\theta}\theta\theta\theta} + \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \chi_i + \chi_{j+} + \frac{1}{3} \sum_{ijk} g_{ijk} \chi_i + \chi_{j+} + \chi_{k+} + \text{к. с.}, \quad (8.2.42)$$

где  $m_{ij}$ ,  $g_{ijk}$  — величины, полностью симметричные по индексам  $i, j, k$  и инвариантные относительно преобразований внутренней симметрии.

Если представить калибровочное суперполе  $V$  в виде

$$V_a(x, \theta, \bar{\theta}) = C_a(x) + i\theta\eta_a(x) + i\bar{\theta}\bar{\eta}_a(x) + \frac{i}{2}(\theta\theta)(M_a(x) + iN_a(x)) + \frac{i}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})(M_a(x) - iN_a(x)) - \bar{\theta}\sigma^\mu\theta v_{a\mu}(x) + i(\theta\theta)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda}_a(x) - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\eta_a(x)\right) + i(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(\lambda_a(x) + \frac{i}{2}\partial_\mu\eta_a(x)\sigma^\mu\right)\theta + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(\mathcal{Q}_a(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu C_a(x)\right) \quad (8.2.43)$$

(ср. с формулой (8.2.18)) и воспользоваться формулами (8.2.38), то можно показать, что первые два члена лагранжиана (8.2.42) могут быть представлены в виде (мы заменили  $V \rightarrow gV$ , чтобы явно ввести константу связи  $g$ )

$$\frac{1}{4} \text{tr} (W^\alpha W_\alpha + W_\alpha W^\alpha)_{\bar{\theta}\theta\theta\theta} + (\chi^* e^{gV} \chi)_{\bar{\theta}\theta\theta\theta} = \sum_a \left\{ -\frac{1}{4} v_a^{\mu\nu} v_{a\mu\nu} - i\bar{\lambda}_a \sigma^\mu \mathcal{Q}_\mu \lambda_a + \frac{1}{2} \mathcal{Q}_a \mathcal{Q}_a \right\} + 2D_\mu A D^\mu A^* - 2FF^* - \frac{i}{2} D_\mu \bar{\psi} \sigma^\mu \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \sigma^\mu D_\mu \psi + ig\sqrt{2} \sum_a \{ (A^+ T_a \psi) \lambda_a - \bar{\lambda}_a (\bar{\psi} T_a A) \}, \quad (8.2.44)$$

где

$$D_\mu A = \partial_\mu A - igv_{a\mu} T_a A, \quad D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - igv_{a\mu} T_a \psi, \quad \mathcal{Q}_\mu \lambda_a = \partial_\mu \lambda_a + g f^{abc} v_{b\mu} \lambda_c, \quad v_{a\mu\nu} = \partial_\mu v_{a\nu} - \partial_\nu v_{a\mu} - g f^{abc} v_{b\mu} v_{c\nu}. \quad (8.2.45)$$

Подчеркнем, что калибровочные поля  $\lambda_a$ ,  $\bar{\lambda}_a$ ,  $\mathcal{Q}_a$ ,  $v_a^\mu$ , входящие в этот лагранжиан, несут индекс  $a$ , нумерующий

генераторы группы внутренней симметрии, а исходные (обычные) поля  $A_i$ ,  $\psi_i$ ,  $F_i$  несут индекс внутренней симметрии  $i$ , на который действуют генераторы  $T_a$ .

Мы видим, что в лагранжиане, записанном в покомпонентной форме, достижение калибровочной инвариантности происходит путем замены обычных производных удлиненными, причем удлинение производных происходит стандартным образом в соответствии с § 4.1.

### § 8.3. Квантование суперполя

**8.3.1. Квантование свободного суперполя.** Как мы видели в § 8.7, киральное скалярное суперполе (в + представлении)

$$\chi(x, \theta) = A(x) + \theta^\alpha \varphi_\alpha(x) + \theta^\alpha \theta_\alpha F(x)$$

объединяет два скалярных поля  $A(x)$ ,  $F(x)$  и двухкомпонентное спинорное поле  $\varphi_\alpha(x)$ . Лагранжиан этого суперполя определяется формулой (8.2.15) (мы считаем, что с точки зрения внутренней симметрии поле является однокомпонентным)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - U,$$

$$\mathcal{L}_0 = 2A^\mu \partial_\mu A^+ + 2A^{\mu+} \partial_\mu A - \frac{i}{2} \partial_\mu \varphi^+ \sigma^\mu \varphi + \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^\mu \partial_\mu \varphi,$$

$$U = 2A_\mu^+ A^\mu - 2FF^+ - \quad (8.3.1)$$

$$- \left\{ 2mAF + 4gA^2 F - \frac{m}{2} \varphi^\alpha \varphi_\alpha - 2gA\varphi^\alpha \varphi_\alpha + \text{э. с.} \right\}.$$

При этом в соответствии с § 2.1 мы выписали часть лагранжиана, связанную со скалярным полем  $A(x)$  таким образом, чтобы лагранжиан приводил к уравнениям поля первого порядка для величин  $A(x)$  и  $A_\mu(x)$  и положили  $\psi_\alpha \equiv \varphi_\alpha$  (см. § 8.2). Лагранжиан свободного суперполя ( $g=0$ ) поэтому имеет вид

$$\mathcal{L}_f = a^\mu \partial_\mu a^+ + a^{\mu+} \partial_\mu a - a_\mu^+ a^\mu + 2FF^+ + \sqrt{2} m (aF + a^+ F^+) - \frac{i}{2} \partial_\mu \varphi^+ \sigma^\mu \varphi + \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^\mu \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m \varphi^\alpha \varphi_\alpha - \frac{1}{2} m \varphi_\alpha^+ \varphi^{\alpha+}, \quad (8.3.2)$$

где  $a = \sqrt{2}A$ ,  $a^\mu = \sqrt{2}A^\mu$ . Этот лагранжиан приводит к уравнению связи

$$F = -\frac{1}{\sqrt{2}} ma^+ \quad (8.3.3)$$



и к уравнениям

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) a = 0, \quad i\sigma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu \varphi^\beta + m\epsilon_{\alpha\beta} \varphi^\beta = 0 \quad (8.3.4)$$

для скалярного и спинорного полей с совпадающими массами.

С учетом уравнения связи  $F = -\frac{1}{\sqrt{2}} m a^+$  лагранжиан (8.3.1) можно представить в виде

$$\mathcal{L}_f = a^\mu \partial_\mu a^+ + a^{\mu+} \partial_\mu a - a_\mu^+ a^\mu - m^2 a^+ a - \frac{i}{2} \partial_\mu \varphi^+ \sigma^\mu \varphi + \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^\mu \partial_\mu \varphi - \frac{m}{2} (\varphi^\alpha \varphi_\alpha + \varphi_\alpha \varphi^\alpha). \quad (8.3.5)$$

Этот лагранжиан совпадает с суммой свободных лагранжианов скалярного поля (см. § 2.1) и двухкомпонентного спинорного поля  $\varphi$ . При этом мы пользуемся не матричной формой записи (как в § 2.5), а спинорной.

Именно под  $\varphi^\beta$  понимаем  $\varphi^{\beta+}$  ( $\varphi^\beta \equiv \varphi^{\beta+}$ ), под матричными элементами  $(\sigma_\mu)_{\alpha\beta}$  — ковариантный спинор второго ранга  $(\sigma_\mu)_{\alpha\beta}$ , причем опускание индексов происходит с помощью универсального спинора второго ранга  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (см. § 2.5),  $\varphi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \varphi^\beta$  ( $\epsilon_{\alpha\beta} = -i(\sigma^2)_{\alpha\beta}$ ). Поэтому перестановочные соотношения для полей  $a(x)$  и  $\varphi^\beta(x)$  определяются, очевидно, формулами (2.1.11), (2.5.50), (2.5.52)

$$[a(x), a^+(x')] = -i\Delta(x-x'), \quad [a(x), a(x')] = 0, \quad (8.3.6)$$

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\} = im\epsilon_{\alpha\beta}\Delta(x-x'),$$

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta^+(x')\} = (\tilde{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \Delta(x-x').$$

Так как  $F = -\frac{m}{\sqrt{2}} a^+$ , то

$$[F(x), F^+(x')] = \frac{i}{2} m^2 \Delta(x-x'). \quad (8.3.6')$$

Используя эти формулы легко найти перестановочные соотношения для кирального суперполя  $\chi(x, \theta)$

$$\chi(x, \theta) = \frac{a(x)}{\sqrt{2}} + \theta^\alpha \varphi_\alpha(x) + \theta^\alpha \theta_\alpha F(x) \quad (8.3.7)$$

и сопряженного ему поля  $\chi^+(x, \theta)$ . Используя (8.3.7), имеем

$$[\chi(x, \theta), \chi(x', \theta')] = -\frac{m}{2} (\theta\theta) [a^+(x), a(x')] - \frac{m}{2} (\theta'\theta') [a(x), a^+(x')] + [\theta^\alpha \varphi_\alpha(x), \theta'^\alpha \varphi_\alpha(x')].$$

Учитывая далее, что  $\theta'$  антикоммутирует с  $\theta$  и  $\varphi$ , получаем

$$[\chi(x, \theta), \chi(x', \theta')] = -\frac{m}{2} ((\theta\theta) [a^+(x'), a(x)] + (\theta'\theta') [a(x), a^+(x')]) + \theta'^\beta \theta^\alpha \{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\},$$

откуда, согласно (8.3.6), найдем

$$[\chi(x, \theta), \chi(x', \theta')] = im \left( \epsilon_{\alpha\beta} \theta'^\beta \theta^\alpha + \frac{1}{2} (\theta'\theta') + \frac{1}{2} (\theta\theta) \right) \Delta(x-x').$$

Легко видеть, что

$$\epsilon_{\alpha\beta} \theta'^\beta \theta^\alpha + \frac{1}{2} (\theta'\theta') + \frac{1}{2} (\theta\theta) = (\theta_2 - \theta'_2) (\theta_1 - \theta'_1) \equiv \delta(\theta - \theta') \quad (8.3.8)$$

(мы учли, что  $\theta^1 = \theta_2$ ,  $\theta^2 = -\theta_1$ ,  $\epsilon_{12} = -1$ ,  $\epsilon_{21} = 1$ ). Поэтому

$$[\chi(x, \theta), \chi(x', \theta')] = im \delta(\theta - \theta') \Delta(x-x'). \quad (8.3.9)$$

Введенная здесь функция  $\delta(\theta - \theta')$  обладает всеми свойствами грасмановой  $\delta$ -функции, т. е.

$$f(\theta) \delta(\theta - \theta') = f(\theta') \delta(\theta - \theta'), \quad \int d\theta_1 d\theta_2 \delta(\theta) = 1. \quad (8.3.10)$$

Эти формулы непосредственно следуют из определения грасманова интегрирования (см. § 8.2) и того, что произвольную функцию  $f(\theta)$  можно представить в виде

$$f(\theta) = f_1 + f_2^2 \theta_\alpha + f_3 \theta_1 \theta_2.$$

Найдем теперь разновременной коммутатор  $[\chi, \chi^+]$ .

Учитывая грасманов характер величин  $\theta_\alpha$ , а также перестановочные соотношения (8.3.6), имеем

$$[\chi(x, \theta), \chi^+(x', \theta')] =$$

$$= -\frac{i}{2} \{1 - m^2 (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') - 2i\bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha (\tilde{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu\} \Delta(x-x').$$

Так как функция  $\Delta(x)$  удовлетворяет волновому уравнению  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta(x) = 0$ , то последнюю формулу можно переписать в виде

$$[\chi(x, \theta), \chi^+(x', \theta')] = -\frac{i}{2} \{1 + (\theta\theta) (\bar{\theta}\bar{\theta}) \partial_\mu \partial^\mu - 2i\bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \partial_\mu\} \Delta(x-x').$$

Учитывая далее, что в силу грассманова характера величин  $\theta_\alpha$

$$1 + (\theta\theta)(\bar{\theta}'\bar{\theta}')\partial_\mu\partial^\mu - 2i\bar{\theta}'\sigma^\mu\theta\partial_\mu = e^{-2i\bar{\theta}'\sigma^\mu\theta\partial_\mu}, \quad (8.3.11)$$

получаем окончательно

$$[\chi(x, \theta), \chi^+(x', \theta')] = -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}'\sigma^\mu\theta\partial_\mu} \Delta(x - x'). \quad (8.3.12)$$

Покажем, что полученные нами перестановочные соотношения являются суперинвариантными. Напомним с этой целью, что поле  $\chi(x, \theta)$  является суперскаляром. Это значит, что преобразованное поле  $\chi'(x, \theta)$  связано с исходным полем  $\chi(x, \theta)$  формулой

$$\chi'(x', \theta') = \chi(x, \theta),$$

где

$$x'_\mu = x_\mu + a_\mu + 2i\bar{\zeta}\sigma_\mu\theta + i\bar{\zeta}\sigma_\mu\zeta, \quad \theta' = \theta + \zeta, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\zeta} \quad (8.3.13)$$

(см. формулы (8.1.33), (8.1.36)). Поле  $\chi^+(x, \theta)$  не является суперскаляром, однако поле

$$\chi(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-2i\bar{\theta}\sigma^\mu\theta\partial_\mu}\chi^+(x, \theta)$$

представляет собой суперскаляр (см. § 8.1)

$$\chi'(x', \theta', \bar{\theta}') = \chi(x, \theta, \bar{\theta}).$$

Перепишем перестановочные соотношения в виде

$$[\chi(x_1, \theta_1), \chi(x_2, \theta_2)] = im\delta(\theta_1 - \theta_2)\Delta(x_1 - x_2), \quad (8.3.14)$$

$$[\chi(x_1, \theta_1), \chi(x_2, \theta_2, \bar{\theta}_2)] = -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}_2\sigma^\mu(\theta_1 - \theta_2)\partial_\mu}\Delta(x_1 - x_2).$$

Тогда суперинвариантность перестановочных соотношений означает, что

$$\begin{aligned} [\chi'(x'_1, \theta'_1), \chi'(x'_2, \theta'_2)] &= im\delta(\theta'_1 - \theta'_2)\Delta(x'_1 - x'_2), \\ [\chi'(x'_1, \theta'_1), \chi'(x'_2, \theta'_2, \bar{\theta}'_2)] &= \\ &= -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}'_2\sigma^\mu(\theta'_1 - \theta'_2)\partial_\mu}\Delta(x'_1 - x'_2). \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

Так как  $\chi(x, \theta)$ ,  $\chi(x, \theta, \bar{\theta})$  представляют собой суперскаляры, то правые части (8.3.14), (8.3.15) должны совпадать

$$\begin{aligned} \delta(\theta_1 - \theta_2)\Delta(x_1 - x_2) &= \delta(\theta'_1 - \theta'_2)\Delta(x'_1 - x'_2), \\ e^{-2i\bar{\theta}_2\sigma^\mu(\theta_1 - \theta_2)\partial_\mu}\Delta(x_1 - x_2) &= e^{-2i\bar{\theta}'_2\sigma^\mu(\theta'_1 - \theta'_2)\partial_\mu}\Delta(x'_1 - x'_2). \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

В силу (8.3.13) первое из этих соотношений очевидно. Чтобы убедиться в справедливости второго, заметим, что, согласно (8.3.13),

$$\begin{aligned} e^{-2i\bar{\theta}'_2\sigma^\mu(\theta'_1 - \theta'_2)\partial_\mu}\Delta(x'_1 - x'_2) &= \\ = e^{-2i\bar{\theta}'_2\sigma^\mu(\theta_1 - \theta_2)\partial_\mu}\Delta(x_1 - x_2 + 2i\bar{\zeta}\sigma(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

Замечая далее, что

$$\Delta(x_1 - x_2 + 2i\bar{\zeta}\sigma(\theta_1 - \theta_2)) = e^{2i\bar{\zeta}\sigma^\mu(\theta_1 - \theta_2)\partial_\mu}\Delta(x_1 - x_2),$$

мы и приходим, согласно (8.3.13), ко второму из соотношений (8.3.16).

**8.3.2. Упорядоченные произведения операторов суперполя и связи.** Так как операторы  $a^{(+)}(x)$ ,  $\phi^{(+)}(x)$  являются операторами уничтожения, а операторы  $a^{(-)}(x)$ ,  $\phi^{(-)}(x)$  — операторами рождения, то положительно-частотные (по времени) части  $\chi^{(+)}(x, \theta)$ ,  $\chi^{+(+)}(x, \theta)$  операторов  $\chi(x, \theta)$ ,  $\chi^+(x, \theta)$  также будут операторами уничтожения, а отрицательно-частотные части  $\chi^{(-)}(x, \theta)$ ,  $\chi^{+(-)}(x, \theta)$  операторов  $\chi(x, \theta)$ ,  $\chi^+(x, \theta)$  — операторами рождения. Таким образом, вектор состояния вакуума суперполя  $\Phi_0$  будет определяться формулами

$$\chi^{(+)}(x, \theta)\Phi_0 = 0, \quad \chi^{+(+)}(x, \theta)\Phi_0 = 0. \quad (8.3.17)$$

Нормальное произведение операторов  $\chi^{(\pm)}(x, \theta)$  определяется формулой

$$:\chi^{(+)}(x_1, \theta_1) \dots \chi^{(-)}(x_n, \theta_n): = \chi^{(-)}(x_n, \theta_n) \dots \chi^{(+)}(x_1, \theta_1), \quad (8.3.18)$$

где в правой части равенства стоят те же операторы, что и в левой, но расположенные таким образом, что операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения (так как операторы рождения (уничтожения) коммутируют друг с другом, то их можно расставлять в любом порядке). Если под знаком нормального произведения стоят операторы  $\chi(x, \theta)$ , то нормальное произведение определяется формулой

$$\begin{aligned} : \dots \chi(x, \theta) \dots : &= : \dots \chi^{(+)}(x, \theta) \dots : + \\ &+ : \dots \chi^{(-)}(x, \theta) \dots : \end{aligned} \quad (8.3.18')$$

Подчеркнем, что хотя суперполе  $\chi(x, \theta)$  содержит фермиевские операторы, в определение нормального произведения не входят знаковые факторы. Это связано с тем, что в суперполе  $\chi(x, \theta)$  фермиевские поля  $\phi(x)$  входят вместе с грассмановой переменной  $\theta$  (под знаком нормального произведения

могут входить как операторы  $\chi(x, \theta)$ , так и операторы  $\chi^+(x, \theta)$ .

Хронологическое произведение операторов суперполя определяется согласно формуле

$$T\{\chi(x_1, \theta_1) \dots \chi(x_n, \theta_n)\} = \chi(x_{i_1}, \theta_{i_1}) \dots \chi(x_{i_n}, \theta_{i_n}), \quad (8.3.19)$$

$$t_{i_1} > \dots > t_{i_n}$$

(в этом определении также не содержится знаковых факторов; под знаком  $T$ -произведения могут входить как операторы  $\chi(x, \theta)$ , так и операторы  $\chi^+(x, \theta)$ ).

Связь между операторами суперполя определяется формулами

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi(x', \theta')} = T\{\chi(x, \theta) \chi(x', \theta')\} - : \chi(x, \theta) \chi(x', \theta') : ,$$

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} = T\{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')\} - : \chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta') : .$$

Поступая, как и при вычислении разновременных коммутаторов, получаем

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi(x', \theta')} = -\frac{m}{2} (\theta' \theta') \underline{a(x) a^+(x')} -$$

$$- \frac{m}{2} (\theta \theta) \underline{a^+(x) a(x')} + \theta'^\beta \theta^\alpha \underline{\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x')}$$

(мы учли, что связи между операторами  $a(x)$  и  $a(x')$  равны нулю  $\underline{aa} = 0$ , см. § 2.1). Используя формулы (2.5.53), (2.1.23),

определяющие связи  $\underline{\varphi\varphi}$ ,  $\underline{aa^+}$ , получаем отсюда, учитывая формулу (8.3.8),

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi(x', \theta')} = im \delta(\theta - \theta') \Delta^c(x - x'). \quad (8.3.20)$$

Ясно, что правая часть этого равенства представляет собой суперскаляр.

Аналогичным образом получаем

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} = \frac{1}{2} \underline{a(x) a^+(x')} -$$

$$- (\theta \theta) (\bar{\theta}' \bar{\theta}') \frac{m^2}{2} \underline{a^+(x) a(x')} + \bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \underline{\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta^+(x')}.$$

Подставляя сюда выражения (2.5.53), (2.1.23) для связей, получаем

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} =$$

$$= -\frac{i}{2} (1 - m^2 (\theta \theta) (\bar{\theta}' \bar{\theta}') - 2i \bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu) \Delta^c(x - x').$$

Так как функция  $\Delta^c(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Delta^c(x) = \delta(x),$$

то

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} = -\frac{i}{2} (1 + (\theta \theta) (\bar{\theta}' \bar{\theta}') \partial^\mu \partial_\mu -$$

$$- 2i \bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \partial_\mu) \Delta^c(x - x') + \frac{i}{2} (\theta \theta) (\bar{\theta}' \bar{\theta}') \delta(x - x').$$

Учитывая далее формулу (8.3.11), имеем окончательно

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} =$$

$$= \underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} + \frac{i}{2} (\theta \theta) (\bar{\theta}' \bar{\theta}') \delta(x - x'), \quad (8.3.21)$$

где

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} = -\frac{i}{2} e^{-2i \bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \partial_\mu} \Delta^c(x - x'). \quad (8.3.22)$$

Ясно, что величина

$$e^{-2i \bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha \partial_\mu} \underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')}$$

представляет собой суперскаляр, что находится в соответствии с формулой

$$e^{-2i \bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha (\theta_1 - \theta_2) \partial_\mu} \Delta^c(x_1 - x_2) = e^{-2i \bar{\theta}'^\beta \theta^\alpha (\theta_1' - \theta_2') \partial_\mu} \Delta^c(x_1' - x_2')$$

(доказательство этого соотношения совпадает с доказательством второй из формул (8.3.16)). Второе слагаемое в (8.3.21) нарушает суперскалярный характер величины  $\underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta', \bar{\theta}')$ . Роль инвариантного второго слагаемого в формуле (8.3.21) будет выяснена при построении матрицы рассеяния для суперполя.

**8.3.3. Переход к представлению взаимодействия и матрица рассеяния.** Перейдем теперь к рассмотрению квантовой теории несвободного суперполя с взаимодействием  $\chi^3(x, \theta)$  (см. § 8.2). Существенной чертой этой теории является то, что в ней благодаря инвариантности по отношению к преобразованиям суперсимметрии происходит значительное сокращение числа расходимостей в матрице рассеяния. Так как в теории с взаимодействием  $\chi^3$  нам известен лагранжиан взаимодействия этих полей, то мы можем аналогично тому, как это было сделано в квантовой электродинамике, построить матрицу рассеяния. Замечательным, однако, является то, что правила Фейнмана могут быть сформулированы сразу для всего поля

$\chi(x, \theta)$ , а не для его отдельных компонент  $A, F, \varphi$ . В этом параграфе мы построим матрицу рассеяния для суперполя явно инвариантную по отношению к преобразованиям суперсимметрии и рассмотрим вопрос о расходимостях, содержащихся в этой матрице [9].

Лагранжиан суперполя определяется формулой (8.3.1),  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - U$ , где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= 2A^\mu \partial_\mu A^+ + 2\partial_\mu A A^{\mu+} - \frac{i}{2} \partial_\mu \varphi^+ \sigma^\mu \varphi + \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^\mu \partial_\mu \varphi, \\ U &= 2A_\mu^+ A^\mu - 2FF^+ - \\ &- \left\{ 2mAF + 4gA^2F - \frac{m}{2} \varphi^\alpha \varphi_\alpha - 2gA\varphi^\alpha \varphi_\alpha + \varepsilon \cdot c \right\}. \end{aligned}$$

Так как производные поля  $F$  не входят в лагранжиан, то вариация  $\mathcal{L}$  по  $F$  приводит к уравнению связи

$$F = -mA^+ - 2gA^+A^+. \quad (8.3.23)$$

Подставляя это выражение в формулу для  $U$ , получаем

$$\begin{aligned} U &= 2A_\mu^+ A^\mu + 2mA^+A + \frac{m}{2} (\varphi^\alpha \varphi_\alpha + \varphi_\alpha^+ \varphi^+) + U', \\ U' &= 2gA\varphi^\alpha \varphi_\alpha + 2gA^+ \varphi_\alpha^+ \varphi^{\alpha+} + 4mg(A^+A^2 + A^{+2}A) + \\ &+ 8g^2A^2A^{+2}. \end{aligned} \quad (8.3.24)$$

Гамильтониан поля, согласно (1.3.27), определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^3x \left\{ -2A^k \partial_k A^+ - 2\partial_k A A^{k+} + \frac{i}{2} \partial_k \varphi^+ \sigma^k \varphi - \right. \\ &\left. - \frac{i}{2} \varphi^+ \sigma^k \partial_k \varphi + U \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что гамильтониан взаимодействия определяется формулой

$$V = \int d^3x U'(x). \quad (8.3.25)$$

Зная гамильтониан взаимодействия, можно определить матрицу рассеяния

$$S = T \exp \left( -i \int d^4x U'(x) \right) \quad (8.3.26)$$

и сформулировать правила Фейнмана, в основе которых лежат связи между операторами  $a = \sqrt{2}A$  и  $\varphi, \varphi^+$ :

$$\underline{a(x) a^+(x')} = -i\Delta^c(x-x'),$$

$$\underline{\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta^+(x')} = (\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu)_{\alpha\beta} \Delta^c(x-x'),$$

$$\underline{\varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x')} = m(\sigma^2)_{\alpha\beta} \Delta^c(x-x')$$

(в оператор  $U'$  в формуле (8.3.26) должны быть подставлены полевые операторы  $a, \varphi, \varphi^+$  в представлении взаимодействия). Эти связи приводят, как мы видели, к связям (8.3.20), (8.3.21), для суперполей

$$\underline{\chi(x, \theta) \chi(x', \theta')} = im\delta(\theta - \theta') \Delta^c(x-x'), \quad (8.3.27)$$

$$\underline{\chi^+(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} = -im\delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}') \Delta^c(x-x'),$$

$$\begin{aligned} \underline{\chi(x, \theta) \chi^+(x', \theta')} &= -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}'\sigma^\mu\theta\partial_\mu} \Delta^c(x-x') + \\ &+ \frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') \delta(x-x'). \end{aligned}$$

Связь  $\underline{\chi\chi^+}$  содержит не суперинвариантное слагаемое  $\frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') \delta(x-x')$ . Не суперинвариантной является также плотность гамильтониана взаимодействия  $U'(x)$ .

Мы покажем, что, не изменяя  $S$ -матрицы, можно гамильтониан взаимодействия заменить на лагранжиан взаимодействия, отбросив одновременно в связи  $\underline{\chi\chi^+}$  суперинвариантное слагаемое  $\frac{i}{2} (\theta\theta) (\bar{\theta}'\bar{\theta}') \delta(x-x')$ . Так как лагранжиан взаимодействия является суперинвариантным, то и  $S$ -матрица будет суперинвариантной.

Для доказательства заметим, что лагранжиан взаимодействия полей  $F, A, \varphi$  определяется формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = 4gA^2F - 2gA\varphi^\alpha \varphi_\alpha + \varepsilon \cdot c. \quad (8.3.28)$$

или в терминах суперполей — формулой

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(x) = \frac{2}{3} g \int d^4\theta \{ \delta(\bar{\theta}) \chi^3(x, 0) - \delta(\theta) \chi^{+3}(x, \theta) \} \quad (8.3.29)$$

(см. 8.2.11); эта формула явно показывает суперинвариантный характер  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ .

В пункте 8.3.2 при вычислении связей суперполей мы считали, что  $F = -mA^+$ . Поэтому при  $F = -mA^+$  оператор  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  связан с  $U'$  формулой

$$U'(x) = -\mathcal{L}_{\text{int}}(x) + 8g^2A^2A^{+2}. \quad (8.3.30)$$

Из формулы (8.3.27) для связи  $\chi\chi^+$  следует, что суперинвариантной связью среди полей  $A, F, \varphi$  является только связь

$$\underline{F(x)F^+(x')} = \frac{i}{2} \delta(x-x') + \underbrace{F(x)F^+(x')}_{\text{super}}; \quad (8.3.31)$$

$S$ -матрицу можно  $N$ -упорядочить с помощью формулы (1.6.51)

$$S = 1 e^{\Delta_{FF^+} + \Delta_{FA^+} + \dots} \exp\left(-i \int d^4x' U'(x')\right) 1,$$

где

$$\Delta_{FF^+} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta F(x)} F(x) F^+(x') \frac{\delta}{\delta F^+(x')}$$

(среди дифференциальных операторов  $\Delta_{FF^+}, \Delta_{FA}, \dots$ , определяемых связями  $FF^+, FA, \dots$ , мы выписали только дифференциальный оператор  $\Delta_{FF^+}$ , соответствующий суперинвариантной связи). В соответствии с формулой (8.3.31) дифференциальный оператор  $\Delta_{FF^+}$  можно представить в виде

$$\Delta_{FF^+} = \Delta_{FF^+}^{\text{super}} + \Delta'_{FF^+},$$

где  $\Delta_{FF^+}^{\text{super}}$  — дифференциальный оператор  $\Delta_{FF^+}$ , определяемый суперинвариантной связью  $\underline{FF^+}$

$$\Delta_{FF^+}^{\text{super}} = \int d^4x d^4x' \frac{\delta}{\delta F(x)} \underline{F(x)F^+(x')} \frac{\delta}{\delta F^+(x')}$$

и

$$\Delta'_{FF^+} = \frac{i}{2} \int d^4x \frac{\delta^2}{\delta F(x) \delta F^+(x)}.$$

Так как (см. (8.3.28))

$$\frac{\delta}{\delta F(x)} e^{-i \int d^4x' U'} = -4gA^2(x) e^{-i \int d^4x' U'},$$

$$\frac{\delta}{\delta F^+(x)} e^{-i \int d^4x' U'} = -4gA^{+2}(x) e^{-i \int d^4x' U'}$$

то из (8.3.30) следует, что

$$e^{\Delta'_{FF^+}} e^{-i \int d^4x' U'} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x)}$$

и, следовательно,  $S$ -матрицу можно представить в виде

$$S = : e^{\Delta_{FF^+}^{\text{super}} + \Delta_{FA^+} + \dots} \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) : 1.$$

Эту формулу можно, очевидно, записать в виде

$$S = T \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x), \quad (8.3.32)$$

где  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x)$  — суперинвариантный лагранжиан взаимодействия, определяемый формулой (8.3.29);  $T$ -произведение раскладывается по правилам Вика в сумму  $N$ -произведений с помощью суперинвариантных связей суперполей

$$\underline{\chi(x, \theta)\chi(x', \theta')} = im\delta(\theta - \theta') \Delta^c(x - x'),$$

$$\underline{\chi^+(x, \theta)\chi^+(x', \theta')} = -im\delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}') \Delta^c(x - x'),$$

$$\underline{\chi(x, \theta)\chi^+(x', \theta')} = -\frac{i}{2} e^{-2i\bar{\theta}'\sigma^{\mu\nu}\theta\theta_\mu} \Delta^c(x - x'). \quad (8.3.33)$$

Таким образом, мы представили  $S$ -матрицу в явно суперинвариантном виде.

**8.3.4. Правила Фейнмана в теории суперполя.** Сформулируем теперь правила Фейнмана для суперполя. Разложение  $S$ -матрицы в ряд по константе связи  $g$  имеет вид

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n! m!} \left(\frac{2}{3} g\right)^{n+m} (-1)^m \int d^4x_1 d^2\theta_1 \dots$$

$$\dots d^4x_n d^2\theta_n d^4y_1 d^2\bar{\theta}_1 \dots d^4y_m d^2\bar{\theta}_m T \{\chi^3(x_1, \theta_1) \dots$$

$$\dots \chi^3(x_n, \theta_n) \chi^{+3}(y_1, \bar{\theta}_1) \dots \chi^{+3}(y_m, \bar{\theta}_m)\}. \quad (8.3.34)$$

Отсюда следует, что с каждой точкой  $(x\theta)$  диаграммы Фейнмана связано либо три суперполя  $\chi(x, \theta)$  (в этом случае точка  $(x\theta)$  называется правой вершиной), либо три суперполя  $\chi^+(x, \theta)$  (в этом случае точка  $(x\bar{\theta})$  называется правой вершиной).  $T$ -произведение в формуле (8.3.34) должно быть разложено в соответствии с правилами Вика в сумму  $N$ -произведений. При этом под знаком  $N$ -произведения будут встречаться как свободные, так и связанные суперполя. Свободные суперполя  $\chi(x, \theta)$ , связанные с правой вершиной  $(x\theta)$ , будем изображать волнистой линией с символом  $\chi$ , а свободные суперполя  $\chi^+(x, \theta)$ , связанные с левой вершиной  $(x\bar{\theta})$ , будем изображать тоже волнистой линией с символом  $\chi^+$ . Правые вершины будем изображать в виде  $\ominus$ , а левые  $\oplus$ . Связи между операторами, относящимися к правым (или левым) вершинам, будем обозначать пунктирной линией, соединяющей эти вершины. Связи между правой и левой вершинами будем изображать сплошной линией, соединяющей эти вершины (см. рис. 51).

Как и в электродинамике, удобно использовать импульсное представление матрицы рассеяния  $S$ . Для этого разложим суперполя и функции распространения суперполей в 4-мер-

ные интегралы Фурье

$$\chi(x, \theta) = \int d^4q e^{-iqx} \chi(q, \theta), \quad \chi^+(x, \theta) = \int d^4q e^{iqx} \chi^+(q, \theta),$$

$$\underline{\chi\chi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \underline{\chi\chi}(p), \quad \underline{\chi\chi^+}(x) = \int d^4p e^{-ipx} \underline{\chi\chi^+}(p),$$

(8.3.35)

где пропагаторы суперполей в импульсном пространстве определяются формулами

$$\underline{\chi\chi}(p) = \frac{im}{m^2 - p^2 - i0} \delta(\theta - \theta'),$$

$$\underline{\chi^+\chi^+}(p) = -\frac{im}{m^2 - p^2 - i0} \delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}'),$$

$$\underline{\chi\chi^+}(p) = -\frac{i}{2} \frac{1}{m^2 - p^2 - i0} e^{-2\bar{\theta}'\sigma^{\mu\nu}\theta p_\mu}. \quad (8.3.36)$$

Подставляя эти разложения в (8.3.34), представляем  $S$ -матрицу в виде

$$S = \sum_{nm} \int d^4p_1 d^2\theta_1 \dots d^4p'_m d^2\bar{\theta}'_m : \chi(p_1, \theta_1) \dots \chi(p_n, \theta_n) \times$$

$$\times \chi^+(p'_1, \theta'_1) \dots \chi^+(p'_m, \theta'_m) : F_{nm}(p_1\theta_1, \dots,$$

$$\dots, p_n\theta_n; p'_1\bar{\theta}'_1, \dots, p'_m\bar{\theta}'_m), \quad (8.3.37)$$

где коэффициентные функции  $F_{nm}(p_1\theta_1, \dots, p_n\theta_n; p'_1\bar{\theta}'_1, \dots, p'_m\bar{\theta}'_m)$  определяются символической формулой

$$F_{nm} = \sum \frac{1}{l!s!} \left(\frac{2}{3}g\right)^{l+s} (-1)^s (2\pi)^{4(l+s)-F} \times$$

$$\times \int \prod_1^{l+s} \delta(\Sigma p) \prod_1^F \underline{\chi\chi} \prod_1^{F_{++}} \underline{\chi^+\chi^+} \prod_1^{F_{+-}} \underline{\chi\chi^+} \quad (8.3.38)$$

и  $F_{--}, F_{++}, F_{+-}$  — числа внутренних линий на диаграмме типа  $\underline{\chi\chi}, \underline{\chi^+\chi^+}, \underline{\chi\chi^+}, F = F_{--} + F_{++} + F_{+-}$  (ср. с (3.2.4)).

Суперполе  $\chi(p, \theta)$  может быть выражено, согласно (8.1.36), через фурье-компоненты полей  $A(x), F(x), \varphi(x)$ :  $\chi(p, \theta) = A(p) + \theta\varphi(p) + (\theta\theta)F(p)$ .



Рис. 51.

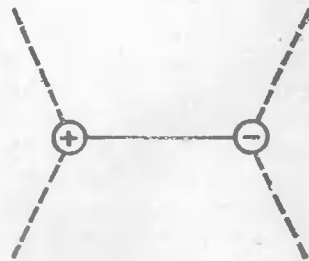


Рис. 52.



Рис. 53.



Рис. 54.

В соответствии с формулами (8.1.36), (8.3.35) поля  $A(p), \varphi(p), F(p)$  представляют собой суперпозиции операторов уничтожения суперчастиц с импульсом  $p$  и операторов рождения суперчастиц с импульсом  $-p$ .

Приведем в качестве примера диаграмму Фейнмана, описывающую процессы рассеяния и аннигиляции суперчастиц (см. рис. 52). Эта диаграмма изображает  $N$ -произведение с четырьмя свободными операторами суперполя; внутренней линии сопоставляется пропагатор  $\underline{\chi\chi^+}(p)$ .

**8.3.5. Расходимости в матрице рассеяния суперполя.** Введенная нами матрица рассеяния содержит расходимости в области больших импульсов суперчастиц. Однако замечательным свойством суперполя является то, что благодаря свойствам суперсимметрии все расходимости, кроме одной, сокращаются: остается только одна расходимость, соответствующая диаграмме рис. 53. Так как константа взаимодействия в рассматриваемой теории безразмерна и взаимодействие суперполей относится к типу  $\chi^3$ , то казалось бы, что теория должна быть суперперенормируемой (см. пункт 3.3.1), т. е. содержащей конечное число расходящихся диаграмм. В действительности это не так. Дело в том, что выводы раздела 3.3.1 основаны на предположении, что размерность пропагаторов в области больших импульсов определяется только импульсом, входящим в пропагатор. В случае же суперполей в пропагаторах (8.3.36) в области больших импульсов остаются размерные величины  $m, \theta$ . Поэтому рассуждения § 3.3 в случае суперполей не применимы.

Переходя к исследованию расходимостей в матрице рассеяния, производим промежуточную регуляризацию, заменяя пропагаторы  $\underline{\chi\chi^+}(p)$  пропагаторами

$$\underline{\chi\chi}(p) = im\delta(\theta - \theta') \Delta_2^c(p), \quad \underline{\chi^+\chi^+}(p) = -im\delta(\bar{\theta} - \bar{\theta}') \Delta_2^c(p),$$

$$\underline{\chi\chi^+}(p) = -\frac{i}{2} e^{-2\bar{\theta}'\sigma^{\mu\nu}\theta p_\mu} \Delta_1^c(p), \quad (8.3.39)$$

где

$$\Delta_1^c(p) = \frac{1 + \xi(p^2)^2}{m^2 - p^2 [1 + \xi(p^2)^2] - i0},$$

$$\Delta_2^c(p) = \frac{1}{m^2 - p^2 [1 + \xi(p^2)^2] - i0}.$$

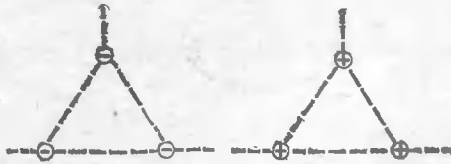


Рис. 55.

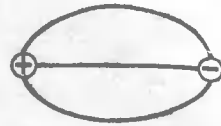


Рис. 56.

Эти функции при  $(p^2)^2 \ll \xi^{-1}$  совпадают с функцией  $\Delta^c(p)$ , в области же  $(p^2)^2 \gg \xi^{-1}$  они убывают быстрее чем  $\Delta^c(p)$ :  $\Delta_1^c(p)$  убывает как  $p^{-4}$ , а  $\Delta_2^c(p)$  — как  $p^{-10}$ . Эта промежуточная регуляризация является суперинвариантной, т. е. пропагаторы (8.3.39) будут суперинвариантными, как и исходные пропагаторы (8.3.36) (см. п. 8.3.2). После физической перенормировки параметр  $\xi$  нужно устремить к нулю.

Перейдем к анализу расходимостей в диаграммах второго и третьего порядков. Рассмотрим сначала диаграммы на рис. 54. Формальный подсчет степени расходимости этих диаграмм привел бы к выводу, что они расходятся логарифмически. Однако соответствующие этим диаграммам величины тождественно равны нулю, так как произведение пропагаторов  $\chi\chi(p, \theta)$   $\chi\chi(p - p', \theta)$  содержит квадрат грассмановой  $\delta$ -функции, который равен нулю  $\delta^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$  (напомним, что  $\delta(\theta_1 - \theta_2) = (\theta_1 - \theta_2)(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)$ ). Заметим, что этот результат труднее получить, если пользоваться не суперполем при формулировке правил Фейнмана, а его компонентами  $a, F, \varphi$ . Аналогичным образом обращаются в нуль и величины, соответствующие диаграммам рис. 55. Действительно, в эти диаграммы входят только пропагаторы  $\chi\chi(p, \theta)$ , содержащие грассмановы  $\delta$ -функции. Например, диаграмме третьего порядка на рис. 55 соответствует произведение трех грассмановых  $\delta$ -функций,  $\delta(\theta_1 - \theta_2)\delta(\theta_2 - \theta_3)\delta(\theta_1 - \theta_3)$ . Так как это произведение сводится к  $\delta^2(\theta_1 - \theta_2)\delta(\theta_2 - \theta_3)$ , то оно равно нулю. Отсюда легко заключить, что величины, соответствующие диаграммам, содержащим замкнутые циклы, построенные из пунктирных линий, обращаются в нуль.

Покажем, что обращается в нуль диаграмма рис. 56. Эта диаграмма при формальном подсчете степени пропагаторов расходится. Однако произведение трех пропагаторов, соответствующих этой диаграмме

$$\chi\chi^+(p)\chi\chi^+(k)\chi\chi^+(-p-k) = \frac{i}{8}\Delta^c(p)\Delta^c(k)\Delta^c(-p-k),$$

не содержит грассмановых переменных. Поэтому после интегрирования по грассмановым переменным  $\theta_1, \theta_2$ , которое



Рис. 57.

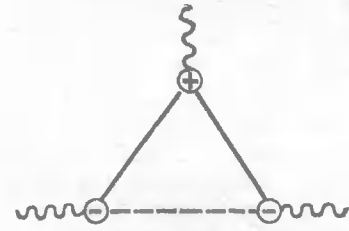


Рис. 58.

должно производиться согласно правилам Фейнмана, получим нуль (напомним, что  $\int d\theta = 0$ ). Мы видим, что вакуумные диаграммы во втором порядке теории возмущений обращаются в нуль. Можно показать, что этот результат справедлив и для вакуумных диаграмм всех порядков.

В теории суперполя появляются также диаграммы, показанные на рис. 57 (таких диаграмм не было в квантовой электродинамике, так как вектор тока представлял собой  $N$ -упорядоченный оператор). Поскольку эта диаграмма, согласно (8.3.36), содержит грассманову  $\delta$ -функцию  $\delta(\theta)$  при  $\theta = 0$ , то она также обращается в нуль (напомним, что  $\delta(0) = 0$ ).

Рассмотрим теперь трёхвершинную диаграмму (рис. 58). Формальный подсчет степени расходимости показывает, что она расходится как  $\int d^4p/p^2$ . Однако эта диаграмма содержит произведение трёх пропагаторов  $\chi\chi, \chi\chi^+, \chi\chi^+$ , которое согласно (8.3.36), сводится к

$$e^{2\bar{\theta}_1\hat{k}_1\theta_1}e^{2\bar{\theta}_2\hat{k}_2\theta_2}\delta(\theta_1 - \theta_2)\Delta^c(p)\Delta^c(p - k_1)\Delta^c(-p - k_2),$$

$$\hat{k} = \sigma^\mu k_\mu.$$

Поэтому интеграл по  $p$  от этого выражения сходится.

Рассмотрим, наконец, диаграмму рис. 53. Эта диаграмма вносит в  $S$ -матрицу вклад

$$\int d^4pd\theta d\bar{\theta} : \chi(p, \theta)\chi^+(p, \theta) : \Sigma(p, \theta, \bar{\theta}),$$

где, согласно (8.3.36),

$$\Sigma(p, \theta, \bar{\theta}) = e^{2\bar{\theta}p\theta} \int d^4k \Delta^c(k)\Delta^c(p - k).$$

Данное выражение отлично от нуля и входящий сюда интеграл в области больших импульсов расходится логарифмически. Это единственная диаграмма среди диаграмм второго и третьего порядков, приводящая к расходимости в матрице рассеяния.

Можно показать, что в более высоких порядках теории возмущений к расходимостям приводят только диаграммы, содержащие две внешние линии, соответствующие суперполям  $\chi(p, \theta)$  и  $\chi^+(p, \theta)$ , причем расходимость этих диаграмм будет логарифмической.

Суперчастицы, т. е. частицы, связанные с квантованными суперполями, объединяются в супермультиплеты, состоящие из бозонов и фермионов. Как мы уже говорили, при точной суперсимметрии частицы супермультиплета должны обладать одинаковой массой. Различие в массах должно возникать благодаря нарушению суперсимметрии. В настоящее время ведутся поиски суперчастиц. Однако на данном этапе они экспериментально не обнаружены.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### К главе 1

1. Паули В. Релятивистская теория элементарных частиц.— М. : Изд-во Иностран. лит., 1947.— 83 с.
2. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М. : Наука, 1965.— 235 с.
3. Голдстейн Г. Классическая механика.— М. : Наука, 1975.— 415 с.
4. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Поля и фундаментальные взаимодействия.— Киев : Наук. думка, 1986.— 552 с.
5. Волков Д. В., Пелетминский С. В. // Журн. эксперим. и теор. физики.— 1959.— 37.— С. 170—178.
6. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физики.— М. : Атомиздат, 1976.— 256 с.
7. Швингер Ю. Теория квантованных полей.— М. : Изд-во иностран. лит., 1956.— 250 с.
8. Дирак П. Принципы квантовой механики.— М. : Наука, 1979.— 480 с.
9. Паули В. Общие принципы волновой механики.— М. : Гостехиздат, 1947.— 332 с.
10. Томонага С. // Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М. : Изд-во иностран. лит., 1954.— 394 с. (Prog. Theor. Phys.— 1946.— 1.— Р. 27—32).
11. Швингер Ю. // Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М. : Изд-во иностран. лит., 1954.— 394 с. (Phys. Rev.— 1948.— 74, № 10.— Р. 1439—1461).
12. Паули В. // Нильс Бор и развитие физики.— М. : Изд-во иностран. лит., 1958.— 258 с.
13. Швингер Ю. // Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М. : Изд-во иностран. лит., 1954.— 394 с. (Phys. Rev.— 1951.— 82.— Р. 914—926).
14. Дайсон Ф. // Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М. : Изд-во иностран. лит., 1954.— 394 с. (Phys. Rev.— 1949.— 75, № 11.— Р. 1736—1755).
15. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М. : Наука, 1984.— 597 с.
16. Фейнман Р. // Phys. Rev.— 1949.— 76.— Р. 749—759; 769—789.
17. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М. : Наука, 1969.— 623 с.
18. Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1976.— 294 с.



19. *Horis* // *Progr. Theor. Phys.*—1952.— 7.— P. 578.
20. *Вук Д.* // Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М.: Изд-во иностр. лит., 1954.— 394 с. (*Phys. Rev.*— 1950.— 80.— P. 268—272).

#### К главе 2

1. *Jordan P., Pauli W.* // *Z. Phys.*— 1928.— 47.— P. 151—169.
2. *Feynman R.* // *Phys. Rev.*— 1951.— 84.— P. 108—128.
3. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Поля и фундаментальные взаимодействия.— Киев: Наук. думка, 1986.— 552 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1984.— 597 с.
5. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Релятивистская квантовая теория.— М.: Наука, 1968.— 477 с.
6. *Gupta S.* // *Proc. Phys. Soc. A.*— 1950.— 63.— P. 681.
7. *Bleuler K.* // *Helv. Phys. Acta.*— 1950.— 23.— P. 567.
8. *Dirac P. A. M.* // *Proc. Roy. Soc. A.*— 1928.— 117.— P. 610; 118.— P. 341.
9. *Паули В.* Общие принципы волновой механики.— М.: Гостехиздат, 1947.— 332 с.
10. *Weyl H.* // *Z. Phys.*— 1929.— 56.— P. 330—352.
11. *Majorana E.* // *Nuovo Cim.*— 1937.— 14.— P. 171—195.

#### К главе 3

1. *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория.— М.: Наука, 1978.— Т. 2.— 407 с.
2. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения.— М.: Изд-во иностр. лит., 1956.— 491 с.
3. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1969.— 623 с.
4. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Поля и фундаментальные взаимодействия.— Киев: Наук. думка, 1986.— 552 с.
5. *Fermi E.* // *Rev. Mod. Phys.*— 1932.— 4.— P. 87—99.
6. *Швингер Ю.* // Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М.: Изд-во иностр. лит., 1954.— С. 394. (*Phys. Rev.*— 1948.— 74, № 10.— P. 1439—1461).
7. *Паули В.* Нильс Бор и развитие физики.— М.: Изд-во иностр. лит., 1958.— 258 с.
8. *Боголюбов Н. Н., Логунов Л. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.— М.: Наука, 1969.— 424 с.
9. *Feynman R.* // *Phys. Rev.*— 1949.— 76.— P. 749—759, 769—789.
10. *Дайсон Ф.* // Новейшее развитие квантовой электродинамики.— М.: Изд-во иностр. лит., 1954.— С. 394. (*Phys. Rev.*— 1949.— 75, № 11.— P. 1736—1755).
11. *Word J.* // *Phys. Rev.*— 1950.— 73.— P. 182.
12. *Фрадкин Е. С.* // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1955.— 29.— С. 258—261.
13. *Takahashi Y.* // *Nuovo Cim.*— 1957.— 6.— P. 371—375.
14. *Kallen G.* // *Helv. Phys. Acta.*— 1952.— 25.— P. 417.
15. *Lehman H.* // *Nuovo Cim.*— 1952.— 25.— P. 342.
16. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.* // Докл. АН СССР.— 1955.— 100, № 1.— С. 25—28. (*Acta Math.*— 1957.— 97.— P. 227).
17. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1984.— 597 с.
18. *Паули В., Вилларс Ф.* // Сдвиг уровней атомных электронов.— М.: Изд-во иностр. лит., 1950.— С. 222. (*Rev. Mod. Phys.*— 1949.— 21.— P. 434).

19. *Bollini C. G., Giabulgi J. T.* // *Phys. Lett. B.*— 1972.— 40.— P. 566—568.
20. *Ashmore J. F.* // *Lett. Nuovo Cim.*— 1972.— 4.— P. 289.
21. *T'Hooft G., Veltman M.* // *Nucl. Phys. B.*— 1972.— 44.— P. 189—213.
22. *Dyson F.* // *Phys. Rev.*— 1949.— 75.— P. 486—502.
23. *Завьялов О. И.* Перенормированные диаграммы Фейнмана.— М.: Наука, 1979.— 317 с.
24. *Ицксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля.— М.: Мир, 1984.— 397 с.
25. *Stueckelberg E. C., Peterman A.* // *Helv. Phys. Acta.*— 1953.— 26.— P. 499.
26. *Gell-Mann M., Low F.* // *Phys. Rev.*— 1954.— 95.— P. 1300—1312.
27. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* // Докл. АН СССР.— 1955.— 103, № 3.— С. 203—206; № 3.— С. 391—394.
28. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1956.— 30.— С. 77—86 (*Nuovo Cim.*— 1956.— 3.— P. 845).
29. *Логунов Л. А.* // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1956.— 30.— С. 793—795.
30. *Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников Н. М.* // Докл. АН СССР.— 1954.— 95, № 6.— С. 1177—1180.
31. *Ландау Л. Д., Померанчук И. Я.* // Докл. АН СССР.— 1955.— 107, № 3.— С. 489—492.
32. *Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников Н. М.* // Докл. АН СССР.— 1954.— 95, № 4.— С. 773—776.
33. *Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников Н. М.* — // Докл. АН СССР.— 1954.— 96, № 2.— С. 261—264.
34. *Трутень В. И., Фомин П. И.* // Теорет. мат. физика.— 1970.— 5.— С. 219—234.
35. *Фомин П. И.* // Элементарные частицы, атомные ядра.— 1976.— 7.— 687—787.
36. *Fomin P. I., Miransky V. A.* // *Phys. Lett. B.*— 1976.— 64, № 2.— P. 166—169.
37. *Fomin P. I., Miransky V. A., Gusynin V. P., Sitenko Yu. A.* // *Riv. Nuovo Cim.*— 1983.— 6, № 5.— P. 1—90.
38. *Горьков Л. П.* // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1956.— 30.— С. 790—791.

#### К главе 4

1. *Янг Ч., Миллс Р.* // Элементарные частицы и компенсирующие поля.— М.: Мир, 1964.— С. 298.
2. *Утияма Р.* // Элементарные частицы и компенсирующие поля.— М.: Мир, 1964.— С. 298 (*Phys. Rev.*— 1956.— 101.— P. 1597—1607).
3. *Schwinger J.* // *Phys. Rev.*— 1962.— 125.— P. 1043—1048.
4. *Schwinger J.* // Элементарные частицы и компенсирующие поля.— М.: Мир, 1964.— С. 298 (*Phys. Rev.*— 1962.— 127.— P. 324—330).
5. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Поля и фундаментальные взаимодействия.— Киев: Наук. думка, 1986.
6. *Brandt R. A.* // *Nucl. Phys. B.*— 1976.— 116, 13.— P. 413—448.
7. *Becci C., Rouel A., Stora R.* // *Comm. Math. Phys.*— 1975.— 42.— P. 127.
8. *Тютин И. В.* Калибровочная инвариантность в теории поля и в статистической физике в операторной формулировке.— Лебедева, № 39).
9. *De Witt* // *Phys. Rev.*— 1967.— 160.— P. 1113—1148.
10. *Fradkin E. S., Tyutin I. V.* // *Phys. Lett. B.*— 1969.— 30.— P. 562—563.
11. *Fradkin E. S., Tyutin I. V.* // *Phys. Rev. D.*— 1970.— 2.— P. 2841—2857.

19. Н  
20. В  
В

1. J  
2. I  
3. I  
4.  
5.  
6.  
7.  
8.  
9.  
10.  
11.

12. Feynman R. // Acta Phys. Pol.— 1963.— 24.— P. 697.
13. Попов В. Н., Фадеев Л. Д. Теория возмущений для калибровочно инвариантных полей.— Киев, 1967.— 30 с.— (Препр.//АН УССР. Ин-т теор. физики, № 31).
14. Fadeev L. D., Popov V. N. // Phys. Lett. B.— 1967.— 25.— P. 29—30.
15. Славнов А. А., Фадеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.— 238 с.
16. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике.— М.: Атомиздат, 1976.— 256 с.
17. Mandelstam S. // Phys. Rev.— 1968.— 175.— P. 1580—1603.
18. Хриплович И. Б. // Ядер. физика.— 1969.— 10.— С. 409—424.
19. Lee B. W., Zinn-Justin I. // Phys. Rev. D.— 1972.— 5.— P. 3137—3155.
20. Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики.— М.: Наука, 1977.— 367 с.
21. Славнов А. А. // Теорет. мат. физика.— 1972.— 10.— С. 153—161.
22. Taylor I. C. // Nucl. Phys.— 1971.— 33, № 13.— P. 436.
23. Gross D. I., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett.— 1973.— 30.— P. 343—345. (Phys. Rev. D.— 1973.— 8.— P. 3633—3652).
24. Politzer H. D. // Phys. Rev. Let.— 1973.— 30.— P. 1346—1349.
25. Callan C. // Phys. Rev. D.— 1970.— 2.— P. 1541—1547.
26. Symanzik K. // Comm. Math. Phys.— 1970.— 18.— P. 227.

#### К главе 5

1. Heisenberg W. // Z. Phys.— 1932.— 77.— P. 1.
2. Gell-Mann M. // Phys. Lett.— 1964.— 8.— P. 214—215.
3. Zweig G. // Preprint.— 1964.— CERN.— 8182/TH. № 401.
4. Greenberg O. W. // Phys. Rev. Lett.— 1964.— 13.— P. 598—628.
5. Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н. К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц.— Дубна, 1965.— 10 с.— (Препр.//АН СССР. Объединен. ин-т ядер. исслед.; Д.—1968).
6. Han C. W., Nambu Y. // Phys. Rev. B.— 1965.— 139.— P. 1006—1056.
- 7a. Gell-Mann M., Ne'eman Y. // Eight-fold way.— New York, Amsterdam, 1964.
- 7b. Gell-Mann M., Ne'eman Y. // Элементарные частицы и компенсирующие поля.— М.: Мир, 1964.
8. Gell-Mann M. // Phys. Rev.— 1962.— 125.— P. 1067—1084. (Physics.— 1964.— 1.— P. 63).
9. Бернштейн Дж. Элементарные частицы и их токи.— М.: Мир, 1970.— 396 с.
10. Де Альфаро, Фубини С., Фурлан Г., Росетти К. Токи в физике адронов.— М.: Мир, 1976.— 670 с.
11. Сакураи Дж. Токи и мезоны.— М.: Атомиздат, 1972.— 167 с.
12. Schwinger J. // Phys. Rev. Lett.— 1959.— 3.— P. 296—297.
13. Иоффе Б. Л., Липатов Л. Н., Хозе В. А. Глубокоупругие процессы. Феноменология.— М.: Энергоатомиздат, 1983.— 264 с.
14. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1984.— 597 с.
15. Грибов В. Н., Иоффе Б. Л., Померанчук И. Я. // Ядер. физика.— 1967.— 6, № 3.— С. 587—590.
16. Chodos A., Jaffe R. L., Johnson K. et al. // Phys. Rev. D.— 1974.— 9.
17. Chodos A., Thorn C. B. // Ibid.— 1975.— 12.— P. 2733.
18. Bogolyubov P. N. Sur un modele a quarks quasi-independants // Ann. Inst. H. Poincaré.— 1968.— 8, № 2.— P. 163—189.
19. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1981.— 432 с.
20. Chodos A., Jaffe R. L., Johnson K., Thorn C. B. // Phys. Rev.— 1974.— 10.— P. 2599—2604.

21. Паули В. Общие принципы волновой механики.— М.: Гостехиздат, 1947.— 332 с.
22. Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория.— М.: Наука, 1978.— Т. 1—2.
23. Politzer H. D. // Phys. Rev. C.— 1974.— 14.— P. 129—180.
24. Jost R., Luttinger J. M. // Helv. Phys. Acta.— 1950.— 23, № 12.— P. 201—214.
25. Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov E. V. // Phys. Lett. B.— 1979.— 85, № 2/3.— P. 277—279.
26. Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V. Computation of the  $\alpha_s^2$  correction  $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$  in QCD.— Moscow, 1980.— 36 p. (Prepr./INR.— P. 0170).
27. Narison S. // Phys. Rep.— 1982.— 84, № 4.— P. 265—392.
28. Бьёркен Дж. Д., Иоффе Б. Л. // Успехи физ. наук.— 1975.— 116, № 1.— С. 115.
29. Исаев П. С. Квантовая электродинамика в области высоких энергий.— М.: Энергоатомиздат, 1984.— 264 с.
30. Поляков А. М. // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1970.— 59, № 2.— С. 542.
31. Fox G., Wolfram S. // Nucl. Phys. B.— 1979.— 149.— P. 413—496.
32. Serman G., Weinberg S. // Phys. Rev. Lett.— 1977.— 39.— P. 1436—1439.
33. Weeks V. G. // Phys. Lett. B.— 1979.— 81.— P. 377—379.
34. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами.— М.: Мир, 1975.— 389 с.
35. Bjorken J. D., Paschos E. A. // Phys. Rev.— 1969.— 185, № 5.— P. 1975—1982.
36. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н. // Элементар. частнцы, атом. ядро.— 1971.— 2, № 1.— С. 7—32.
37. Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н. // Теорет. мат. физика.— 1972.— 12, № 1.— С. 3—17.
38. Боголюбов Н. Н., Владимиров В. С., Тавхелидзе А. Н. // Теорет. мат. физика.— 1972.— 12, № 3.— С. 305—331.
39. Ахиезер А. И., Рекало М. П. Электродинамика адронов.— Киев: Наук. думка, 1977.— 495 с.
40. Buras A. J. // Rev. Mod. Phys.— 1980.— 52, № 1.— P. 199—276.
41. Волошин М. Б., Тер-Мартirosян К. А. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц.— М.: Энергоиздат, 1984.— 296 с.
42. Ioffe B. L. // Phys. Lett. B.— 1969.— 30.— P. 123—125.
43. Wilson K. G. // Phys. Rev.— 1969.— 179, № 25.— P. 1499—1512.
44. Шелест В. П., Зиновьев Г. М., Миранский В. А. Модель сильно взаимодействующих элементарных частиц.— М.: Атомиздат, 1975.— 232 с.
45. Gross D. J., Wilczek F. // Phys. Rev. D.— 1973.— 8, № 10.— P. 3633—3652; 1974.— 9, № 4.— P. 980—993.
46. Ицикзон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля.— М.: Мир, 1984.— Т. 1—2.
47. Андреев И. В. Хромодинамика и жесткие процессы при высоких энергиях.— М.: Наука, 1981.— 192 с.
48. Nactman O. // Nucl. Phys. B.— 1973.— 63, № 2.— P. 237—247.
49. Ellis R. K., Furmanski W., Petronzio R. // Ibid.— 1983.— 212, № 1.— P. 29—98.
50. Okawa M. // Ibid.— 1981.— 187, № 1.— P. 71—92.
51. Buchkhostov A. P., Kurayev E. A., Lipatov L. N., Frolov G. V. // Ibid.— 1985.— 257, № 2.— P. 151—165.
52. Ситенко Ю. А. // Укр. физ. журн.— 1984.— 28, № 12.— С. 1761—1779.

1. Fermi E. // Z. Physik.— 1934.— 88, № 1.— P. 161—171.
2. Feynman R., Cell-Mann M. // Phys. Rev.— 1958.— 109, № 1.— P. 193—198.
3. Sudarshan E. C. G., Marshak R. E. // Ibid.— № 5.— P. 1860—1862.
4. Sakurai J. J. // Nuovo Cim.— 1958.— 7, № 5.— P. 649—660.
5. Ландау Л. Д. // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1957.— 32, вып. 2.— С. 407—408.
6. Lee T. D., Yang C. N. // Phys. Rev.— 1957.— 105, № 5.— P. 1671—1675.
7. Salam A. // Nuovo Cim.— 1957.— 5, № 1.— P. 229—301.
8. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б. // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1955.— 29, вып. 5.— С. 698—699.
9. Фейнман Р. Теория фундаментальных процессов.— М.: Наука, 1978.— 199 с.
10. Wohl C. C., Cahn R. N. // Rev. Mod. Phys.— 1984.— 56, № 2.— P. 510, 578—588.
11. Любимов В. А., Новиков Е. Г., Нозик В. З. и др. // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1981.— 81, вып. 4.— С. 1158—1181.
12. Ландау Л. Д. // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1957.— 32.— вып. 2.— С. 405—406 (Nucl. Phys.— 1957.— 3, № 1.— P. 127—131).
13. Weinberg S. // Phys. Rev. Lett.— 1967.— 19, № 21.— P. 1264—1266.
14. Salam A. Elementary particle theory / Ed. by N. Svartholm.— Stockholm, 1968.— 367 p.
15. Glashow S. L. // Nucl. Phys.— 1961.— 22, № 4.— P. 579—588.
16. Klein O. On the theory of charged fields // New theories in physics.— Warsaw, 1938.
17. Schwinger J. // Ann. Phys. (USA)— 1957.— 2, № 5.— P. 407—434.
18. Salam A., Ward J. C. // Nuovo Cim.— 1959.— 11, № 4.— P. 568—577.
19. Salam A., Ward J. C. // Phys. Lett.— 1964.— 13, № 2.— P. 168—171.
20. Hasert F. J., Kabe S., Kreuz W. et al. // Ibid.— В.— 1973.— 46, № 1.— P. 138—140.
21. Arnison G., Astbury A., Aubert B. et al. // Ibid.— 1983.— 122, № 1.— P. 103—116. (Успехи физ. наук.— 1983.— 141, вып. 3.— С. 501—516).
22. Arnison G., Astbury A., Aubert B. et al. // Phys. Lett. B.— 1983.— 126, № 5.— P. 398.
23. Понткорво Б. // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1958.— 34, вып. 1.— С. 247—249.
24. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б. // Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1966.— 4, вып. 5.— С. 174—177.
25. Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. Успехи физ. наук.— 1981.— 135, вып. 1.— С. 45—77.
- 26а. Боголюбов Н. Н. Квазисредние в задачах статистической механики.— Дубна, 1961.— 92 с.— (Препр./АН СССР. Объедин. ин-т ядер. исслед.; Д.—781).
- 26б. Боголюбов Н. Н. Избранные труды по статистической физике.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.— С. 193—268.
27. Goldstone J. // Nuovo Cim.— 1961.— 19, № 1.— P. 154—164.
28. Goldstone J., Salam A., Weinberg S. // Phys. Rev.— 1962.— 127, № 3.— P. 965—970.
- 29а. Nambu Y. // Phys. Rev. Lett.— 1960.— 4.— P. 380—382.
- 29в. Nambu Y., Iona-Lassinio G. // Phys. Rev.— 1961.— 122, № 1.— P. 345—358.
30. Арбузов Б. А., Тавхелидзе А. Н., Фаустов Р. Н. // Докл. АН СССР. 1961.— 139.— С. 345.
31. Вакс В. Г., Ларкин А. И. // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1961.— 40.— С. 282—285.
32. Anderson P. W. // Phys. Rev.— 1963.— 130, № 1.— P. 439—442.
33. Higgs P. W. // Phys. Lett.— 1964.— 12, № 2.— P. 132—133.
34. Higgs P. W. // Phys. Rev. Lett.— 1964.— 13, № 16.— P. 508—509. (Phys. Rev.— 1966.— 145, № 4.— P. 1156—1163).
35. Englert F., Brout R. // Phys. Rev. Lett.— 1964.— 13, № 10.— P. 321—323.
36. Kibble T. W. B. // Phys. Rev.— 1967.— 155, № 5.— P. 1554—1561.
37. Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Шифман М. И. // Успехи физ. наук.— 1980.— 131, вып. 4.— С. 537—575.
38. Окунь Л. Б. Лептоны и кварки.— М.: Наука, 1981.— 304 с.
39. Ахмедов А. И., Рекало М. П. Электродинамика адронов.— Киев: Наук. думка, 1977.— 495 с.
40. Волошин М. Б., Тер-Мартirosян К. А. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц.— М.: Энергоатомиздат, 1984.— 296 с.
41. Вайнштейн А. И., Хриплович И. Б. // Успехи физ. наук.— 1974.— 112, вып. 4.— С. 685—709.
42. 't Hooft G. // Nucl. Phys. B.— 1971.— 35, № 1.— P. 167—188.
43. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей.— М.: Наука, 1978.— 240 с.
44. Миранский В. А. Переинтерпретация калибровочных теорий поля.— Киев, 1978.— 44 с.— (Препр./АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ—75—17P).
45. Тейлор Дж. Калибровочные теории слабых взаимодействий.— М.: Мир, 1978.— 206 с.
46. Зельдович Я. Б. // Докл. АН СССР.— 1952.— 76, № 3.— С. 505—508.
47. Биленький С. М., Понткорво Б. М. // Успехи физ. наук.— 1977.— 123, вып. 2.— С. 181—215.
48. Glashow S. L., Iliopoulos J., Maiani L. // Phys. Rev. D.— 1970.— 2, № 7.— P. 1285—1292.
49. Kobayashi M., Maskawa T. // Prog. Theor. Phys.— 1973.— 49, № 2.— P. 652—657.
50. Kabbibo N. // Phys. Rev. Lett.— 1963.— 10, № 12.— P. 531—533.
51. Миранский В. А. Квантование калибровочных теорий поля. Киев, 1977.— 46 с.— (Препринт/АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ—77—107P).
52. Passarino G., Veltman M. // Nucl. Phys. B.— 1979.— 160, № 1.— P. 151—207.
53. Ченг Т. П., Ли Л. Ф. Калибровочные теории в физике элементарных частиц.— М.: Мир, 1987.— 624 с.
54. Трейман С., Джекки В., Гросс Д. Лекции по алгебре токов.— М.: Атомиздат, 1977.— 230 с.
55. Райдер Л. Квантовая теория поля.— М.: Мир, 1987.— 504 с.
56. Weinberg S. // Rev. Mod. Phys.— 1974.— 46, № 2.— P. 255—277.
57. 't Hooft G. // Phys. Lett. B.— 1971.— 37, № 2.— P. 195—196.
58. Биленький С. М. Лекции по физике нейтринных и лептон-нуклонных процессов.— М.: Энергоиздат, 1981.— 216 с.
59. Georgi H., Quinn H. R., Weinberg S. // Phys. Rev. Lett.— 1974.— 33, № 7.— P. 451.
60. Georgi H., Glashow S. L. // Ibid.— 32, № 8.— P. 438—441.
61. Pati J. C., Salam A. // Phys. Rev. D.— 1973.— 8, № 4.— P. 1240—1251.
62. Pati J. C., Salam A. // Ibid.— 1974.— 10, № 1.— P. 275—289.
63. Матинян С. Г. // Успехи физ. наук.— 1980.— 130, вып. 1.— С. 3—38.
64. Gross D. I., Wilczek F. // Phys. Rev. D.— 1973.— 8.— P. 3633—3652.
65. Amaldi U., de Boer W., Fürstenau F. // Phys. Lett.— В.— 1991.— 260.— P. 447—455.
66. Dimopoulos S., Georgi H. // Nucl. Phys.— В.— 1981.— 193.— P. 150—162.
67. Nanopoulos D. V. // Phys. Rep.— 1984.— 105, № 1/2.— P. 71—89.

К главе 7

1. Утияма Р.— В кн. Элементарные частицы и компенсирующие поля. М.: Мир, 1964, с. 298 (Phys. Rev.— 1956.— 101.— P. 1597—1607).
2. Киббл Т.— В кн.: Элементарные частицы и компенсирующие поля. М.: — Мир, 1964, с. 298 (J. of Math. Phys.— 1961.— 2, 212).
3. Родичев В. И. Теория тяготения в ортогональном репере.— М.: Наука, 1973.— 183 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1967.— 460 с.
5. Hilbert D. Grundlagen der Physik, 1 Mitt; Gott. Nachr., 1915, Math. nat kl., S. 395.
6. Паули В. Теория относительности.— М.: Наука, 1983.— 332 с.
7. Фок В. А.// Zs. f. Phys.— 1929.— 57, № 261.
8. Weyl H.// Phys. Rev.— 1950.— 77.— P. 699.
9. Новиков И. Д., Фролов В. П. Физика черных дыр.— М.: Наука, 1986.— 327 с.
10. Hawking S. W.// Commun. math. Phys.— 1975.— 43.— P. 199.
11. Брайс С., Девитт. Динамическая теория групп и полей.— М.: Наука, 1987.— 287 с.
12. Faddeev L. D., Popov V. N.// Phys. Lett. B.— 1967.— 25. P. 29.

К главе 8

1. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.// Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1971.— 13.— С. 452—455.
2. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П. Проблемы теоретической физики: (Сб. памяти И. Е. Тамма).— М.: Наука, 1972.— 37—47.
3. Волков Д. В. Феноменологические лагранжианы, инвариантные относительно групп симметрии, содержащих в качестве подгруппы группу Пуанкаре.— Москва, 1971.— 3 с.— (Препр./ АН СССР. Физ. ин-т им. Лебедева; № 141).
4. Волков Д. В., Акулов А. П.// Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1972.— 16.— С. 621—624.
5. Волков Д. В., Акулов А. П.// Теорет. мат. физика.— 1974.— 18.— С. 39—50.
6. Волков Д. В., Сорока В. А.// Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1973.— 18.— С. 529—532.
7. Волков Д. В., Сорока В. А.// Теорет. мат. физика.— 1974.— 20.— С. 291—298.
8. Wess J., Zumino B.// Nucl. Phys. B.— 1974.— 70, № 1.— P. 39—50.
9. Огиевецкий В. И., Мезиническу Л.// Успехи физ. наук.— 1975.— 117, вып. 4.— С. 637—683.
10. Fayet P., Ferrara S.// Phys. Rev. C.— 1977.— 32, № 5.— P. 250—334.
11. Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация.— М.: Мир, 1986.— С. 180.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Физические поля и их квантование . . . . .	3
§ 1.1 Лагранжев формализм . . . . .	3
1.1.1. Вариационный принцип . . . . .	5
1.1.2. Группа пространственно-временных преобразований . . . . .	5
1.1.3. Группы внутренних симметрий . . . . .	9
1.1.4. Симметрии и законы сохранения . . . . .	12
§ 1.2 Гамильтонов формализм для систем с конечным числом степеней свободы . . . . .	16
1.2.1. Грассмановы переменные . . . . .	16
1.2.2. Гамильтоновы уравнения и скобки Пуассона . . . . .	19
1.2.3. Канонические преобразования . . . . .	21
§ 1.3. Гамильтонов формализм для бозонных и фермионных полей . . . . .	24
1.3.1. Грассмановы функции . . . . .	24
1.3.2. Лагранжиан бозонных и фермионных полей в случае уравнений поля первого порядка . . . . .	25
1.3.3. Релятивистская инвариантность уравнений поля первого порядка . . . . .	30
1.3.4. Гамильтоновы уравнения поля и скобки Пуассона . . . . .	32
§ 1.4. Свойства симметрии полей и законы сохранения . . . . .	36
1.4.1. Законы сохранения, связанные с внутренними и пространственно-временными симметриями . . . . .	36
1.4.2. Генераторы преобразований внутренних и пространственно-временных симметрий . . . . .	38
1.4.3. Скобки Пуассона интегралов движения . . . . .	41
§ 1.5. Квантование полей . . . . .	44
1.5.1. Квантовомеханическое описание состояний . . . . .	44
1.5.2. Каноническое квантование полей . . . . .	47
1.5.3. Квантование уравнений поля второго порядка . . . . .	51
1.5.4. Инвариантность теории по отношению к обращению времени и связь спина со статистикой . . . . .	53
§ 1.6. Матрица рассеяния . . . . .	59
1.6.1. Операторы рождения и уничтожения частиц и состояния вакуума . . . . .	59
1.6.2. S-матрица . . . . .	65
1.6.3. Упорядоченные произведения операторов поля . . . . .	67
1.6.4. Нормальное упорядочение матрицы рассеяния . . . . .	69
1.6.5. Функции Грина . . . . .	73
1.6.6. Вероятности и эффективные сечения процессов . . . . .	77

Глава 2. Квантование свободных бозонных и фермионных полей	80
§ 2.1. Квантование скалярного поля	80
2.1.1. Лагранжиан скалярного поля	80
2.1.2. Квантование скалярного поля	81
2.1.3. Операторы рождения и уничтожения скалярных частиц	83
§ 2.2. Квантование векторного поля	86
2.2.1. Лагранжиан векторного поля	86
2.2.2. Квантование векторного поля	87
2.2.3. Операторы рождения и уничтожения векторных частиц	89
§ 2.3. Квантование электромагнитного поля	93
2.3.1. Уравнения Максвелла	93
2.3.2. Квантование электромагнитного поля	96
2.3.3. Векторы состояний электромагнитного поля и индефинитная метрика	101
2.3.4. Структура физического подпространства векторов состояния и калибровочная инвариантность	104
2.3.5. Квантовые числа фотонов	106
§ 2.4. Квантование поля со спином 1/2.	108
2.4.1. Уравнение Дирака	108
2.4.2. Преобразование зарядового сопряжения	112
2.4.3. Лагранжиан дираковского поля	114
2.4.4. Квантование дираковского поля	116
2.4.5. Операторы рождения и уничтожения частиц со спином 1/2	117
2.4.6. Связи операторов дираковского поля	121
§ 2.5. Квантование двухкомпонентного спинорного поля	122
2.5.1. Структура матрицы преобразования дираковского поля	122
2.5.2. Матрицы преобразования спиноров при бесконечно малых преобразованиях Лоренца	125
2.5.3. Спинорная алгебра	127
2.5.4. Уравнения Вейля и Майораны	130
2.5.5. Лагранжиан и квантование спинорного поля	132
2.5.6. Разложение на плоские волны и разновременные перестановочные соотношения	133
2.5.7. Связи операторов майорановского поля	136
Глава 3. Теория электромагнитного взаимодействия	138
§ 3.1. Лагранжиан и матрица рассеяния электромагнитного и электронно-позитронного полей	138
3.1.1. Основные уравнения квантовой электродинамики	138
3.1.2. Представление взаимодействия и S-матрица	141
3.1.3. Свойства симметрии электромагнитного взаимодействия	144
§ 3.2. Диаграммное представление матрицы рассеяния и электродинамические функции Грина	148
3.2.1. Диаграммное представление матрицы рассеяния	148
3.2.2. Импульсное представление	151
3.2.3. Структура диаграмм матрицы рассеяния	155
3.2.4. Электродинамические функции Грина и тождества Уорда	160
3.2.5. Спектральное представление функций Грина	162
§ 3.3. Теория перенормировок	165
3.3.1. Расходимости неприводимых диаграмм матрицы рассеяния	165

3.3.2. Расходимости фейнмановских диаграмм и проблема определения произведений обобщенных функций	171
3.3.3. Промежуточная регуляризация	176
3.3.4. Перенормировка массы электрона	183
3.3.5. Физический заряд электрона и перенормировка функций Грина и вершинной функции	186
3.3.6. Перенормировка элементов матрицы рассеяния и общих функций Грина	189
3.3.7. Отсутствие расходимостей в рядах теории возмущений по перенормированному заряду	192
3.3.8. Функции Грина в низших порядках теории возмущений	195
§ 3.4. Ренормализационная группа и асимптотики функций Грина	199
3.4.1. Структура фотонной функции Грина в области больших импульсов	199
3.4.2. Структура электронной функции Грина в области больших импульсов	204
3.4.3. Асимптотика фотонной функции Грина в теории возмущений	207
3.4.4. Асимптотика электронной функции Грина в теории возмущений	211
3.4.5. Инфракрасная асимптотика электронной функции Грина	214
Глава 4. Теория неабелевых калибровочных полей	218
§ 4.1. Калибровочные поля	218
4.1.1. Унитарная симметрия	218
4.1.2. Введение калибровочного поля	223
4.1.3. Тензорный анализ калибровочных полей	228
4.1.4. Лагранжиан свободного калибровочного поля и полный лагранжиан	231
4.1.5. Калибровочные поля, связанные с дираковскими полями, обладающими внутренней симметрией	233
§ 4.2. Квантование калибровочного поля	236
4.2.1. Лагранжиан калибровочного и фермионного полей в лоренцевской калибровке	236
4.2.2. Инвариантность теории по отношению к калибровочным преобразованиям	240
4.2.3. Квантовая теория калибровочных и фермионных полей в пренебрежении взаимодействием	245
§ 4.3. Матрица рассеяния	251
4.3.1. Переход к представлению взаимодействия	251
4.3.2. Переход к импульсному представлению	255
4.3.3. Графическое представление матрицы рассеяния и правила Фейнмана	259
4.3.4. Унитарность матрицы рассеяния	263
§ 4.4. Перенормируемость теории неабелевых калибровочных полей	268
4.4.1. Классификация ультрафиолетовых расходимостей неабелевых калибровочных полей	268
4.4.2. Перенормируемость теории неабелевых калибровочных полей	272
4.4.3. Тождества Уорда	276
§ 4.5. Функции Грина и константы перенормировки во втором порядке теории возмущений	281
4.5.1. Функция Грина и константа перенормировки скалярного фермионного поля	281
4.5.2. Функция Грина и константа перенормировки глюонного поля	284

4.5.3. Глюон-«духовая» вершина и ее константа перенормировки	290
§ 4.6. Асимптотика функций Грина калибровочных полей в области больших импульсов	293
4.6.1. Уравнения ренормализационной группы	293
4.6.2. Структура функций Грина калибровочных полей в области больших импульсов	296
4.6.3. Асимптотика вершинных функций и функций Грина в теории возмущений	298
<b>Глава 5. Теория сильного взаимодействия</b>	<b>302</b>
§ 5.1. Квантовые числа кварков и мезонные и барионные супермультиплеты	302
5.1.1. Нуклонные и кварковые поля	302
5.1.2. Квантовые числа кварков	305
5.1.3. Мезонные супермультиплеты	312
5.1.4. Барионные супермультиплеты	316
§ 5.2. Алгебра токов	320
5.2.1. Перестановочные соотношения для токов	320
5.2.2. Швингеровские члены	322
5.2.3. Введение релятивистски инвариантных $T$ -произведений	324
§ 5.3. Феноменологическая хромодинамика	329
5.3.1. Кварки и глюоны	329
5.3.2. Феноменология конфайнмента	331
5.3.3. Волновая функция кварка в мешке	334
5.3.4. Структура нестранных барионов	336
§ 5.4. Аннигиляция электронно-позитронной пары в адроны	338
5.4.1. Полное сечение аннигиляции	338
5.4.2. Связь между полным сечением $e^+e^-$ аннигиляции и швингеровскими членами в коммутаторе кварковых токов	342
5.4.3. Сечение аннигиляции в области больших импульсов электронно-позитронной пары	345
5.4.4. Поляризаационный оператор фотона с учетом сильного взаимодействия	348
5.4.5. Вычисление вкладов, вносимых в поляризаационный оператор кварковыми и кварк-глюонными петлями	351
5.4.6. Аномальная размерность фотонной функции Грина и отношение сечений аннигиляции электронно-позитронной пары в адроны и мюоны	355
§ 5.5. Кварк-глюонные струи	357
5.5.1. Двухструйные процессы с участием мягких и виртуальных глюонов	357
5.5.2. Учет жестких глюонов в двухструйных процессах	361
5.5.3. Трехструйные процессы	365
§ 5.6. Глубоко неупругое рассеяние лептонов адронами	367
5.6.1. Амплитуда и сечение лептон-нуклонного рассеяния	367
5.6.2. Аналитические свойства амплитуды рассеяния	370
5.6.3. Представление произведения операторов токов в виде суперпозиции локальных операторов	372
5.6.4. Скеллинг в модели свободных кварков	377
5.6.5. Применение метода ренормализационной группы	381
5.6.6. Вычисление аномальных размерностей	385
5.6.7. Нарушение скеллинга	390
<b>Глава 6. Единая теория электрослабого взаимодействия</b>	
§ 6.1. Калибровочные поля, лептонные и скалярные мультиплеты	394
6.1.1. Четырехфермионное слабое взаимодействие	394

6.1.2. Лагранжиан безмассовых лептонов и векторных калибровочных полей	397
6.1.3. Введение хиггсовского скалярного поля	400
§ 6.2. Классическая теория электрослабого взаимодействия	402
6.2.1. Спонтанное нарушение симметрии и возникновение масс частиц	402
6.2.2. Фиксация калибровки	407
6.2.3. Лагранжианы взаимодействия	409
6.2.4. Введение фиктивных скалярных фермионов	414
§ 6.3. Электрослабое взаимодействие кварков	421
6.3.1. Лагранжиан безмассовых кварков, взаимодействующих с калибровочными полями	421
6.3.2. Спонтанное нарушение симметрии и массы кварков	425
6.3.3. Лагранжиан и токи физических кварков	428
§ 6.4. Квантовая теория электрослабого взаимодействия	430
6.4.1. Квантование свободных полей	430
6.4.2. Разложение векторных полей по плоским волнам	436
6.4.3. Матрица рассеяния и правила Фейнмана	439
6.4.4. Перенормируемость теории электрослабого взаимодействия и аксиальные аномалии	441
6.4.5. Низкоэнергетический предел теории электрослабого взаимодействия	453
6.4.6. Процессы рассеяния лептонов и распады $W$ - и $Z$ -бозонов	456
§ 6.5. Идея великого объединения	460
6.5.1. Бегущие константы связи	460
6.5.2. $SU(5)$ -симметрия	464
6.5.3. Нестабильный протон	468
<b>Глава 7. Теория гравитационного взаимодействия</b>	<b>471</b>
§ 7.1. Калибровочные поля, связанные с группой Лоренца — Пуанкаре	471
7.1.1. Введение калибровочных полей	471
7.1.2. Тензорный анализ калибровочных полей, связанных с группой Лоренца — Пуанкаре	474
7.1.3. Общее определение операции ковариантного дифференцирования	476
§ 7.2. Интерпретация калибровочных полей, связанных с группой Лоренца — Пуанкаре, как гравитационных полей	480
7.2.1. Геометрическая интерпретация калибровочных полей	480
7.2.2. Параллельный перенос и ковариантное дифференцирование	485
7.2.3. Пространственно-временные измерения при наличии гравитационного поля	488
§ 7.3. Уравнения гравитационного поля и поля материи	493
7.3.1. Лагранжиан полей	493
7.3.2. Уравнения Эйнштейна свободного гравитационного поля	496
7.3.3. Теория Вейля	497
7.3.4. Теория гравитации Эйнштейна	499
7.3.5. Лагранжианы скалярного, электромагнитного и дираковского полей при наличии гравитационного поля	504
7.3.6. Рождение частиц гравитационным полем	506
<b>Глава 8. Теория суперполей</b>	<b>514</b>
§ 8.1. Суперполя и их преобразования	514
8.1.1. Идея суперсимметрии и расширение группы Пуанкаре	514

8.1.2. Реализация алгебры генераторов суперпреобразований	516
8.1.3. Преобразования суперполей	520
8.1.4. Неприводимое скалярное суперполе	522
§ 8.2. Суперполя с внутренними симметриями и калибровочные суперполя	527
8.2.1. Суперполя с внутренней симметрией	527
8.2.2. Лагранжиан и уравнения движения суперполя	528
8.2.3. Абелевы калибровочные суперполя	533
8.2.4. Неабелевы калибровочные суперполя	538
§ 8.3. Квантование суперполя	541
8.3.1. Квантование свободного суперполя	541
8.3.2. Упорядоченные произведения операторов суперполя и связи	545
8.3.3. Переход к представлению взаимодействия и матрица рассеяния	547
8.3.4. Правила Фейнмана в теории суперполя	551
8.3.5. Расходности в матрице рассеяния суперполя	553
Список литературы	557

Наукове видання

**Олександр Ілліч АХІЄЗЕР**  
**Сергій Володимирович ПЕЛЕТІНСЬКИЙ**

**ТЕОРІЯ**  
**ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ**  
**ВЗАЄМОДІЙ**

(російською мовою)

Здано до набору 06.07.92. Підп. до друку 20.11.92. Формат 84×108/32. Папір № 1. Літ. гарн. Вис. друк. Ум.-друк. арк. 30,24. Ум. фарбо-відб. 30,24. Обл.-вид арк. 31,86.

Видавництво «Наукова думка». 252601 Київ, 4  
вул. Терещківська 3

Віддруковано з матриць Головного підприємства республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига». 252057 Київ, вул. Довженка, 3 в Жовківській книжковій друкарні, 292310 Жовква, Львівської обл., вул. Василіанська, 8. Зам. 78.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»**  
**В 1993 г. ВЫПУСТИТ**  
**В СВЕТ КНИГИ:**

*Бойко И. И.* Кинетика электронного газа, взаимодействующего с флуктуационным потенциалом.— 20 л.

В монографии рассмотрены общие вопросы кинетики электронного газа, взаимодействующего со случайным рассеивающим потенциалом. При получении конкретных макроскопических величин, характеризующих неравновесную электронную систему, широко использован метод уравнений баланса энергии и импульса, позволяющий получать эффективные оценки для релаксационных частот, а также рассматривать нелинейные транспортные явления. В рамках этого метода с использованием подходящих модельных функций распределения в ряде важных случаев удается выразить диссипативные характеристики электронной системы через диэлектрические функции рассеивающей системы и рассеиваемых частиц.

Для научных работников-специалистов по физике твердого тела.

*Васько Ф. Т.* Электронные состояния и оптические переходы в полупроводниковых гетероструктурах.— 13 л. Объявлено в темплане 1992 г. поз. 265.

В монографии изложены результаты исследований оптических свойств нового объекта физики полупроводников — сверхтонких гетероструктур, в которых реализуются размерно-квантованные электронные состояния. Приведен обзор основных методов расчета энергетического спектра этих материалов и рассмотрено приложение этих методов для описания междоузельных оптических переходов. Анализируются различные оптические процессы в квантовых ямах: фотопроводимость, люминесценция, электрооптический эффект и др. Кратко рассмотрена работа основных полупроводниковых устройств современной оптоэлектроники, а также методы оптической диагностики гетероструктур. Для специалистов по современной опто- и микроэлектронике.

*Веркин Б. И., Соколов С. С.* Введение в физику гелия.— 20 л.

В монографии суммируются и обобщаются результаты исследований свойств гелия, начиная с момента его открытия, как составной части развития современных представлений о строении вещества. Изложена история открытия гелия в различных природных средах. Описаны свойства альфа-частиц — ядер атома гелия, показана их роль, наряду с элементарными частицами, в развитии представлений о строении атомного ядра, в процессах происхождения элементов во Вселенной. Рассмотрено значение альфа-частиц в установлении планетарного строения атома. Изложены основные представления о строении атома, основы термодинамики фазовых переходов. Описана возможность получения низких температур при ожижении газов.

Для специалистов, работающих в области физики гелия, аспирантов и студентов.



Физика твердого тела: Энциклопедический словарь.— 120 л.

В словаре представлены сведения по всем разделам физики твердого тела: от фундаментальных теорий до прикладных вопросов. Словарь включает более 4 тысяч статей, в которых компактно освещены практически все направления физики твердого тела. Описаны не только традиционные типы твердых тел — кристаллов, но и аморфные вещества, жидкие кристаллы, полимеры, их электрические, оптические, магнитные, механические, тепловые и другие свойства, а также процессы, происходящие в твердых телах при различных воздействиях.

Для научных сотрудников, работающих в области физики твердого тела (теоретиков и экспериментаторов), инженеров, исследующих и применяющих твердые тела, а также преподавателей, аспирантов, студентов технических вузов.

Фізика конденсованих систем: Міжвід. зб. наук. пр. Вип. I.— 10 арк.

Представлені статті, присвячені актуальним проблемам сучасної статистичної теорії конденсованого стану. В серії праць досліджено термодинамічні та динамічні властивості кристалічних і аморфних матеріалів, які описуються псевдоспіновими гамільтонианами. Ряд статей присвячено актуальним питанням теорії металів і сплавів. Викладено оригінальні методи та підходи сучасної теорії конденсованого стану.

Для наукових працівників, аспірантів та студентів, які спеціалізуються в галузі статистичної фізики конденсованих середовищ.

Фізик  
120 л.

В слов  
зика  
прикла  
статей  
напраг  
тради  
аморф  
електр  
ловые  
дящие  
Для ф  
зика  
инжен  
а тако  
ських і

**Фізика конденсованих систем:** Міжвід. зб. наук. пр.—  
Вип. 2.— 10 арк.

У збірнику представлені статті, присвячені найактуальнішим проблемам статистичної теорії рідин і розчинів. Розглянуто структурні, термодинамічні, діелектричні і кінетичні властивості однорідних та неоднорідних іонних, молекулярних систем і їх сумішей. Досліджується міжфазна область між рідиною і твердим тілом та моделі колоїдних систем. Широко розглянуто застосування методів комп'ютерного експерименту до цих задач. Викладено оригінальні методи й підходи сучасної статистичної теорії.

Серед авторів збірника — відомі спеціалісти у цій галузі з України, Росії, США, Німеччини, Франції, Англії.

Для наукових працівників, що займаються проблемами теорії рідин і розчинів.

*Предварительные заказы на эти книги принимают местные магазины книготоргов и «Академкниги».*

*Жители г. Киева могут направлять заказы в магазин издательства «Наукова думка» (252001 Киев 1, ул. Грушевского, 4).*